Самостійна робота 20

Тема: Методика дослідження функції на неперервність.
Мета: Закріпити на практиці методику дослідження функції на неперервність.

Термінологічний словник ключових понять

Функція неперервна в точці, якщо в цій точці нескінченно малому приросту аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції. Функція є *неперервною на проміжку*, якщо вона неперервна в кожній точці цього проміжку.

Точка розриву функції — це точка $x = x_0$, в якій порушується хоча б одна з умов рівності $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x)$.

Точка розриву 1-го роду — а) *Точка $x = x_0$ називається точкою розриву 1-го роду* (розрив неусувний) для функції $y = f(x)$, якщо односторонні границі (зліва і справа) функції у цій точці існують, але не рівні між собою, тобто

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq \lim_{x \to x_0 + 0} f(x).$$

б) *Точка $x = x_0$ називається точкою розриву 1-го роду* (розрив усувний) для функції $y = f(x)$, якщо односторонні границі функції у цій точці існують, рівні між собою, але не дорівнюють значенню функції у цій точці, або функція у цій точці не існує, тобто

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) \neq f(x_0).$$

Точка розриву 2-го роду — точка $x = x_0$ називається точкою розриву 2-го роду для функції $y = f(x)$, якщо в цій точці не існує хоча б одна з односторонніх границь (зліва чи справа).

Методика дослідження функції на неперервність

1. Знайти область визначення функції $D(y)$.

2. Дослідити функцію на неперервність у відкритих проміжках $D(y)$.

3. Визначити скінченні граничні точки (с.г.т.) $D(y)$ і обчислити односторонні границі функції у цих точках.

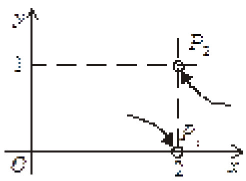


Рис. 1

4. Зробити висновок про характер точок розриву (якщо вони є) і побудувати графік функції поблизу цих точок. Для зручності побудови графіка функції рекомендується записати координати граничних точок графіка функції $P_1(x_0 \pm 0;\ y_0 \pm 0)$ Символічний запис абсциси граничної точки $x_0 \pm 0$ означає, що абсциса довільної точки графіка функції прямує до x_0 зліва ($x_0 - 0$) або справа ($x_0 + 0$); а запис $y_0 \pm 0$ означає, що ордината довільної точки графіка функції при цьому прямує до y_0 знизу ($y_0 - 0$) або зверху ($y_0 + 0$). Наприклад, для граничних точок $P_1(2-0;\ +0)$ і $P_2(2+0;\ 1-0)$ графік функції підходить до цих точок так, як показано на рис. 1.

До точки P_1 графік підходить зліва і зверху, а до точки P_2 — справа і знизу.

Приклад. Дослідити на неперервність функцію $y = 2^{\frac{1}{x-1}}$.

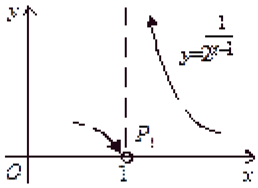
l Область визначення цієї функції $D = (-\infty;1) \cup (1;+\infty)$. На кожному з інтервалів області визначення функція буде неперервна, як суперпозиція неперервних елементарних функцій. Скінченною граничною точкою D функції буде $x = 1$. Обчислимо такі границі:

$$\lim_{x \to 1-0} y = \lim_{x \to 1-0} 2^{\frac{1}{x-1}} = \left| \begin{array}{l} x \to 1-0 \,(x<1) \\ x-1 \to -0 \\ \dfrac{1}{x-1} \to -\infty \\ 2^{-\infty} \to \dfrac{1}{2^{+\infty}} \to +0 \end{array} \right| = +0;$$

$$\lim_{x \to 1+0} y = \lim_{x \to 1+0} 2^{\frac{1}{x-1}} = \left| \begin{array}{l} x \to 1+0 \,(x>1) \\ x-1 \to +0 \\ \dfrac{1}{x-1} \to +\infty \\ 2^{\frac{1}{x-1}} \to +\infty \end{array} \right| = +\infty.$$

Отже, $x = 1$ — точка розриву 2-го роду, бо одна з односторонніх границь не існує. Граничні точки графіка функції: P_1 (1 – 0; + 0), P_2(1 + 0; + ¥).

Графік функції $y = 2^{\frac{1}{x-1}}$ поблизу точки розриву показано на рис. 5. Зауважимо, що гранична точка $P_2\,(1 + 0;\ + ¥)$ лежить на нескінченності.



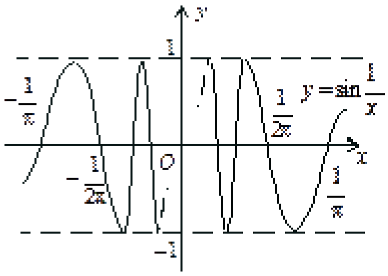


Рис. 5 Рис. 6

Приклад. Дослідити на неперервність функцію $y = \sin\frac{1}{x}$.

l Ця функція буде неперервною на кожному з проміжків (–¥; 0) і (0; + ¥), бо є суперпозицією неперервних елементарних функцій.

