Самостійна робота 17

Тема: Методи знаходження границі числової послідовності.
Мета: Навчитись знаходити границю числової послідовності.

План занять

1. Методи знаходження границі числової послідовності.
2. Нескінченно малі та нескінченно великі величини.

Термінологічний словник ключових понять

Послідовність — це числова функція $y = f(n)$, область визначення якої є множина натурального ряду чисел.

Границя а послідовності x_n — це таке число *a,* для якого при довільному $\varepsilon > 0,$ яким би малим воно не було, існує номер *N*, такий, що для всіх номерів $n > N$ виконується нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$.

Нескінченно мала величина — це така послідовність α_n, для якої $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0.$

Нескінченно велика величина — це така послідовність x_n, для якої при довільному числі *M* $0 < M < +\infty,$ яким би великим воно не було, існує номер *N* такий, що при всіх $n > N$ виконується нерівність $|x_n| > M$.

Навчальні завдання

Знайти границі.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 + 3n + 4}{n(2 - 5n)}.$

Розв'язок. В чисельнику і знаменнику виділяємо множник, який вносить найбільший вклад та скорочуємо на нього

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 3n + 4}{n(2 - 5n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(1 + \dfrac{3}{n} + \dfrac{4}{n^2}\right)}{n^2\left(-5 + \dfrac{2}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \dfrac{3}{n} + \dfrac{4}{n^2}}{-5 + \dfrac{2}{n}} = -\frac{1}{5}.$$

Д альше в дужках чисельника і знаменника бачимо домінуючі доданки, які і складають границю числової послідовності.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+1)^3 - (n-1)^3}{(2n+1)^3 + (n-1)^3}.$

Розв'язок. Виділяємо множники, що містять третю степінь і скорочуємо на них

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^3-(n-1)^3}{(2n+1)^3+(n-1)^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(\left(2+\frac{1}{n}\right)^3-\left(1-\frac{1}{n}\right)^3\right)}{n^3\left(\left(2+\frac{1}{n}\right)^3+\left(1-\frac{1}{n}\right)^3\right)}=\frac{2^3-1^3}{2^3+1^3}=\frac{7}{9}.$$

В підсумку записуємо ті додани, що внесуть вклад в границю послідовності.

3. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-1}{2n+3}-\frac{2+3n^2}{2n^2-7}\right).$

Розв'язок. Розбиваємо даний приклад на суму двох границь, за правилами маємо право на це. Далі в кожній з границь виносимо в чисельнику та знаменнику домінючі множники за дужки

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-1}{2n+3}-\frac{2+3n^2}{2n^2-7}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(3-\frac{1}{n}\right)}{n\left(2+\frac{3}{n}\right)}-$$

$$-\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(3+\frac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(2-\frac{7}{n^2}\right)}=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}=0.$$

В результаті прийдемо до того, що границі рівні, оже їхня різниця - нуль.

4. $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+8n+7}{\sqrt{81n^4-5n^3+9}}.$

Розв'язок. В такого типу прикладах потрібно винести в знамениику з під кореня множник в найбільшому степені. Як це зробити - перемножити показники *4*(1/2)=2*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+8n+7}{\sqrt{81n^4-5n^3+9}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(1+\frac{8}{n}+\frac{7}{n^2}\right)}{n^2\left(\sqrt{81-\frac{5}{n}+\frac{9}{n^2}}\right)}=\frac{1}{\sqrt{81}}=\frac{1}{9}.$$

Далі приходимо до частки, яка в підсумку дає *limit=1/9.*

(5) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[4]{5n^3+9}-\sqrt{3n^3-8}}{\sqrt[3]{1-2n^5}+\sqrt[4]{7n^4+2}}.$

Розв'язок. В цьому завданні та подібних потрібно знайти доданок з максимальним степенем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[4]{5n^3+9}-\sqrt{3n^3-8}}{\sqrt[3]{1-2n^5}+\sqrt[4]{7n^4+2}}.$$

В чисельнику змінна n знаходиться в степенях 3/4 та 1/3. Змінна в знаменика є в степенях 5/3 та 1. Оскільки найбільший степінь знаменника 5/3 є більшим від степені чисельника 3/4, то знаменник зростатиме швидше ніж чисельник.

