

## Практична робота 3-4

**Тема:** Диференціювання неявних і параметрично заданих функцій.

**Мета:** Навчитись диференціювати неявні і параметрично задані функції.

1. **Приклад.** Знайти похідну  $y'_x$  з рівняння  $x^3 + \ln y - x^2 e^y = 0$ .

● Продиференціювавши за  $x$  обидві частини рівняння, дістанемо  $3x^2 + \frac{y'}{y} - x^2 e^y \cdot y' - 2x e^y = 0$ .

$$\text{Звідки } y' = \frac{(2x y e^y - 3x^2)y}{1 - x^2 y e^y}.$$

2. **Приклад.** Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої  $x^2 + 2xy^2 + 3y^4 = 6$  у точці  $M_0(1, -1)$ .

● З рівняння кривої знайдемо похідну:

$$2x + 2y^2 + 4xyy' + 12y^3 y' = 0, \text{ тобто } y' = -\frac{x^2 + y^2}{2xy + 6y^3}.$$

$$\text{Таким чином, } y'(1) = f'(1) = -\frac{1 + (-1)^2}{2 \cdot 1 \cdot (-1) + 6(-1)^3} = \frac{1}{4}.$$

Рівняння дотичної буде

$$y + 1 = \frac{1}{4}(x - 1), \text{ або } x - 4y - 5 = 0.$$

Рівняння нормалі

$$y + 1 = -4(x - 1), \text{ або } 4x + y - 3 = 0.$$

3. **Приклад.** Задано функцію  $y = x^5 + 2x^4 - 3x^3 - x^2 - \frac{1}{2}x + 7$ . Знайти  $y', y'', y''', \dots$ .

● Маємо:  $y' = 5x^4 + 8x^3 - 9x^2 - 2x - \frac{1}{2}$ ,

$$y'' = 20x^3 + 24x^2 - 18x - 2, \quad y''' = 60x^2 + 48x - 18,$$

$$y^{(4)} = 120x + 48, \quad y^{(5)} = 120, \quad y^{(6)} = y^{(7)} = \dots = 0.$$

4. **Приклад.**  $y = \ln x$ . Знайти  $y^{(n)}$ .

● Маємо:  $y' = \frac{1}{x} = x^{-1}$ ,  $y'' = -1 \cdot x^{-2}$ ,  $y''' = 1 \cdot 2x^{-3}$ ,  $y^{(4)} = -1 \cdot 2 \cdot 3x^{-4}$ , ...

$$y^{(n)} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot (-1)^{n-1} \cdot x^{-n} = (-1)^{n-1} (n-1)! x^{-n}.$$

5. **Приклад.** Знайти  $y'_x$ , якщо

$$\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1, \\ y = 3t^5 + 5t^3 + 1. \end{cases}$$

● Знайдемо  $x'_t = 3t^2 + 3 = 3(t^2 + 1)$ ,  $y'_t = 15t^2(t^2 + 1) \Rightarrow y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{15t^2(t^2 + 1)}{3(t^2 + 1)} = 5t^2$ .

6. **Приклад.** Знайти кутовий коефіцієнт дотичної до циклоїди

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

в довільній точці  $t \in [-\pi, \pi]$ .

● Кутовий коефіцієнт дотичної в кожній точці дорівнює значенню похідної  $y'_x$  у цій точці:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} = \frac{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{t}{2} = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2} \right).$$

$\Rightarrow$  кутовий коефіцієнт дотичної до циклоїди в кожній точці дорівнює  $\operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2} \right)$ , де  $t$  — значення параметра, який відповідає цій точці.

Оскільки кутовий коефіцієнт дорівнює тангенсу кута  $\varphi$  нахилу дотичної до осі  $Ox$ , то

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2} \right) \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}.$$

**7. Приклад.** Знайти диференціал  $dy$  функції  $y = x^2 \operatorname{tg}(3x+1)$ .

● Оскільки  $y' = 2xt \operatorname{tg}(3x+1) + \frac{3x^2}{\cos^2(3x+1)}$ , то за формулою (4.10) дістанемо

$$dy = \left( 2xt \operatorname{tg}(3x+1) + \frac{3x^2}{\cos^2(3x+1)} \right) dx.$$

**8. Приклад.** Знайти диференціал функції  $y = \operatorname{arctg} x$ .

● Маємо:  $dy = (\operatorname{arctg} x)' dx = \frac{dx}{1+x^2}$ .

**9. Приклад.** Знайти диференціал функції  $s = e^{t^2}$ .

● Маємо:  $ds = e^{t^2} \cdot 2t \cdot dt$ .

