Самостійна робота 18

Тема: Розкриття невизначеностей за правилом Лопіталя
Мета: Навчитись знаходити границю функції з використанням правила Лопіталя.

План занять

I. Розкриття невизначеностей з використанням правила Лопіталя.
1) Правило Лопіталя.
   а) Наслідок.
   б) Приклад 1.
2) Розкриття невизначеностей виду: $\infty-\infty$; $0\cdot\infty$; 1^{∞}; 0^{0}; ∞^{0}.
   а) Приклад 2.
   б) Приклад 3.
   в) Приклад 4.

I. Розкриття невизначеностей з використанням правила Лопіталя.
Лопіталь де Гійом Франсуа (1661-2.02.1704 рр.). Французький математик, член Парижської АН, народився в Парижі, вивчав математику під керівництвом У. Бернуллі. Видав перший друкований підручник по диференціальному обчисленню – "Аналіз нескінченно малих" (1696р.). Впідручнику є правило Лопіталя – правило знаходження межі дробу, чисельник і знаменник якого прямує до 0. Крім того, він створив курс аналітичної геометрії конічних перетинів. Йому також належить дослідження і розвиток за допомогою математичного аналізу декількох важких задач по геометрії і механіці, а також одне із рівнянь знаменитої задачі о браністохроні.

1. Правило Лопіталя.
Нехай виконані умови:
1. функції *f(x)* та *g(x)* визначені і диференційовані в колі точки x_0;
2. частка цих функцій $\frac{f(x)}{g(x)}$ в точці x_0 має невизначеність вигляду $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$;
3. існує $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Тоді існує $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ і виконує рівність:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad (1)$$

а) Наслідок.
Нехай:
1. Визначені в колі точки x_0 функції *f(x), g(x)* та їх похідні до *n*-го порядку

включно;

2. Частки $\frac{f(x)}{g(x)}$, $\frac{f'(x)}{g'(x)}$, …, $\frac{f(n-1)(x)}{g(n-1)(x)}$ мають невизначеність вигляду $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$;

3. Існує $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(n)(x)}{g(n)(x)}$, тоді

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(n)(x)}{g(n)(x)} \qquad (2)$$

б) Приклад 1.

Знайти: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{x-\sin x}{x^2}$.

Розв'язання:

Функції $f(x)=x-\sin x$ та $g(x)=x^2$ визначені з усіма своїми похідними в околі точки *x=0*.

Маємо:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{x-\sin x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to x_0}\frac{1-\cos x}{2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to x_0}\frac{\sin x}{2}=0.$$

2) Розкриття невизначеностей виду: $\infty-\infty$***;*** $0\cdot\infty$***;*** 1^∞***;*** 0^0***;*** ∞^0***.***

Існують прийоми, що дозволяють зводити вказані невизначеності до невизначеностей вигляду $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$, які можна розкривати з використанням правила Лопіталя.

1. Нехай $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$ і $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$, тоді

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)-g(x)\right]=(\infty-\infty)=\lim_{x\to x_0}f(x)\left[1-\frac{g(x)}{f(x)}\right]=\lim_{x\to x_0}\frac{1-\frac{g(x)}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}} \qquad (3)$$

За умовою $f(x)\to\infty$ при $x\to x_0$, тому $\frac{1}{f(x)}\to 0$ при $x\to x_0$.

Якщо $1-\frac{g(x)}{f(x)}$ не прямує до 0 при $x\to x_0$, то границя в правій частині (3) не існує, а тому і границя лівої частини (3) не існує.

Якщо $\left(1-\frac{g(x)}{f(x)}\right)\to 0$ при $x\to x_0$, то вираз $\left(\frac{1-\frac{g(x)}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}}\right)$ має невизначеність $\frac{0}{0}$.

2. Нехай $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$, тоді $f(x)\cdot g(x)$ має невизначеність вигляду $0\cdot\infty$ при $x\to x_0$.

В цьому випадку поступають так:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = (0\cdot\infty) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

Під знаком останньої границі маємо невизначеність $\frac{0}{0}$.

3. Нехай $f(x)\to 1$, $g(x)\to\infty$ при $x\to x_0$. Тоді $[f(x)]^{g(x)}$ має невизначеність вигляду 1^{∞}.

Позначимо $\lim_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)} = c$. Шляхом логарифмування цієї рівності одержимо:

$$\ln c = \ln\lim_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\ln[f(x)]^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} g(x)\ln f(x) \Rightarrow \ln c = \lim_{x\to x_0}\frac{\ln f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

Отже, обчислення натурального логарифма границі $\lim_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)}$ зводиться до розкриття невизначеності вигляду $\frac{0}{0}$.

4. Невизначеності вигляду 0^0 та $(\infty)^0$ зводять до невизначеностей $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$ шляхом логарифмування аналогічно до невизначеності вигляду 1^{∞}.

а) Приклад 2.

Знайти границю $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\ln x}$.

Розв'язання:

Функції $f(x) = x$ та $g(x) = \ln x$ диференційовані, а їх частка $\frac{x}{\ln x}$ має невизначеність вигляду $\frac{\infty}{\infty}$ при $x\to\infty$.

Використовуючи правило Лопіталя, одержимо:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\ln x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} x = \infty$$

.

б) Приклад 3.

Знайти границю $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{tgx}$.

Розв'язання:

В цьому випадку маємо невизначеність вигляду $(\infty)^0$.

Позначимо $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{tgx} = c$ і про логарифмуємо цю рівність. Одержимо:

$\ln c = \ln_{x\to 0} tgx\cdot\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\lim_{x\to 0} tgx\ln x = -\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{ctgx}$, тобто невизначеність вигляду $\frac{\infty}{\infty}$.

Використовуючи правило Лопіталя, одержимо:

$$\ln c = -\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{ctgx} = -\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cdot\cos x}{1} = 0$$

.

Отже, $\ln c = 0 \Rightarrow c = e^0 = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{tgx} = 1$.

в) Приклад 4.

Знайти границю $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$.

В цьому випадку маємо невизначеність вигляду 1^∞. Нехай $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2} = c$.

Логарифмуючи цю рівність, одержимо:

$$\ln c = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\cdot\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\ln\frac{\sin x}{x}\right)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0}\frac{(\ln\sin x - \ln x)'}{2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \sin x}{2x^2\sin x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{4x\sin x + 2x^2\cos x} =$$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{4x\sin x + 2x^2\cos x} = \left(\frac{0}{0}\right) = -\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6\cos x - 2x\sin x} = -\frac{1}{6}$$

.

Чотири рази застосували правило Лопіталя.

Отже, маємо:

$$\ln c = -\frac{1}{6} \Rightarrow c = e^{-\frac{1}{6}} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{6}}$$