Самостійна робота 19

Тема: Особливі границі та наслідки з них.

Мета: Навчитись застосовувати особливі границі та наслідки з них при обчисленні границі функції.

План занять

1. Дві особливі границі.
2. Наслідки з особливих границь.

Термінологічний словник ключових понять

Перша особлива границя — $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$

Друга особлива границя — $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$

Наслідки першої особливості границі запишемо формулами

1. $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1.$ 2. $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1.$ 3. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\operatorname{tg} x}=1.$ 4. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\frac{a}{b}.$

Самі по собі загальні формули чудових границь нікому на екзамені чи тесті не допомагають. Суть в тому, що реальні завдання побудовані так, що до записаних вище формул потрібно, ще прийти. І більшість студентів, які пропускають пари, заочно вивчають цей курс або мають викладачів, які самі не завжди розуміють про що пояснюють не можуть виконати самих елементарних прикладів на чудові границі. З формул першої особливої границі бачимо, що з її допомогою можна досліджувати невизначеності типу нуль поділити на нуль $\left[\frac{0}{0}\right]$ для виразів з тригонометричними функціями. Розглянемо спершу ряд прикладів на першу чудову границю, а тоді розжуємо другу чудову границю.

Навчальні завдання

Знайти границю функції *sin(7*x)/(5*x)*

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{5x}$ Розв'язок: Як бачите функція під границею близька до першої чудової границі, але сама границя точно не рівна одиниці. В такого роду завданнях на границі слід в знаменнику виділити змінну з таким коефіцієнтом, який міститься при змінній під синусом. В даному випадку слід поділити і помножити на *7*

$$\lim_{x\to 0}\frac{7\sin 7x}{5\cdot 7x}=\frac{7}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{7x}=\frac{7}{5}\cdot 1=\frac{7}{5}.$$

Декому така деталізація здасться зайвою, але більшості студентів, яким важко даються границі допоможе краще зрозуміти правила та засвоїти теоретичний матеріал.
Також, якщо маємо обернений вигляд функції – то це також перша чудова границя. А все тому, що особлива границя рівна одиниці

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1.$$

Це саме правило стосується і висновків 1 чудової границі. Тому, якщо Вас спитають "Чому рівна перша чудова границя?" Ви без вагань повинні знати, що це – одиниця.

Знайти границю функції *sin(6x)/tg(11x)*

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{\mathrm{tg}\,11x}$ Розв'язок: Для розуміння кінцевого результату розпишемо функцію у вигляді

$$\frac{\sin 6x}{\mathrm{tg}\,11x}=\frac{\sin 6x}{\frac{\sin 11x}{\cos 11x}}=\frac{\cos 11x\cdot\sin 6x}{\sin 11x}.$$

Щоб застосувати правила особливої границі помножимо та поділимо на множники

$$\frac{\cos 11x\cdot\sin 6x}{\sin 11x}=\cos 11x\cdot\frac{11x}{\sin 11x}\cdot\frac{\sin 6x}{6x}\cdot\frac{6}{11}.$$

Далі границю добутку функцій розпишемо через добуток границь

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{\mathrm{tg}\,11x}=\frac{6}{11}\lim_{x\to 0}\cos 11x\cdot\frac{11x}{\sin 11x}\cdot\frac{\sin 6x}{6x}=$$

$$=\frac{6}{11}\lim_{x\to 0}\cos 11x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{11x}{\sin 11x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{6x}=$$

$$=\frac{6}{11}\cdot 1\cdot 1\cdot 1=\frac{6}{11}.$$

Без складних формул ми знайшли границю часки тригонометричних функцій. Для засвоєння простих формул спробуйте придумати та знайти границю на *2* та *4* формулу наслідку *1* особливої границі. Ми ж розглянемо складніші завдання.

Обчислити границю *(1-cos(x))/x^2*

$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$ Розв'язок: При перевірці підстановкою отримаємо невизначеність 0/0. Багато кому невідомо, як звести такий приклад до 1 особливої границі. Тут слід використати тригонометричну формулу

$1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}.$

При цьому границя набуде зрозумілого вигляду

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{2}{4}\cdot 1^2=\frac{1}{2}.$$

Нам вдалося звести функцію до квадрату особливої границі.