**10. Приклад.** Обчислити наближено значення  $\arcsin 0,51$ .

● Розглянемо функцію  $y = \arcsin x$ . Візьмемо  $x = 0,5$ ,  $\Delta x = 0,01$  та, застосовуючи формулу  $\arcsin(x + \Delta x) \approx \arcsin x + (\arcsin x)' \Delta x$ , одержимо

$$\arcsin 0,51 \approx \arcsin 0,5 + \frac{1}{\sqrt{1-(0,5)^2}} \cdot 0,01 = \frac{\pi}{6} + 0,011 = 0,513.$$

## Завдання для перевірки знань

Знайти похідну  $y'_x$  від неявно заданих функцій:

1.  $x \sin y + y \sin x = 0$ . *Відповідь.*  $y' = -\frac{y \cos x + \sin y}{x \cos y + \sin x}$ .

2.  $\frac{y}{x} + e^{y/x} - \sqrt[3]{\frac{y}{x}} = 0$ . *Відповідь.*  $y' = y/x$ .

3.  $x^{y^2} + y^2 \cdot \ln x - 4 = 0$ . *Відповідь.*  $y' = -\frac{y}{2x \ln x}$ .

4.  $y^2 - 2xy + b = 0$ . *Відповідь.*  $\frac{y}{y-x}$ .

5.  $x^3 + ax^2y + bxy^2 + y^3 = 0$ .      *Відповідь.*  $-\frac{3x^2 + 2axy + by^2}{ax^2 + 2bxy + 3y^2}$ .
6.  $y = \cos(x + y)$ .      *Відповідь.*  $-\frac{\sin(x + y)}{1 + \sin(x + y)}$ .
7.  $y = 1 + xe^y$ .      *Відповідь.*  $\frac{e^y}{2 - y}$ .
8.  $y \sin x - \cos(x - y) = 0$ .      *Відповідь.*  $\frac{y \cos x + \sin(x - y)}{\sin(x - y) - \sin x}$ .
9.  $\operatorname{tg} \frac{y}{2} = \sqrt{\frac{1 - K}{1 + K}} \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ .      *Відповідь.*  $\frac{\sqrt{1 - K^2}}{1 + K \cos x}$ .
10.  $y = x + \operatorname{arctg} y$ .      *Відповідь.*  $\frac{1 + y^2}{y^2}$ .

Знайти похідну  $y'_x$  від параметрично заданих функцій:

1.  $x = 1 - t^2, y = t - t^3$ .      *Відповідь.*  $(3t^2 - 1)/(2t)$ .
2.  $x = \frac{t+1}{t}, y = \frac{t-1}{t}$ .      *Відповідь.*  $-1$ .
3.  $x = \ln(1 + t^2), y = t - \operatorname{arctg} t$ .      *Відповідь.*  $\frac{t}{2}$ .
4.  $x = \varphi(1 - \sin \varphi), y = \varphi \cos \varphi$ .      *Відповідь.*  $\frac{\cos \varphi - \varphi \sin \varphi}{1 - \sin \varphi - \varphi \cos \varphi}$ .
5.  $x = \frac{1+t^3}{t^2-1}, y = \frac{t}{t^2-1}$ .      *Відповідь.*  $\frac{1+t^2}{t(2+3t-t^3)}$ .
6.  $x = e^t \sin t, y = e^t \cos t$ .      *Відповідь.*  $\frac{1 - t \operatorname{tg} t}{1 + t \operatorname{tg} t}$ .
7.  $x = \frac{3at}{1+t^2}, y = \frac{3at^2}{1+t^2}$ .      *Відповідь.*  $\frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$ .

Знайти похідні другого порядку від функцій:

1.  $y = -\frac{22}{x+5}$ .      *Відповідь.*  $y'' = -\frac{44}{(x+5)^3}$ .
2.  $y = \frac{1}{4}x^2(2\ln x - 3)$ .      *Відповідь.*  $y'' = \ln x$ .
3.  $y = -\frac{1}{9}x \sin 3x - \frac{2}{27} \cos 3x$ .      *Відповідь.*  $y'' = x \cdot \sin 3x$ .
4.  $y = x \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) - \sqrt{x^2 + a^2}$ .      *Відповідь.*  $y'' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$ .
5.  $y = xe^{x^2}$ .      *Відповідь.*  $2e^{x^2}(3x + 2x^3)$ .
6.  $y = \frac{1}{1+x^3}$ .      *Відповідь.*  $\frac{6x(2x^3 - 1)}{(x^3 + 1)^3}$ .
7.  $y = (1+x^2) \operatorname{arctg} x$ .      *Відповідь.*  $\frac{2x}{1+x^2} + 2 \operatorname{arctg} x$ .

8.  $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ .      *Відповідь.*  $-\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$ .

9.  $y = \frac{1}{a + \sqrt{x}}$ .      *Відповідь.*  $\frac{a + 3\sqrt{x}}{4x\sqrt{x}(a + \sqrt{x})^3}$ .

10.  $y = e^{\sqrt{x}}$ .      *Відповідь.*  $\frac{e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)}{4x\sqrt{x}}$ .

Знайти похідні третього порядку від функцій:

1.  $y = ax^2 + bx + c$ .      *Відповідь.*  $y''' = 0$ .

2.  $y = \operatorname{tg} x$ .      *Відповідь.*  $y''' = 6\sec^4 x - 4\sin^2 x$ .

