

Лекція №15. Неперервність функції

1. <i>Поняття неперервності функції</i>	1
2. <i>Властивості неперервних функцій</i>	3
3. <i>Класифікація точок розриву функцій</i>	4

1. Поняття неперервності функції

Означення. Функція $y = f(x)$ називається *неперервною в точці* $x = x_0$, якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Виходячи з означення границь функції, поняття неперервності функції в точці можна зобразити так:

$$\left(\begin{array}{c} f(x) \text{ — неперервна} \\ \text{при } x = x_0 \end{array} \right) := \\ := ((\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < |x - x_0| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)).$$

Звідси випливає, що для неперервності функції в точці мають виконуватися такі умови:

- а) точка $x = x_0$ належить області визначення функції $D(f)$, тобто $f(x_0)$ існує;
- б) деякий окіл точки $x = x_0$ входить до області визначення функції, наприклад $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset D(f)$;
- в) границя $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$ дорівнює значенню функції в точці $x = x_0$, тобто дорівнює $f(x_0)$.

Позначимо через $\Delta x = x - x_0$ приріст аргументу, а через $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ — приріст функції (рис. 1).

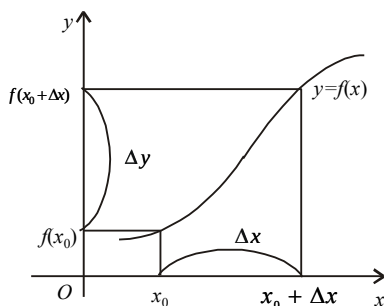


Рис. 1

Означення. Функція $y = f(x)$ називається *неперервною в точці* $x = x_0$, якщо в цій точці нескінченно малому приросту аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції, тобто

$$\left(\begin{array}{l} f(x) \text{ — неперервна} \\ \text{при } x = x_0 \end{array} \right) := \\ = ((\Delta x = x - x_0 \rightarrow 0) \Rightarrow \\ \Rightarrow (\Delta y = f(x) - f(x_0) \rightarrow 0)).$$

Означення. Функція $y = f(x)$ називається *неперервною в точці* $x = x_0$, якщо границя функції дорівнює функції від границі аргументу при $x \rightarrow x_0$, тобто

$$\left(\begin{array}{l} f(x) \text{ — неперервна} \\ \text{при } x = x_0 \end{array} \right) := \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} x\right) \right).$$

Означення. Функція $y = f(x)$ називається *неперервною в точці* $x = x_0$, якщо односторонні границі функції зліва й справа в цій точці існують, рівні між собою і дорівнюють значенню функції у цій точці, тобто:

$$\left(\begin{array}{l} f(x) \text{ — неперервна} \\ \text{при } x = x_0 \end{array} \right) := \left(\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0) \right).$$

Означення. Функція називається *неперервною на проміжку*, якщо вона неперервна у кожній точці цього проміжку.

Таким чином, поняття неперервності функції у точці задається чотирма, хоч і рівноправними, але різними за формулюванням означеннями. Використання конкретного означення неперервності функції в точці визначається специфікою задачі.

Приклад. Дослідити на неперервність функцію $y = \sin x$.

● Область визначення функції $y = \sin x - D = R$.

Візьмемо довільне $x_0 \in D = R$, надамо x_0 приросту Δx , тоді приріст функції Δy буде

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right).$$

Розглянемо

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta x \cdot \sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cos \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right) \right) = 0.$$

Дамо необхідні пояснення: при $\Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta x$ — н.м.в.; $\frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \rightarrow 1$; $\cos \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right)$

— величина обмежена $\left(\left| \cos \left(\frac{\Delta x}{2} + x_0 \right) \right| \leq 1 \right)$, отже, добуток $\Delta y = \Delta x \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cos \left(\frac{\Delta x}{2} + x_0 \right) \in$

н.м.в.

Таким чином, з $\Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta y \rightarrow 0$.

