ЛЕКЦІЯ №2
Рівняння дотичної і нормалі до плоскої кривої кривої. Диференціювання неявних і параметрично заданих функцій. Диференціал функції та його застосування.

1. Рівняння дотичної і нормалі до плоскої кривої

Нехай функція $y = f(t)$ означена і неперервна на деякому проміжку $[a; b]$. Визначимо рівняння дотичної й нормалі до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою $x_0 \in [a;b]$.

Оскільки дотична й нормаль проходять через точку з абсцисою x_0, то рівняння кожної з них будемо шукати у вигляді рівняння прямої, що проходить через задану точку M_0 $(x_0; y_0)$ у даному напрямі (рис. 1):

$$y - y_0 = k(x - x_0), \qquad (1)$$

де k кутовий коефіцієнт дотичної. Використовуючи геометричний зміст похідної, маємо $k = f'(x_0)$.

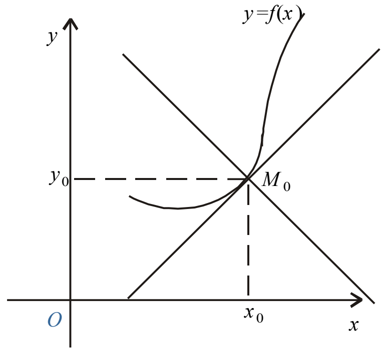

Рис. 1

Рівняння дотичної. Оскільки $y_0 = f(x_0)$, то з виразу (1) дістанемо рівняння дотичної у вигляді

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). \qquad (2)$$

Рівняння нормалі. *Означення. Нормаллю* до графіка функції в точці M_0 називається перпендикуляр, проведений до дотичної в цій точці (рис. 1).

Використовуючи умову перпендикулярності дотичної та нормалі, знаходимо кутовий коефіцієнт нормалі $k = -\dfrac{1}{f'(x_0)}$ і записуємо її рівняння у вигляді

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \qquad (3)$$

Приклад. Знайти рівняння дотичної та нормалі до графіка функції $y = x^2$ у точці з абсцисою $x_0 = -3$.

● Знайдемо похідну від заданої функції $f'(x) = 2x$, звідси $f'(-3) = -6;\ f(-3) = (-3)^2 = 9$.

Рівняння дотичної (2) і нормалі (3) запишуться так: $y - 9 = -6(x+3),\ y - 9 = \frac{1}{6}(x+3)$ або у загальному вигляді: $6x+y+9=0$, $x - 6y + 57 = 0$.

2. Диференціювання неявних і параметрично заданих функцій

Похідна неявної функції. Нехай рівняння $F(x; y) = 0$ визначає y як неявну функцію від x. Надалі будем вважати, що ця функція — диференційовна.

Продиференціювавши за x обидві частини рівняння $F(x; y) = 0$, дістанемо рівняння першого степеня відносно y'. З цього рівняння легко знайти y', тобто похідну неявної функції.

Приклад. Знайти y'_x з рівняння $x^2 + y^2 = 4$.

● Оскільки y є функцією від x, то y^2 розглядатимемо як складну функцію від x, тобто $(y^2)' = 2y \cdot y'$.

Продиференціювавши по x обидві частини заданого рівняння, дістанемо $2x + 2yy' = 0$. Звідси $y' = -\frac{x}{y}$.

Похідна оберненої функції. Нехай задані дві взаємно обернені диференційовні функції

$$y = f(x) \text{ та } x = \varphi(y)\,(f(\varphi(y)) = y).$$

Теорема 1. **Похідна x'_y оберненої функції $x = \varphi(y)$ по змінній y дорівнює оберненій величині похідної y'_x від прямої функції $y = f(x)$: $x'_y = \frac{1}{y'_x}$.**

Приклад. Обчислити похідну для функції $x = \arcsin y$.

● Задана функція обернена до функції $y = \sin x$.

Згідно з теоремою 7 можна записати

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{(\sin x)'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Звідси $(\arcsin y)' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.