3.  $y = \ln \sin x$ .      *Відповідь.*  $y''' = 2\operatorname{ctg} x \operatorname{cosec}^2 x$ .

4.  $y = \frac{x}{6(x+1)}$ .      *Відповідь.*  $y''' = \frac{1}{(x+1)^4}$ .

5.  $y = \frac{1}{2} \ln^2 x$ .      *Відповідь.*  $y''' = \frac{2 \ln x - 3}{x^3}$ .

6.  $y = (2x+3)^3 \sqrt{2x+3}$ .      *Відповідь.*  $y''' = 105\sqrt{2x+3}$ .

7.  $y = (x^2 + a^2) \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$ .      *Відповідь.*  $y''' = \frac{4a^3}{(a^2 + x^2)^2}$ .

Знайти похідні  $n$ -го порядку від функцій:

1.  $y = x^n \cdot \sqrt{x}$ .

*Відповідь.*  $y^{(n)} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n+1)}{2^n} \sqrt{x}$ .

2.  $y = 5 - 3 \cos^2 x$ .

*Відповідь.*  $y^{(n)} = -\frac{3}{2} \cdot 2^n \cdot \cos\left(2x + \frac{\pi n}{2}\right)$ .

3.  $y = 2^x + 2^{-x}$ .

*Відповідь.*  $y^{(n)} = (2^x + (-1)^n \cdot 2^{-x}) \ln^n 2$ .

4.  $y = a^x$ .

*Відповідь.*  $y^{(n)} = (\ln a)^n a^x$ .

5.  $y = \ln(1+x)$ .

*Відповідь.*  $y^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$ .

6.  $y = \frac{1-x}{1+x}$ .

*Відповідь.*  $y^{(n)} = 2(-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$ .

7.  $y = xe^x$ .

*Відповідь.*  $y^{(n)} = e^x(x+n)$ .

8.  $y = x^{n-1} \ln x$ .

*Відповідь.*  $y^{(n)} = \frac{(n-1)!}{x}$ .

9. Скласти рівняння дотичної до гіперболи  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{8} = 1$ , проведеної в точці гіперболи  $M(-9, -8)$ .

*Відповідь.*  $x - y + 1 = 0$ .

10. Знайти кут між кривою  $y = x - x^3$  та прямою  $y = 5x$ .

*Відповідь.*  $\operatorname{tg}\varphi = \frac{2}{3}$ .

**11.** Знайти кут між кривими  $y = x^3$  та  $y = \frac{1}{x^2}$ .

*Відповідь.*  $\frac{\pi}{4}$ .

**12.** Знайти кут між кривими  $x^2 + y^2 = 5, y^2 = 4x$ .

*Відповідь.*  $\operatorname{tg}\varphi_1 = 3, \operatorname{tg}\varphi_2 = -3$ .

**13.** Знайти кут між кривими  $y = \sqrt{2} \sin x, y = \sqrt{2} \cos x$ .

*Відповідь.*  $\frac{\pi}{2}$ .

**14.** Знайти кутовий коефіцієнт дотичної до кривої  $x = \cos t, y = \sin t$  в точці  $x = -1/2, y = \sqrt{3}/2$ . Зробити малюнок.

*Відповідь.*  $1/\sqrt{3}$ .

**15.** Знайти кутовий коефіцієнт дотичної до кривої  $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$  при  $t = \pi/4$ .

*Відповідь.*  $-1$ .

Знайти диференціали функцій:

**1.**  $y = \frac{x}{2} \sqrt{49 - x^2} + \frac{49}{2} \arcsin \frac{x}{7}$ . *Відповідь.*  $dy = \sqrt{49 - x^2} dx$ .

**2.**  $y = \frac{1}{12} \ln \frac{x-6}{x+6}$ . *Відповідь.*  $dy = \frac{dx}{x^2 - 36}$ .

**3.**  $y = \operatorname{arctg} e^{2x}$ . *Відповідь.*  $dy = \frac{2e^{2x} dx}{1 + e^{4x}}$ .

**4.**  $y = e^{\frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x} \cdot \cos x$ .

*Відповідь.*  $dy = e^{\frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x} \cdot \sin x \operatorname{tg}^2 x dx$ .

**5.** Обчислити  $\Delta y$  та  $dy$  для функції  $y = x^2 - 2x$  при  $x = 3$  та  $\Delta x = 0,01$ .

*Відповідь.*  $\Delta y = 0,0401, dy = 0,04$ .

**6.** Знайти наближене значення  $\operatorname{arctg} 0,05$ .

*Відповідь.*  $0,811$ .

**7.** Знайти наближене значення об'єму кулі радіусом  $2,01$  м.

*Відповідь.*  $34,04 \text{ м}^3$ .

**8.** Знайти наближене значення  $\operatorname{tg} 46^\circ$ .

*Відповідь.*  $1,035$ .

**9.** Знайти наближене значення  $\sqrt[4]{15,8}$ .

*Відповідь.*  $1,9938$ .