Знайти границю

$\lim_{x\to\pi}\frac{1-\sin\frac{x}{2}}{(\pi-x)^2}$ Розв'язок: При підстановці отримаємо знайому особливість *0/0*. Проте змінна прямує до *Pi*, а не нуля. Тому для застосування першої особливої границі виконаємо таку заміну змінної х, щоб нова змінна прямувала до нуля, знаменник позначимо за нову змінну *Pi-x=y*

$$\lim_{x\to\pi}\frac{1-\sin\frac{x}{2}}{(\pi-x)^2}=\left|\begin{array}{l}\pi-x=y\\ x=\pi-y\\ x\to\pi\\ y\to 0\end{array}\right|=\lim_{y\to 0}\frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{y}{2}\right)}{y^2}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{1-\cos\frac{y}{2}}{y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{2\sin^2\frac{y}{4}}{y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{y}{4}\right)}{16\left(\frac{y}{4}\right)^2}=\frac{1}{8}.$$

Таким чином використавши тригонометричну формулу, яка наведена в попередньому завданні, приклад зведено до *1* особливої границі.

Обчислити границю

$\lim_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$ Розв'язок: Спершу неясно, як спростити границю. Але раз є приклад, значить має бути і відповідь. Те що змінна прямує до одиниці дає при підстановці особливість вигляду нуль помножити на безмежність, тому тангенс потрібно замінити за формулою

$\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{ctg}x=1\to\operatorname{ctg}x=\frac{1}{\operatorname{tg}x}.$

Після цього отримаємо потрібну невизначеність *0/0*. Далі виконуємо заміну змінних в границі, та використовуємо періодичність котангенса

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left|\begin{matrix}1-x=y\\ x=1-y\\ x\to 1\\ y\to 0\end{matrix}\right|=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi y}{2}\right)}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\operatorname{tg}\frac{\pi y}{2}}=\lim_{y\to 0}\frac{\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi y}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\pi y}{2}}=\frac{2}{\pi}.$$

Останні заміни дозволяють використати наслідок *1* особливої границі.

Друга особлива границя рівна експоненті

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e.$$

Це класика, до якої в реальних задачах на границі не завжди легко прийти. В обчисленнях Вам також знадобляться **границі — наслідки другої особливої границі:**

1. $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$ 2. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx}=e^{ab}.$ 3. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.$ 4. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=1.$

Завдяки другій особливій границі та її наслідкам можна досліджувати невизначеності типу нуль розділити на нуль, одиниця в степені безмежність, та нескінченність розділити на нескінченність, та ще й в такому ж степені

$\left[\frac{0}{0}\right]$, $\left[1^{\infty}\right]$, $\left[\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}\right]$

Почнемо для ознайомлення з простих прикладів.

Обчислити границю

$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x}$ Розв'язок: Напряму застосувати *2* особливу границю не вийде. Спершу слід перетворити показник, щоб він мав вигляд обернений до доданка в дужках

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{2\cdot 3\cdot\frac{x}{3}}=e^{2\cdot 3}=e^{6}.$$

Це і є техніка зведення до *2* чудової границі і по суті – виведення *2* формули наслідку границі.

Знайти границю

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{7x}.$$

Розв'язок: Маємо завдання на *3* формулу наслідку *2* особливої границі. Підстановка нуля дає особливість типу *0/0*. Для зведення границі під правило перетворимо знаменник, щоб при змінній був той самий коефіцієнт, що і в логарифмі

$$\lim_{x\to 0}\frac{\boxed{3}}{7}\frac{\ln(1+3x)}{\boxed{3}x}=\frac{3}{7}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{3x}=\frac{3}{7}.$$

Це також легко зрозуміти та виконати на екзамені. Труднощі у студентів при знаходженні границь починаються із наступних завдань.

