Практична робота 1-2

<u>Тема:</u> Знаходження похідних функцій за означенням. Техніка диференціювання.

<u>Мета:</u> Навчитись знаходити похідну функції за означенням. Вміти знаходити похідну функції користуючись правилами диференціювання та таблицею похідних.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на деякому проміжку $(a;\ b)$. Візьмемо значення $x \in (a;b)$ і надамо аргументу приросту Δx. Тоді функція набуде приросту $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$. Розглянемо відношення приросту функції Δy до приросту аргументу Δx і перейдемо до границі при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Якщо границя (1) існує і скінченна, вона називається *похідною функції* $y = f(x)$ *за змінною* x і позначається

$$y',\ \ y'_x,\ \ \frac{dy}{dx},\ \ f'(x),\ \ \frac{df(x)}{dx}.$$

Означення. Похідною функції $y = f(x)$ *за аргументом* x називається границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля.

Операція знаходження похідної називається *диференціюванням* цієї функції.

Якщо похідна даної функції знаходиться згідно з означенням, тобто за формулою (1) шляхом послідовного визначення $\Delta y, \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ і $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, то такий спосіб знаходження похідної називається ***безпосереднім диференціюванням.***

1. **Приклад.** Користуючись означенням похідної, знайти похідну функції $y = 2x^3 + 5x^2 - 7x - 4$.

● Надамо x приросту Δx, тоді y набуде приросту Δy:

$$\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x) = \left(2(x+\Delta x)^3 + 5(x+\Delta x)^2 - 7(x+\Delta x) - 4\right) -$$
$$-\left(2x^3 + 5x^2 - 7x - 4\right) = 6x^2\Delta x + 6x\Delta x^2 + 2\Delta x^3 + 10x\Delta x + 5\Delta x^2 - 7\Delta x.$$

За означенням похідної маємо:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(6x^2 + 6x\Delta x + 2\Delta x^2 + 10x + 5\Delta x - 7\right) = 6x^2 + 10x - 7.$$

2. **Приклад.** Користуючись означенням похідної, знайти похідну функції $y = -\operatorname{ctg} x - x$.

● Використовуючи формулу $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = \dfrac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin\alpha \sin\beta}$, знаходимо приріст функції:

$$\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x) = -\operatorname{ctg}(x+\Delta x) - (x+\Delta x) + \operatorname{ctg} x + x =$$
$$= \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg}(x+\Delta x) - \Delta x = \frac{\sin\Delta x}{\sin x \sin(x+\Delta x)} - \Delta x.$$

Звідки

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\dfrac{\sin \Delta x}{\Delta x}}{\sin x \cdot \sin(x + \Delta x)} - 1 \right) = \frac{1}{\sin^2 x} - 1.$$

3. **Приклад.** Користуючись способом безпосереднього диференціювання, знайти похідну функції $y = x^2$. Обчислити $y'(5)$.

● При значенні аргументу, що дорівнює x, маємо $f(x) = x^2$. При значенні аргументу, що дорівнює $x + \Delta x$, маємо $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2$. Знаходимо приріст функції:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 =$$
$$= x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Складаємо відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$

Знаходимо границю відношення $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0,$ а саме

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = \left| \begin{array}{c} \text{границя залежить від } \Delta x \\ \text{і не залежить від } x \end{array} \right| = 2x. \text{ Отже } y' = 2x.$$

Якщо взяти $x = 5$, то похідна $y'(5) = 2 \cdot 5 = 10.$

4. **Приклад.** Виходячи з означення похідної, знайти похідну функції $y = \sqrt{x}.$

●Знаходимо приріст функції

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}.$$

Складаємо відношення $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$. Таким чином,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}\right)}{\Delta x\left(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}\right)} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x\left(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

5. Приклад. $y = e^x$.

● Для цієї функції маємо

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{x+\Delta x}-e^{x}}{\Delta x} = e^{x}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x} = e^{x}\cdot 1 = e^{x},$$

тобто $\left(e^{x}\right)' = e^{x}$.

6. Приклад. Який кут утворює з віссю Ox дотична до кривої $y=\frac{2}{3}x^{5}-\frac{1}{9}x^{3}$, проведена в точці з абсцисою $x = 1$?

● Знаходимо похідну $y'=\frac{10}{3}x^{4}-\frac{1}{3}x^{2}$; при $x = 1$, $y'=3$, таким чином $\operatorname{tg}\alpha=3$, звідки $\alpha=\operatorname{arctg}3\approx 71^{\circ}34'$.