В такому випадку границя послідовності рівна нулю

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[4]{5n^3+9}-\sqrt{3n^3-8}}{\sqrt[3]{1-2n^5}+\sqrt[4]{7n^4+2}}=0.$$

Якщо б було навпаки, то границя була б рівна нескінченності (∞). У випадку однакових показників змінної, чисельник і знаменник скорочуємо на неї та отримуємо константу.

(6) $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+2)!-n!}.$

Розв'язок. Границі з факторіалами займають особливе місце серед числових послідовностей. При їх знаходженні чисельник і знаменник розкладають до найбільшого спільного факторіалу

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+2)!-n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)n!}{n!\left((n+2)(n+1)-1\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)}{(n+2)(n+1)-1}=0.$$

Даі спрощують спільні множники та аналізують швидкості зростання чи спадання послідовності. Границя рівна нулю, тому що степінь знаменника (2) більший від чисельника (1).

(7) $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+4)!}{(n+3)!+(n+2)!}.$

Розв'язок. Як і у попередньому прикладі розкладаємо до найбільшого спільного факторіалу

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+4)!}{(n+3)!+(n+2)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+4)(n+3)(n+2)!}{\left((n+3)+1\right)(n+2)!}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+4)(n+3)}{n+4}=\lim_{n\to\infty}(n+3)=\infty.$$

Тут картина протилежна - чисельник зростає квадратично, знаменник лінійно, тому границя послідовності прямує до безмежності.

(8) $\lim_{n\to\infty}\frac{5^n-2^n}{5^n+2^n}.$

Розв'язок. До прикладів, в яких змінна n виступає в ролі показника треба ставитися з особливою увагою. Незнання закономірностей поведінки степеневих функцій часто приводить до помилок в розв'язуванні. В даному прикладі 5^n зростає значно швидше за 2^n , тому його виділяємо як найбільший множник

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5^n-2^n}{5^n+2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5^n\left(1-\frac{2^n}{5^n}\right)}{5^n\left(1+\frac{2^n}{5^n}\right)}=1.$$

Далі бачимо, що двійа ніякого вкладу не вносить, а гриниця такої послідовності рівна одиниці.

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{\frac{1}{n}}-5^{\frac{1}{n}}}{2^{\frac{1}{n}}+4^{\frac{1}{n}}}.$

Розв'язок.Числа в показникахі $2^{\frac{1}{n}}$ та $5^{\frac{1}{n}}$ прямують до одиниці (показники до нуля) при великих значеннях номера $n\to\infty$. На основі цього записуємо границю послідовності

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{\frac{1}{n}}-5^{\frac{1}{n}}}{2^{\frac{1}{n}}+4^{\frac{1}{n}}}=\frac{1-1}{1+1}=0.$$

Завдання для перевірки знань

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+6n+7}{2-n^2-3n^3}.$ *Відповідь.* $-\dfrac{1}{3}.$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n}+n+1}{5n^3-\sqrt[4]{n}+3}.$ *Відповідь.* 0.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}.$ *Відповідь.* 1.

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2}{2n^2}.$ *Відповідь.* $\dfrac{1}{2}.$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2+(n-1)^2}.$ *Відповідь.* 3.

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3-100n^2+1}{100n^2+15n}.$ *Відповідь.* ∞.

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1000n^3+3n^2}{0{,}001n^4-100n^3+1}.$ *Відповідь.* 0.

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n+1)^4+(n-1)^4}.$ *Відповідь.* 0.

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)^4-(n-1)^4}{(2n+1)^4+(n-1)^4}.$ *Відповідь.* $\dfrac{15}{17}.$

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+2}.$ *Відповідь.* 1.

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+1}.$ *Відповідь.* 0.

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)^2}{\sqrt[3]{n^6+1}}.$ *Відповідь.* 4.

13. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}(1+2+3+\ldots+n)$. *Відповідь.* $\dfrac{1}{2}$.

14. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)$. *Відповідь.* $\dfrac{1}{2}$.