Границі $\lim\limits_{x\to -0}\sin\frac{1}{x}$ і $\lim\limits_{x\to +0}\sin\frac{1}{x}$ — не існують. Отже, точка $x = 0$ — точка розриву функції 2-го роду.

Записати координати граничних точок графіка функції неможливо, тому і побудувати графік функції $y = \sin\frac{1}{x}$ поблизу самої точки розриву не можна (рис. 6).

Приклад. Дослідити на неперервність функцію $y = \operatorname{arctg}\frac{1}{x^2}$.

l Скорочений запис розв’язування задачі:

$D(y) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty).$

$\left.\begin{matrix} x \in (-\infty;\ 0) \\ x \in (0;\ +\infty) \end{matrix}\right\} y$ — неперервна, як суперпозиція елементарних функцій.

$x = 0$ — с.г.т. $D(y)$.

$$\lim_{x\to -0} y = \lim_{x\to -0} \operatorname{arctg}\frac{1}{x^2} = \left| \begin{matrix} x \to -0 \\ x^2 \to +0 \\ \frac{1}{x^2} \to +\infty \end{matrix} \right| = \frac{\pi}{2} - 0;$$

$$\lim_{x\to -0} y = \lim_{x\to -0} \operatorname{arctg}\frac{1}{x^2} = \left| \begin{matrix} x \to -0 \\ x^2 \to +0 \\ \frac{1}{x^2} \to +\infty \end{matrix} \right| = \frac{\pi}{2} - 0.$$

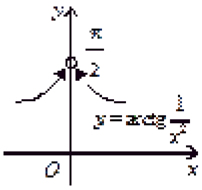


Рис. 7

Таким чином, точка $x = 0$ є точкою розриву функції 1-го роду (розрив усувний), бо односторонні границі існують і рівні між собою (сама функція при $x = 0$ не існує).

Граничні точки графіка функції $P_1\left(-0;\ \frac{\pi}{2} - 0\right)$ і $P_2\left(+0;\ \frac{\pi}{2} - 0\right)$ зливаються в одну точку (рис. 7).

Приклад. Дослідити на неперервність функцію $y = x - \frac{x+2}{|x+2|}$.

l Після розкриття $|x+2|$ функція перепишеться так:

$$y = \begin{cases} x - \frac{x+2}{x+2} \text{ при } x > -2; \\ x + \frac{x+2}{x+2} \text{ при } x < -2 \end{cases} = \begin{cases} x - 1 \text{ при } x > -2; \\ x + 1 \text{ при } x < -2. \end{cases}$$

На кожному з інтервалів $(-\infty; -2)$ і $(-2; +\infty)$ функція неперервна. Розглянемо односторонні границі функції у точці $x = -2$.

$$\lim_{x\to -2-0} y = \left| \begin{matrix} (x \to -2-0) \Rightarrow \\ \Rightarrow (x < -2) \Rightarrow \\ \Rightarrow y = x + 1 \end{matrix} \right| = \lim_{x\to -2-0} (x+1) = -1 - 0;$$

$$\lim_{x\to -2-0} y = \left| \begin{matrix} (x \to -2+0) \Rightarrow \\ \Rightarrow (x > -2) \Rightarrow \\ \Rightarrow y = x - 1 \end{matrix} \right| = \lim_{x\to -2+0} (x-1) = -3 + 0.$$

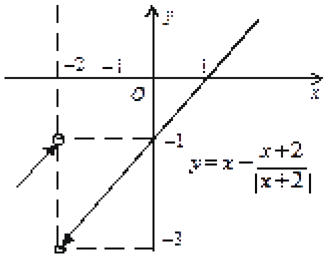


Рис. 8

Отже, точка $x = -2$ — точка розриву 1-го роду (розрив неусувний), бо односторонні границі функції у цій точці існують, але не рівні між собою.

Граничні точки графіка функції такі: $P_1(-2-0;\ -1-0)$, $P_2(-2+0;\ -3+0)$ (рис. 8).

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}\right)=[\infty-\infty]=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1+x-2}{1-x^2}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{1-x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}-\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{x+1}=-\frac{1}{2}.$$

Вправи для самостійної роботи

Дослідіть функцію $f(x)$ на неперервність. В точках розриву знайдіть лівосторонню і правосторонню границі функції. Визначте характер точок розриву. Зробіть схематичний рисунок в околі точок розриву.

1. $f(x)=\dfrac{2x^2-x-1}{3x^2-x-2}$; **2.** $f(x)=\dfrac{3}{2+5^{\frac{1}{x-2}}}$.

3. $f(x)=7^{\frac{2}{x+3}}$. **4.** $f(x)=2^{\frac{3}{x-7}}$

5. $f(x)=\dfrac{6}{3+2^{\frac{1}{x+4}}}$. **6.** $f(x)=(x+1)\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$