Застосовуючи формули та правила диференціювання, знайти похідні таких функцій:

7. Приклад. $y=x\sqrt{x}(3\ln x-2)$.

● $y'=\left(x^{\frac{3}{2}}(3\ln x-2)\right)'=x^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{3}{x}+\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}(3\ln x-2)=$

$=3x^{\frac{1}{2}}+\frac{9}{2}x^{\frac{1}{2}}\cdot\ln x-3x^{\frac{1}{2}}=\frac{9}{2}\sqrt{x}\ln x.$

8. Приклад. $y=\sin(2x+3)$.

● $y'=\cos(2x+3)\cdot(2x+3)'=2\cos(2x+3)$.

9. Приклад. $y=\ln\left(x+\sqrt{x^{2}+1}\right)$.

● $y'=\frac{1}{x+\sqrt{x^{2}+1}}\cdot\left(x+\sqrt{x^{2}+1}\right)'=$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^{2}+1}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^{2}+1}}\right)=\frac{1}{x+\sqrt{x^{2}+1}}\cdot\frac{\sqrt{x^{2}+1}+x}{\sqrt{x^{2}+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^{2}+1}}.$$

10. Приклад. $y=\frac{1}{2}\operatorname{tg}^{2}\sqrt{x}+\ln\cos\sqrt{x}$.

● $y'=\operatorname{tg}\sqrt{x}\,\frac{1}{\cos^{2}\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{\cos\sqrt{x}}\left(-\sin\sqrt{x}\right)\frac{1}{2\sqrt{x}}=$

$=\frac{1}{2\sqrt{x}}\operatorname{tg}\sqrt{x}\left(\frac{1}{\cos^{2}\sqrt{x}}-1\right)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\operatorname{tg}^{3}\sqrt{x}.$

11. Приклад. $y=x^{x^{2}}$.

● Логарифмуючи функцію, дістаємо $\ln y=x^{2}\ln x$.

Звідки: $(\ln y)'=\frac{1}{y}\cdot y'$,

$$\frac{y'}{y}=x^{2}\cdot\frac{1}{x}+2x\ln x,\quad \frac{y'}{y}=x(1+2\ln x),$$

$$y'=xy(1+2\ln x)=xx^{x^{2}}(1+2\ln x)=x^{x^{2}+1}(1+2\ln x).$$

12. Приклад. $y=(\sin x)^{\operatorname{tg}x}$.

● Маємо: $\ln y=\operatorname{tg}x\ln\sin x,\quad \frac{y'}{y}=\operatorname{tg}x\frac{1}{\sin x}\cos x+$

$$+\frac{1}{\cos^{2}x}\ln\sin x=1+\frac{1}{\cos^{2}x}\ln\sin x,$$

$$y' = y\left(1 + \frac{1}{\cos^2 x}\ln\sin x\right) = (\sin x)^{\mathrm{tg}x}\left(1 + \frac{1}{\cos^2 x}\ln\sin x\right).$$

Завдання для перевірки знань

Використовуючи означення похідної, знайти похідні функцій:

1. $y = \frac{1}{x^2}$. *Відповідь.* $y' = -\frac{2}{x^3}$.

2. $y = \sqrt[3]{x^2}$. *Відповідь.* $y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$.

3. $y = 5\sin x + 3\cos x$. *Відповідь.* $y' = 5\cos x - 3\sin x$.

4. $y = 5(\mathrm{tg}x - x)$. *Відповідь.* $y' = 5\mathrm{tg}^2 x$.

5. $y = \frac{1}{e^x + 1}$. *Відповідь.* $y' = -\frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$.

6. $y = 2^{x^2}$. *Відповідь.* $y' = 2^{x^2} \cdot 2x \cdot \ln 2$.

Застосовуючи формули та правила диференціювання, знайти похідні таких функцій:

7. $y = \frac{2}{7}x^3\sqrt{x} - \frac{4}{11}x^5\sqrt{x} + \frac{2}{15}x^7\sqrt{x}$. *Відповідь.* $y' = x^2\sqrt{x}(1 - x^2)^2$.

8. $y = 3x^3 \cdot \ln x - x^3$. *Відповідь.* $y' = 9x^2 \cdot \ln x$.

9. $y = 2^{3x}/3^{2x}$. *Відповідь.* $y' = \left(\frac{8}{9}\right)^x \cdot \ln\frac{8}{9}$.

10. $y = x\arccos\frac{x}{2} - \sqrt{4 - x^2}$. *Відповідь.* $y' = \arccos\frac{x}{2}$.