Звідси функція $y = \sin x$ неперервна $\forall x_0 \in R$, тобто на всій області визначення.

2. Властивості неперервних функцій

Теорема 1. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні у точці $x = x_0$, то у цій точці будуть неперервними функції $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$; в останньому випадку за умови, що $g(x_0) \neq 0$.

Теорема 2. Якщо функція $y = F(u)$ — неперервна для $u \in U$, а функція $u = \varphi(x)$ — неперервна для $x \in X$ і значення функції $\varphi(x) \in U$, то складна функція $y = F(\varphi(x))$ — неперервна для $x \in X$.

Приклад. Дослідити функції $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ на неперервність.

Оскільки $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, то функцію $y = \cos x$ можна вважати суперпозицією таких неперервних $\forall x \in R$ функцій: $y = \sin u$, $u = \frac{\pi}{2} - x$. Отже, за теоремою 2 функція $y = \cos x$ — неперервна $\forall x \in R$.

Тепер за теоремою 1 неважко встановити, що функція $y = \operatorname{tg} x$ — неперервна $\forall x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, а функція $y = \operatorname{ctg} x$ — неперервна $\forall x \in (\pi n, \pi + \pi n) n \in Z$, як відношення неперервних функцій $y = \sin x$ та $y = \cos x$.

Зауваження. Можна довести, що всі основні елементарні функції будуть неперервними в кожному з відкритих проміжків своєї області визначення.

Теорема 3 (Коші). Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на замкненому проміжку $[a; b]$ і на кінцях проміжку набуває значення різних знаків (наприклад $f(a) > 0$, $f(b) < 0$), тоді на відкритому проміжку $(a; b)$ існує така точка $x = c$, що $f(c) = 0$ (рис. 2).

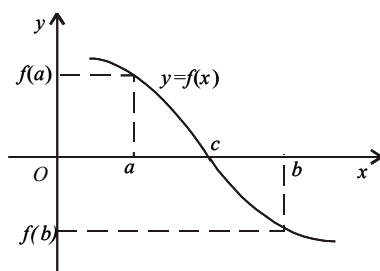


Рис. 2

Наслідок. Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на $[a; b]$ і $f(a) = A$, $f(b) = B$, то $y = f(x)$ на $[a; b]$ набуває всіх проміжних значень між числами A і B .

Теорема 4 (Вейєрштраса). Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на замкненому проміжку $[a; b]$, то вона набуває на цьому проміжку своїх найбільших й найменших значень (рис. 3).

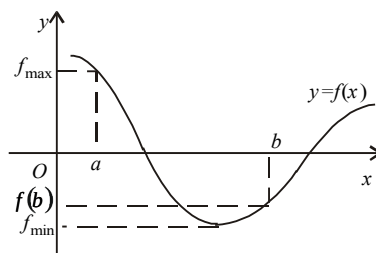


Рис. 3

3. Класифікація точок розриву функцій

Означення. Функція $y = f(x)$ називається *розривною в точці* $x = x_0$, якщо порушується хоча б одна з умов рівності

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0).$$

Розрізняють точки *розриву 1-го і 2-го роду*. Розриви 1-го роду бувають усувні й неусувні; розриви 2-го роду — завжди неусувні.

Означення. Точка $x = x_0$ називається *точкою розриву 2-го роду* для функції $y = f(x)$, якщо в цій точці не існує хоча б одна з односторонніх границь (зліва чи справа).

Означення. Точка $x = x_0$ називається *точкою розриву 1-го роду* (розрив неусувний) для функції $y = f(x)$, якщо односторонні границі (зліва і справа) функції у цій точці існують, але не рівні між собою, тобто $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$.

Означення. Точка $x = x_0$ називається *точкою розриву 1-го роду* (розрив усувний) для функції $y = f(x)$, якщо односторонні границі функції в цій точці існують, рівні між собою, але не дорівнюють значенню функції в цій точці або функція у цій точці не існує, тобто $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) \neq f(x_0)$.