Обчислити границю функції *[(x+7)/(x-3)]^(x-2)*

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+7}{x-3}\right)^{x-2}$$

Розв'язок: Маємо особливість типу *1* в степені безмежність. Якщо не вірите, можете всюди замість "ікс" підставити нескінченність та переконатися в цьому. Для зведення під правило поділимо в дужках чисельник на знаменник, для цього попередньо виконаємо маніпуляції

$$\frac{x+7}{x-3}=\frac{x-3+3+7}{x-3}=1+\frac{10}{x-3}.$$

Підставимо вираз у границю та перетворимо під 2 особливу границю

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+7}{x-3}\right)^{x-2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{10}{x-3}\right)^{10\cdot\frac{x-2}{10}}=e^{10}.$$

Границя рівна експоненті в *10* степені. Константи, які є доданками при змінній як в дужках так і степені ніякої "погоди" не вносять – про це слід пам'ятати. А якщо Вас запитають викладачі – "Чому не перетворюєте показник?" (для цього прикладу до *x-3*), то скажіть, що "Коли змінна прямує до безмежності, то до неї хоч додавай *100*, хоч віднімай *1000*, а границя залишиться такою як і була!".
Є і другий спосіб обчислювати границі такого типу. Про нього розкажемо у наступному завданні.

Знайти границю

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{2x-1}$$

Розв'язок: Цього разу винесемо змінну з чисельника та знаменника та перетворимо одну особливість на іншу. Для отримання кінцевого значення використаємо формулу наслідку 2 особливої границі

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x-3}\right)^{2x-1}=\left[\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{5}{x}}{1-\frac{3}{x}}\right)^{2x-1}=\left[1^{\infty}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{5}{x}\right)^{2x}\cdot\overbrace{\left(1-\frac{3}{x}\right)}^{\to 0}}{\left(1+\frac{-3}{x}\right)^{2x}\cdot\underbrace{\left(1+\frac{5}{x}\right)}_{\to 0}}=\frac{e^{5\cdot 2}\cdot 1}{e^{-3\cdot 2}\cdot 1}=e^{10+6}=e^{16}.$$

В результаті маніпуляцій отримали експоненту в 16 степені.

Знайти границю

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin 3x)^{\frac{1}{x}}$$

Розв'язок: Задану границю знайти під силу не кожному. Для зведення під *2* особливу границю уявимо, що*sin(3x)* це змінна, а потрібно перетворити показник

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin 3x)^{\frac{1}{x}}=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{x\to 0}(1+\sin 3x)^{\frac{1}{\sin 3x}\frac{\sin 3x}{x}}=$$

Далі показник перетворюємо як степінь в степені

$$=\lim_{x\to 0}\left((1+\sin 2x)^{\frac{1}{\sin 3x}}\right)^{\frac{\sin 3x}{x}}=\left|\begin{array}{l}(1+\sin 3x)^{\frac{1}{\sin 3x}}\xrightarrow[x\to 0]{}e\\ 3\frac{\sin 3x}{3x}\xrightarrow[x\to 0]{}3\end{array}\right|=e^{3}.$$

В дужках написані проміжні міркуванні. В результаті використанні першої і другої особливої границі отримали експоненту в кубі.

Обчислити границю функції *sin(2*x)/ln(3*x+1)*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\ln(3x+1)}$$

Розв'язок: Маємо невизначеність виду *0/0*. Крім цього бачимо, що в дробовій функції чисельник та знаменник слід перетворювати під обидві особливі границі. Виконаємо попередні математичні перетворення

$$\frac{\sin 2x}{\ln(3x+1)}=\frac{\sin 2x}{2x}\frac{3x}{\ln(3x+1)}\frac{2x}{3x}$$

Далі за теорією границя прийме простий вигляд

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\ln(3x+1)}=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\frac{3x}{\ln(3x+1)}=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\frac{\sin 2x}{2x}\xrightarrow[x\to 0]{}1\\ \frac{3x}{\ln(3x+1)}\xrightarrow[x\to 0]{}1\end{array}\right|=\frac{2}{3}.$$