11. $y = \ln\sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}$. *Відповідь.* $y' = \frac{1}{\cos x}$.

12. $y = \ln\left(3x^2 + \sqrt{9x^4 + 1}\right)$. *Відповідь.* $y' = \frac{6x}{\sqrt{9x^4 + 1}}$.

13. $y = \frac{1}{2}\mathrm{tg}^2(\sin x) + \ln\cos(\sin x)$. *Відповідь.* $y' = \mathrm{tg}^3(\sin x) \cdot \cos x$.

14. $y = \ln\frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x + 1}$. *Відповідь.* $y' = \frac{1}{x(x + 1)(x + 2)}$.

15. $y = 2x \cdot \mathrm{tg}2x + \ln\cos 2x - 2x^2$. *Відповідь.* $y' = 4x \cdot \mathrm{tg}^2 2x$.

16. $y = \mathrm{arctg}\frac{3x - x^2}{1 - 3x^2}$. *Відповідь.* $y' = \frac{3}{1 + x^2}$.

17. $y = e^x\sqrt{1 - e^{2x}} - \arcsin e^x$. *Відповідь.* $y' = -\frac{2e^{3x}}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$.

18. $y = e^x \cdot 2^{5x}/3^{4x}$. *Відповідь.* $y' = \frac{e^x \cdot 2^{5x}}{3^{4x}} \cdot \ln\frac{32e}{81}$.

19. $y=\frac{x+1}{x}-e^{-\ln\frac{x}{x+1}}$. *Відповідь.* $y'=0$.

20. $y=\frac{x^2\cdot e^{x^2}}{x^2+1}$. *Відповідь.* $y'=2e^{x^2}\cdot x\cdot\frac{x^4+x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2}$.

21. $y=\frac{1}{4a}\ln\frac{x-a}{x+a}+\frac{1}{2a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$. *Відповідь.* $y'=\frac{x^2}{x^4-a^4}$.

22. $y=\log_{x^2}2$. *Відповідь.* $y'=-\frac{\ln 2}{2x\ln^2 x}$.

23. $y=x^{\arcsin x}$.

Відповідь. $y'=x^{\arcsin x}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{\arcsin x}{x}\right)$.

24. $y=\frac{x^x}{e^x}(x\ln x-x-1)$.

Відповідь. $y'=x(\ln x-1)\cdot\frac{x^x}{e^x}\ln x$.

25. $y=\log_{\cos x}\sin x$.

Відповідь. $y'=\frac{\operatorname{ctg}x\cdot\ln\cos x+\operatorname{tg}x\cdot\ln\sin x}{\ln^2\cos x}$.

26. $y=\ln\left(e^x\cos x+e^{-x}\sin x\right)$.

Відповідь. $\frac{(\cos x-\sin x)\left(e^x+e^{-x}\right)}{e^x\cos x+e^{-x}\sin x}$.

27. $y=e^x\sin x\cos^3 x$.

Відповідь. $e^x\sin x\cos^3 x(1+\operatorname{ctg}x-3\operatorname{tg}x)$.

28. $y=\frac{1}{\sqrt{x}}e^{x^2-\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\ln x+1}$.

Відповідь. $\left(2x-\frac{1}{1+x^2}\right)\frac{e^{x^2-\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\ln x+1}}{\sqrt{x}}$.

29. $y=\frac{\sin x}{4\cos^4 x}+\frac{3\sin x}{8\cos^2 x}+\frac{3}{8}\ln\frac{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$.

Відповідь. $\frac{1}{\cos^5 x}$.

30. $y=\sin^2 3x\cdot f\left(\cos^3 u\right)$, де $f(x)=2^x$, $u=7x$.

Відповідь. $2^{\cos^3 7x}\left(3\sin 6x-\frac{21}{2}\ln 2\sin^2 3x\cos 7x\sin 14x\right)$.

31. $y=\cos\sqrt{x}\cdot f\left(u^{-1}\right)$, де $f(x)=x^2$, $u=7x$.

Відповідь. $-\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}\operatorname{tg}7x+14\cos\sqrt{x}\cos^{-2}7x\right)/\operatorname{tg}^3 7x$.

32. $y=(\operatorname{tg}2x)^{\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}$.

Відповідь. $(\mathrm{tg}\,2x)^{\mathrm{ctg}\frac{x}{2}}\left(\frac{4\,\mathrm{ctg}\frac{x}{2}}{\sin 4x}-\frac{\ln \mathrm{tg}\,2x}{2\sin^2\frac{x}{2}}\right)$.