

Варіанти індивідуальних завдань

I. Знайти границі:

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^3 - 4x^2 + 3}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - \cos \alpha x}{e^{\beta x} - \cos \beta x}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctg x}{x^3}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x - \operatorname{tg} x}.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n}.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - e^x}{x\sqrt{1-x^2}}.$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}.$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{tg} x} - e^x}{\operatorname{tg} x - x}.$$

$$11. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi - 2 \arctg x}{e^{3/x} - 1} \right).$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - (e^x + e^{-x}) \cos x}{x^4}.$$

$$13. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln(x-a)}{\ln(e^x - e^a)}.$$

$$14. \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^n e^{-x}).$$

$$15. \lim_{\varphi \rightarrow a} (a^2 - \varphi^2) \operatorname{tg} \frac{\pi \varphi}{2a}.$$

$$16. \lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \operatorname{ctg} x).$$

$$17. \lim_{x \rightarrow 0} (\arcsin x \cdot \operatorname{ctg} x).$$

$$18. \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \cdot \operatorname{ctg} x.$$

$$19. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} \right).$$

$$20. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{(a+x)(b+x)(c+x)} - x \right).$$

$$21. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) \right).$$

$$22. \lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}.$$

$$23. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right).$$

$$24. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{p}{1-x^p} - \frac{q}{1-x^q} \right).$$

$$25. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x \right).$$

$$26. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\pi - 2x)^{\cos x}.$$

$$27. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{3/x^2}.$$

$$28. \lim_{x \rightarrow \infty} (x + 2^x)^{1/x}.$$

$$29. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

$$30. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - (e^x + e^{-x}) \cos x}{x^4}.$$

II. Застосувати формулу Тейлора або Маклорена в задачах:

1. Розкласти по степенях $x - 2$ многочлен $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + x + 2$.

Відповідь. $-7(x-2) - (x-2)^2 + 3(x-2)^3 + (x-2)^4$.

2. Розкласти за степенями $x + 1$ многочлен $x^5 + 2x^4 - x^2 + x + 1$.

Відповідь. $(x+1)^2 + 2(x+1)^3 - 3(x+1)^4 + (x+1)^5$.

3. Записати формулу Тейлора для функції $y = \sqrt{x}$ при $a = 1$, $n = 3$.

Відповідь. $\sqrt{x} = 1 + \frac{x-1}{1!} \cdot \frac{1}{2} - \frac{(x-1)^2}{2!} \cdot \frac{1}{4} + \frac{(x-1)^3}{3!} \cdot \frac{3}{8} - \frac{(x-1)^4}{4!} \cdot \frac{15}{16} (1 + \Theta(x-1))^{\frac{7}{2}}$, $0 < \Theta < 1$.

4. Написати формулу Маклорена для функції $y = \sqrt{1+x}$ при $n = 2$.

Відповідь. $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{x^3}{16(1+\Theta x)^{\frac{5}{2}}}$, $0 < \Theta < 1$.

5. Розкласти по степенях $x - 2$ многочлен $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + x + 2$.

Відповідь. $-7(x-2) - (x-2)^2 + 3(x-2)^3 + (x-2)^4$.

6. Розкласти за степенями $x + 1$ многочлен $x^5 + 2x^4 - x^2 + x + 1$.

Відповідь. $(x+1)^2 + 2(x+1)^3 - 3(x+1)^4 + (x+1)^5$.

7. Записати формулу Тейлора для функції $y = \sqrt{x}$ при $a = 1$, $n = 3$.

Відповідь. $\sqrt{x} = 1 + \frac{x-1}{1!} \cdot \frac{1}{2} - \frac{(x-1)^2}{2!} \cdot \frac{1}{4} + \frac{(x-1)^3}{3!} \cdot \frac{3}{8} - \frac{(x-1)^4}{4!} \cdot \frac{15}{16} (1 + \Theta(x-1))^{\frac{7}{2}}$, $0 < \Theta < 1$.

8. Написати формулу Маклорена для функції $y = \sqrt{1+x}$ при $n = 2$.

Відповідь. $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{x^3}{16(1+\Theta x)^{\frac{5}{2}}}, 0 < \Theta < 1.$

9. Розкласти по степенях $x - 2$ многочлен $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + x + 2.$

Відповідь. $-7(x-2) - (x-2)^2 + 3(x-2)^3 + (x-2)^4.$

10. Розкласти за степенями $x + 1$ многочлен $x^5 + 2x^4 - x^2 + x + 1.$

Відповідь. $(x+1)^2 + 2(x+1)^3 - 3(x+1)^4 + (x+1)^5.$

11. Записати формулу Тейлора для функції $y = \sqrt{x}$ при $a = 1, n = 3.$

Відповідь. $\sqrt{x} = 1 + \frac{x-1}{1!} \cdot \frac{1}{2} - \frac{(x-1)^2}{2!} \cdot \frac{1}{4} + \frac{(x-1)^3}{3!} \cdot \frac{3}{8} - \frac{(x-1)^4}{4!} \cdot \frac{15}{16}(1+\Theta(x-1))^{\frac{7}{2}}, 0 < \Theta < 1.$