Якщо в останньому виразі замість y записати x, то дістанемо

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Похідна параметрично заданої функції. Нехай функцію y від x задано параметричними рівняннями:

$$\left.\begin{array}{l} x=\varphi(t) \\ y=\Psi(t) \end{array}\right\}\left(t_1 \le t \le t_2\right).$$

Припустимо, що функції $\varphi(t), \Psi(t)$ мають похідні і що функція $x=\varphi(t)$ має обернену функцію $t=\Phi(x)$, яка також є диференційовною. Тоді визначену параметричними рівняннями функціональну залежність $y=f(x)$ можна розглядати як складну функцію $y=\Psi(t)$, $t=\Phi(x)$ (t — проміжний аргумент).

На підставі теорем про диференціювання складеної та оберненої функцій маємо:

$$y'_x=y'_t\cdot t'_x=\Psi'_t(t)\Phi'_x(x)\,,\;\; \Phi'_x(x)=\frac{1}{\varphi'_t(t)}.$$

Звідки $y'_x=\dfrac{\Psi'(t)}{\varphi'(t)}$ або $y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}$.

Знайдена формула дає можливість знаходити похідну y'_x від параметрично заданої функції, не знаходячи явної залежності $y=f(x)$.

Приклад. Функцію y від x задано параметричними рівняннями:

$$\left.\begin{array}{l} x=a\cos t \\ y=a\sin t \end{array}\right\}\left(0\le t\le \pi\right).$$

Знайти похідну $\dfrac{dy}{dx}$: а) при будь-якому t; б) при $t=\dfrac{\pi}{4}$.

● а) $y'_x=\dfrac{(a\sin t)'}{(a\cos t)'}=\dfrac{a\cos t}{-a\sin t}=-\operatorname{ctg} t$;

б) $\left(y'_x\right)\Big|_{t=\frac{\pi}{4}}=-\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-1.$

Приклад. $y=(\operatorname{tg}3x)^{\sin 4x}$.

● Задана функція є степенево-показниковим виразом виду

$$y=(u(x))^{v(x)},\text{ де } u(x)=\operatorname{tg}3x, v(x)=\sin 4x. \qquad (4)$$

Прологарифмуємо функцію (4.5) за основою *e*:

$$\ln y=v\ln u. \qquad (5)$$

Оскільки $\ln y$ і $\ln u$ — складні функції, після диференціювання обох частин рівності (5) дістанемо:

$$\frac{1}{y}y'=v'\ln u+\frac{1}{u}u'v.$$

Звідси $y'=y\left(v'\ln u+\dfrac{u'}{u}v\right)=u^v\left(v'\ln u+\dfrac{u'}{u}v\right)$.

Таким чином, дістали формулу для знаходження похідної від степенево-показникової функції виду (4).

$$y'=u^v\left(v'\ln u+\frac{u'}{u}v\right). \qquad (6)$$

У даному випадку формула (6) виглядає як

$$y' = (\mathrm{tg}3x)^{\sin 4x} \cdot \left(4\cos 4x \cdot \ln \mathrm{tg}3x + \frac{3\sin 4x}{\mathrm{tg}3x \cdot \cos^2 3x}\right).$$

3. Похідні вищих порядків

Похідна $y' = f'(x)$ від функції $y = f(x)$ називається *похідною першого порядку* і являє собою деяку нову функцію. Можливі випадки, коли ця функція сама має похідну. Тоді похідна від похідної першого порядку $(y')'$ називається похідною *другого порядку від функції* $y = f(x)$ і позначається y'', $f''(x)$, $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Похідна від похідної другого порядку $(y'')'$ називається *похідною третього порядку* і позначається y''', $f'''(x)$, $\frac{d^3x}{dx^3}$.

Похідна від похідної (n – 1)-го порядку $\left(y^{(n-1)}\right)'$ називається *похідною n-го порядку* і позначається $y^{(n)}, f^{(n)}(x)$, $\frac{d^ny}{dx^n}$.

Таким чином, $y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$, $n = 1, 2, \ldots$

Приклад. Знайти похідну третього порядку для функції $y = \sin(5x+4)$.

● $y' = 5\cos(5x+4)$; $y'' = -25\sin(5x+4)$; $y''' = -125\cos(5x+4)$.

4. Означення диференціала функції

Нехай функція $y = f(x)$ диференційовна на деякому проміжку, тобто для будь-якої точки x з цього проміжку границя $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$ існує і дорівнює скінченному числу.