Зауваження. Точка $x = x_0$ усувного розриву відзначається тим, що існує $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, але $f(x_0) \neq A$. Тому на основі функції $f(x)$ можна побудувати функцію

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при } x \neq x_0 \\ A & \text{при } x = x_0, \text{ яка буде неперервною в точці } x = x_0, \end{cases}$$

Методика дослідження функцій на неперервність.

1. Знайти область визначення функції $D(y)$.
2. Дослідити функцію на неперервність у відкритих проміжках $D(y)$.
3. Визначити скінченні граничні точки (с.г.т.) $D(y)$ і обчислити односторонні границі функції у цих точках.

4. Зробити висновок про характер точок розриву (якщо вони є) і побудувати графік функції поблизу цих точок. Для зручності побудови графіка функції рекомендується записати координати граничних точок графіка функції $P_i(x_0 \pm 0; y_0 \pm 0)$. Символічний запис абсциси граничної точки $x_0 \pm 0$ означає, що абсциса довільної точки графіка функції прямує до x_0 зліва ($x_0 - 0$) або справа ($x_0 + 0$); а запис $y_0 \pm 0$ означає, що ордината довільної точки графіка функції при цьому прямує до y_0 знизу ($y_0 - 0$) або зверху ($y_0 + 0$). Наприклад, для граничних точок $P_1(2-0; +0)$ і $P_2(2+0; 1-0)$ графік функції підходить до цих точок так, як показано на рис. 4.

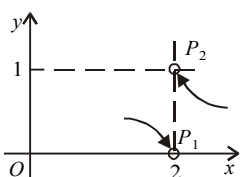


Рис. 4 До точки P_1 графік підходить зліва і зверху, а до точки P_2 — справа і знизу.

Приклад. Дослідити на неперервність функцію $y = 2^{\frac{1}{x-1}}$.

● Область визначення цієї функції $D = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$. На кожному з інтервалів області визначення функція буде неперервна, як суперпозиція неперервних елементарних функцій. Скінченною граничною точкою D функції буде $x = 1$. Обчислимо такі границі:

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} y = \lim_{x \rightarrow 1-0} 2^{\frac{1}{x-1}} = \left. \begin{array}{l} x \rightarrow 1-0 (x < 1) \\ x-1 \rightarrow -0 \\ \frac{1}{x-1} \rightarrow -\infty \\ 2^{-\infty} \rightarrow \frac{1}{2^{+\infty}} \rightarrow +0 \end{array} \right\} = +0;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} y = \lim_{x \rightarrow 1+0} 2^{\frac{1}{x-1}} = \left. \begin{array}{l} x \rightarrow 1+0 (x > 1) \\ x-1 \rightarrow +0 \\ \frac{1}{x-1} \rightarrow +\infty \\ 2^{+\infty} \rightarrow +\infty \end{array} \right\} = +\infty.$$

Отже, $x = 1$ — точка розриву 2-го роду, бо одна з односторонніх границь не існує. Граничні точки графіка функції: $P_1(1-0; +0)$, $P_2(1+0; +\infty)$. Графік функції $y = 2^{\frac{1}{x-1}}$ поблизу точки розриву показано на рис. 5. Зауважимо, що гранична точка $P_2(1+0; +\infty)$ лежить на нескінченності.

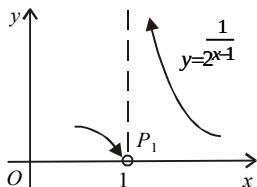


Рис. 5

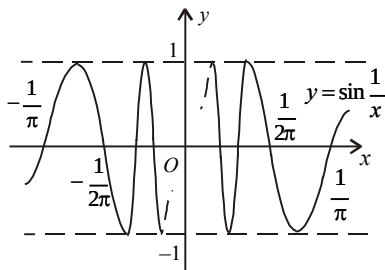


Рис. 6

Приклад. Дослідити на неперервність функцію $y = \sin \frac{1}{x}$.