12. Написати формулу Маклорена для функції $y = \sqrt{1+x}$ при $n = 2.$

Відповідь. $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{x^3}{16(1+\Theta x)^{\frac{5}{2}}}, 0 < \Theta < 1.$

13. Розкласти по степенях $x - 2$ многочлен $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + x + 2.$

Відповідь. $-7(x-2) - (x-2)^2 + 3(x-2)^3 + (x-2)^4.$

14. Розкласти за степенями $x + 1$ многочлен $x^5 + 2x^4 - x^2 + x + 1.$

Відповідь. $(x+1)^2 + 2(x+1)^3 - 3(x+1)^4 + (x+1)^5.$

15. Записати формулу Тейлора для функції $y = \sqrt{x}$ при $a = 1, n = 3.$

Відповідь. $\sqrt{x} = 1 + \frac{x-1}{1!} \cdot \frac{1}{2} - \frac{(x-1)^2}{2!} \cdot \frac{1}{4} + \frac{(x-1)^3}{3!} \cdot \frac{3}{8} - \frac{(x-1)^4}{4!} \cdot \frac{15}{16}(1+\Theta(x-1))^{\frac{7}{2}}, 0 < \Theta < 1.$

16. Написати формулу Маклорена для функції $y = \sqrt{1+x}$ при $n = 2.$

Відповідь. $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{x^3}{16(1+\Theta x)^{\frac{5}{2}}}, 0 < \Theta < 1.$

17. Розкласти по степенях $x - 2$ многочлен $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + x + 2.$

Відповідь. $-7(x-2) - (x-2)^2 + 3(x-2)^3 + (x-2)^4.$

18. Розкласти за степенями $x + 1$ многочлен $x^5 + 2x^4 - x^2 + x + 1.$

Відповідь. $(x+1)^2 + 2(x+1)^3 - 3(x+1)^4 + (x+1)^5.$

19. Записати формулу Тейлора для функції $y = \sqrt{x}$ при $a = 1, n = 3.$

Відповідь. $\sqrt{x} = 1 + \frac{x-1}{1!} \cdot \frac{1}{2} - \frac{(x-1)^2}{2!} \cdot \frac{1}{4} + \frac{(x-1)^3}{3!} \cdot \frac{3}{8} - \frac{(x-1)^4}{4!} \cdot \frac{15}{16}(1+\Theta(x-1))^{\frac{7}{2}}, 0 < \Theta < 1.$

20. Написати формулу Маклорена для функції $y = \sqrt{1+x}$ при $n = 2.$

Відповідь. $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{x^3}{16(1+\Theta x)^{\frac{5}{2}}}, 0 < \Theta < 1.$

21. Розкласти по степенях $x - 2$ многочлен $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + x + 2.$

Відповідь. $-7(x-2) - (x-2)^2 + 3(x-2)^3 + (x-2)^4.$

22. Розкласти за степенями $x + 1$ многочлен $x^5 + 2x^4 - x^2 + x + 1.$

Відповідь. $(x+1)^2 + 2(x+1)^3 - 3(x+1)^4 + (x+1)^5.$

23. Записати формулу Тейлора для функції $y = \sqrt{x}$ при $a = 1, n = 3.$

Відповідь. $\sqrt{x} = 1 + \frac{x-1}{1!} \cdot \frac{1}{2} - \frac{(x-1)^2}{2!} \cdot \frac{1}{4} + \frac{(x-1)^3}{3!} \cdot \frac{3}{8} - \frac{(x-1)^4}{4!} \cdot \frac{15}{16}(1+\Theta(x-1))^{\frac{7}{2}}, 0 < \Theta < 1.$

24. Написати формулу Маклорена для функції $y = \sqrt{1+x}$ при $n = 2.$

Відповідь. $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{x^3}{16(1+\Theta x)^{\frac{5}{2}}}, 0 < \Theta < 1.$

25. Розкласти по степенях $x - 2$ многочлен $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + x + 2$.

Відповідь. $-7(x-2) - (x-2)^2 + 3(x-2)^3 + (x-2)^4.$

26. Розкласти за степенями $x + 1$ многочлен $x^5 + 2x^4 - x^2 + x + 1$.

Відповідь. $(x+1)^2 + 2(x+1)^3 - 3(x+1)^4 + (x+1)^5.$

27. Записати формулу Тейлора для функції $y = \sqrt{x}$ при $a = 1, n = 3$.

Відповідь. $\sqrt{x} = 1 + \frac{x-1}{1!} \cdot \frac{1}{2} - \frac{(x-1)^2}{2!} \cdot \frac{1}{4} + \frac{(x-1)^3}{3!} \cdot \frac{3}{8} - \frac{(x-1)^4}{4!} \cdot \frac{15}{16} (1 + \Theta(x-1))^{\frac{7}{2}}, 0 < \Theta < 1.$

28. Написати формулу Маклорена для функції $y = \sqrt{1+x}$ при $n = 2$.

Відповідь. $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{x^3}{16(1+\Theta x)^{\frac{5}{2}}}, 0 < \Theta < 1.$