Враховуючи взаємозв’язок змінної величини, що має скінченну границю, і нескінченної малої величини, можемо записати $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, де α — нескінченно мала величина ($\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$).

Помноживши всі члени останньої рівності на Δx, дістанемо

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x. \qquad (7)$$

З виразу (4.8) випливає, що приріст функції Δy складається із суми двох доданків, з яких перший доданок — так звана *головна частина приросту*, лінійна відносно Δx (при $\Delta x \to 0$ добуток $f'(x)\Delta x$ є нескінченно мала величина першого порядку відносно Δx). Другий доданок — добуток $\alpha\Delta x$ завжди нескінченно мала величина вищого порядку, ніж Δx.

Означення. Добуток $f'(x)\Delta x$ називається *диференціалом функції* $y = f(x)$; його позначають символом dy, тобто

$$dy = f'(x)\Delta x \qquad (8)$$

Знайдемо диференціал функції $y = x$; для цього випадку $y' = (x)' = 1$, отже, $dy = dx = \Delta x$. Таким чином, диференціал незалежної змінної збігається з її приростом Δx. З огляду на це формулу для диференціала (8) можна записати так:

$$dy = f'(x)dx. \qquad (9)$$

Приклад. Знайти диференціал *dy* функції $y = x^2$: 1) при довільних значеннях *x* та Δx; 2) при *x* = 20, Δx = 0,1.

● 1) $dy = (x^2)' \Delta x = 2x\Delta x$;

2) якщо *x* = 20, Δx = 0,1, то $dy = 2 \cdot 20 \cdot 0{,}1 = 4$.

Приклад. Знайти диференціал *dy* функції $y = x^2 \mathrm{tg}(3x+1)$.

● Оскільки $y' = 2x\mathrm{tg}(3x+1) + \dfrac{3x^2}{\cos^2(3x+1)}$, то за формулою (9) дістанемо

$$dy = \left(2x\mathrm{tg}(3x+1) + \frac{3x^2}{\cos^2(3x+1)}\right)dx.$$

5. Застосування деференціала в наближених обчисленнях

Вираз (7) з урахуванням (8) можна записати так:

$$\Delta y = dy + \alpha\Delta x. \qquad (10)$$

Якщо $f'(x) \neq 0$, то величина $\alpha\Delta x$ є малою вищого порядку порівняно з *dy*.

При малих Δx доданком $\alpha\Delta x$ у виразі (10) нехтують і користуються наближеною рівністю $\Delta y \approx dy$, або в розгорнутому вигляді: $f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$, звідки

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x. \qquad (11)$$

Остання наближена рівність тим точніша, чим менше Δx.

Приклад. Обчислити наближено $\sqrt{27}$.

Перетворимо вираз, що стоїть під знаком радикала:

$27 = 25 + 2 = 25\left(1 + \dfrac{2}{25}\right)$, звідки $\sqrt{27} = \sqrt{25\left(1+\dfrac{2}{25}\right)} = 5\sqrt{1+\dfrac{2}{25}}$. (12)

При обчисленні $\sqrt{1+\dfrac{2}{25}}$ введемо функцію $f(x) = \sqrt{x}$, тоді $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Формула (11) у нашому випадку запишеться так:

$$\sqrt{x+\Delta x} \approx \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\Delta x, \text{ де } x = 1, \Delta x = \frac{2}{25}.$$

Інакше

$$\sqrt{1+\frac{2}{25}} \approx \sqrt{1} + \frac{1}{2\sqrt{1}}\,\frac{2}{25} = 1 + \frac{1}{25} = 1{,}04. \qquad (13)$$

Підставивши (13) у рівність (12), дістанемо

$$\sqrt{27} \approx 5 \cdot 1{,}04 = 5{,}2.$$

6. Правила знаходження диференціала

Застосовуючи формулу (9) та властивості похідних, дістаємо правила знаходження диференціала:

1. $y = c$; $dy = 0$;
2. $y = uv,\ dy = udv + vdu$;
3. $y = u + v,\ \ dy = du + dv$;
4. $y = \frac{u}{v},\ dy = \frac{vdu - udv}{v^2}$.

Теорема. **Форма диференціала не залежить від того, чи є аргумент незалежною змінною або функцією.**