● Ця функція буде неперервною на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$, бо є суперпозицією неперервних елементарних функцій.

Границі $\lim_{x \rightarrow -0} \sin \frac{1}{x}$ і $\lim_{x \rightarrow +0} \sin \frac{1}{x}$ — не існують. Отже, точка $x = 0$ — точка розриву функції 2-го роду.

Записати координати граничних точок графіка функції неможливо, тому і побудувати графік функції $y = \sin \frac{1}{x}$ поблизу самої точки розриву не можна (рис. 6).

Приклад. Дослідити на неперервність функцію $y = \arctg \frac{1}{x^2}$.

● Скорочений запис розв'язування задачі:

$$D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty).$$

$x \in (-\infty; 0)$
 $x \in (0; +\infty)$ y — неперервна, як суперпозиція елементарних функцій.

$x = 0$ — с.г.т. $D(y)$.

$$\lim_{x \rightarrow -0} y = \lim_{x \rightarrow -0} \arctg \frac{1}{x^2} = \left| \begin{array}{l} x \rightarrow -0 \\ x^2 \rightarrow +0 \\ \frac{1}{x^2} \rightarrow +\infty \end{array} \right| = \frac{\pi}{2} - 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} y = \lim_{x \rightarrow +0} \arctg \frac{1}{x^2} = \left| \begin{array}{l} x \rightarrow +0 \\ x^2 \rightarrow +0 \\ \frac{1}{x^2} \rightarrow +\infty \end{array} \right| = \frac{\pi}{2} - 0.$$

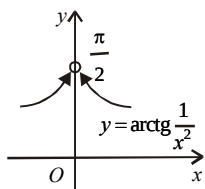


Рис. 7

Таким чином, точка $x = 0$ є точкою розриву функції 1-го роду (розрив усувний), бо односторонні границі існують і рівні між собою (сама функція при $x = 0$ не існує).

Граничні точки графіка функції $P_1(-0; \frac{\pi}{2} - 0)$ і $P_2(+0; \frac{\pi}{2} - 0)$ зливаються в одну точку (рис. 7).

Приклад. Дослідити на неперервність функцію $y = x - \frac{x+2}{|x+2|}$.

● Після розкриття $|x+2|$ функція переписється так:

$$y = \begin{cases} x - \frac{x+2}{x+2} & \text{при } x > -2; \\ x + \frac{x+2}{x+2} & \text{при } x < -2 \end{cases} = \begin{cases} x-1 & \text{при } x > -2; \\ x+1 & \text{при } x < -2. \end{cases}$$

На кожному з інтервалів $(-\infty; -2)$ і $(-2; +\infty)$ функція неперервна. Розглянемо односторонні границі функції у точці $x = -2$.

$$\lim_{x \rightarrow -2-0} y = \left| \begin{array}{l} (x \rightarrow -2-0) \Rightarrow \\ \Rightarrow (x < -2) \Rightarrow \\ \Rightarrow y = x+1 \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow -2-0} (x+1) = -1 - 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow -2+0} y = \left| \begin{array}{l} (x \rightarrow -2+0) \Rightarrow \\ \Rightarrow (x > -2) \Rightarrow \\ \Rightarrow y = x - 1 \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow -2+0} (x - 1) = -3 + 0.$$

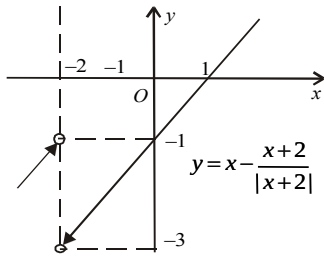


Рис. 8

Отже, точка $x = -2$ — точка розриву 1-го роду (розрив неусувний), бо односторонні границі функції у цій точці існують, але не рівні між собою.

Граничні точки графіка функції такі: $P_1(-2-0; -1-0)$, $P_2(-2+0; -3+0)$ (рис. 8).