ЛЕКЦІЯ№3

Основні теореми диференціального числення. Правило Лопіталя-Бернуллі. Формула Тейлора.

1. Основні теореми диференціального числення. 1
2. Правило Лопіталя-Бернуллі 3
3. Перетворення невизначеностей виду 4
4. Формула Тейлора 6
5. Розклад за формулою Маклорена функцій e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^m$ 8

1. Основні теореми диференціального числення.

Теорема Ферма. **Якщо диференційовна на проміжку D функція $y=f(x)$ досягає найбільшого або найменшого значення у внутрішній точці ξ цього проміжку, то похідна функції в цій точці дорівнює нулю, тобто $f'(\xi)=0$.**

Припустимо, для визначеності, що $f(x)$ набуває в точці ξ найбільшого значення, тобто для всіх $x\in D$ $f(x)\le f(\xi)$.

За означенням похідної

$$f'(\xi)=\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi},$$

причому ця границя не залежить від того, як наближається x до ξ — справа чи зліва.

Розглянемо відношення $\dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$.

Для всіх x, достатньо близьких до точки $\xi(x\ne\xi)$, маємо:

$$\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\le 0 \text{ при } x>\xi,\\ \dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\ge 0 \text{ при } x<\xi.\end{cases}$$

Перейдемо в останніх нерівностях до границі при $x\to\xi$. Дістанемо

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to\xi+0}\dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\le 0\\ \lim\limits_{x\to\xi-0}\dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\ge 0\end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to\xi}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}=0\Rightarrow f'(\xi)=0.$$

Аналогічно розглядається випадок, коли функція $f(x)$ набуває в точці $x=\xi$ найменшого значення.

Геометричний зміст теореми Ферма. Геометричний зміст похідної $y'=f'(x)$ являє собою кутовий коефіцієнт дотичної до кривої $y=f(x)$. Звідси рівність нулю похідної $f'(\xi)$ геометрично означає, що у відповідній точці цієї кривої дотична паралельна осі Ox.

Теорема Ролля. **Якщо функція $f(x)$: 1) неперервна на сегменті $[a; b]$; 2) диференційовна на інтервалі $(a; b)$; 3) на кінцях сегмента набуває рівних між собою значень, тобто $f(a) = f(b)$, то на інтервалі $(a; b)$ існує хоча б одна точка $x = \xi (a < \xi < b)$, для якої $f'(\xi) = 0$.**

Геометричний зміст теореми Ролля. Якщо крайні ординати неперервної кривої $y = f(x)$, яка має в кожній точці дотичну, рівні, то на цій кривій знайдеться принаймні одна точка з абсцисою $\xi (a < \xi < b)$, в якій дотична паралельна осі Ox (рис. 1).

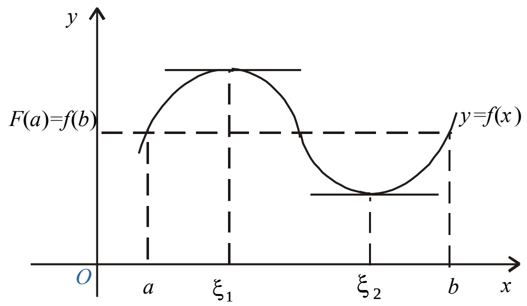

Рис. 1

Теорема Лагранжа **(теорема про скінченні прирости функції).**
Якщо функція $f(x)$: 1) неперервна на сегменті $[a; b]$; 2) диференційовна на інтервалі $(a; b)$, то на інтервалі знайдеться хоча б одна точка $x = \xi (a < \xi < b)$, така що

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(\xi). \qquad (1)$$

Геометричний зміст теореми Лагранжа. Запишемо формулу (1) у вигляді

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi). \qquad (2)$$

З рис. 2 бачимо, що величина $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ є тангенсом кута α нахилу хорди, що проходить через точки A і B графіка функції $y = f(x)$ з абсцисами a і b.

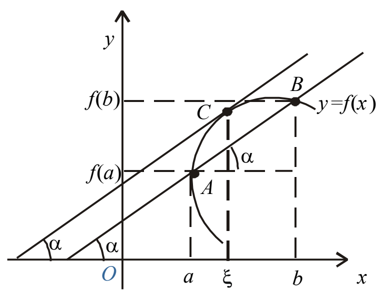

Рис. 2

Водночас, $f'(\xi)$ — тангенс кута нахилу дотичної до кривої у точці C з абсцисою ξ. Таким чином, геометричний зміст рівності (1) або рівносильної для неї рівності (2) можна визначити так: якщо для всіх точок кривої $y = f(x)$ існує дотична, то на цій кривій знайдеться точка з абсцисою ξ, в якій дотична паралельна хорді AB, що сполучає точки A і B.

Теорема Коші. **Якщо $f(x)$ і $\varphi(x)$ дві функції: 1) неперервні на сегменті [a; b]; 2) диференційовні на інтервалі (a; b); 3) $\varphi'(x) \neq 0$ для $x \in (a;b)$, то на інтервалі (a; b) знайдеться хоча б одна точка $x = \xi (a < \xi < b)$, така що**

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}.$$

2. Правило Лопіталя-Бернуллі

Розглянемо відношення $f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, де функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ визначені й диференційовні в деякому околі точки a, виключаючи, можливо, саму точку a. Може бути, що при $x \to a$ обидві функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ прямують до 0 або до ∞, тобто ці функції одночасно є нескінченно малими або нескінченно великими величинами при $x \to a$. Тоді говорять, що в точці a функція $f(x)$ має невизначеність виду

$$\left[\frac{0}{0}\right] \text{або} \left[\frac{\infty}{\infty}\right]. \qquad (3)$$

У цьому випадку, використовуючи похідні $\varphi'(x)$ і $\psi'(x)$, можна сформулювати правило для знаходження границі функції $f(x)$ при $x \to a$, тобто визначити спосіб для розкриття невизначеностей виду (3).

Теорема (правило Лопіталя-Бернуллі). **Границя відношення двох нескінченно малих або нескінченно великих функцій дорівнює границі відношення їхніх похідних (скінченній або нескінченній), якщо остання існує.**

Зауваження. Якщо $\varphi'(x)$ і $\psi'(x)$ при $x \to a$ прямують одночасно до 0 або до ∞ і задовольняють ті умови, які були накладені теоремою на функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$, то до відношення $\varphi'(x)/\psi'(x)$ знову застосовуємо правило Лопіталя і виводимо формулу

$$\lim_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\varphi''(x)}{\psi''(x)}$$

і т. п.

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 7x}{2x}$.

● Виконавши граничний перехід, дістанемо невизначеність вигляду $\left[\frac{0}{0}\right]$. Застосовуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 7x}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{(\sin 7x)'}{(2x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{7\cos x}{2} = \frac{7}{2}.$$

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2 + 3x + 1}{2x^3 + 7x + 5}$.

● Виконання граничного переходу приводить до невизначеності виду $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Застосовуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x+1}{2x^2+7x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^2+3x+1\right)'}{\left(2x^3+7x+5\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{6x^2+7}=$$

(виконання граничного переходу знову приводить до невизначеності виду $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, а тому застосовуємо правило Лопіталя повторно):

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+3)'}{\left(6x^2+7\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{12x}=\frac{1}{6}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{6}\cdot 0=0\,.$$

3. Перетворення невизначеностей виду

$[0\cdot\infty]$; $\left[0^0\right]$, $\left[\infty^0\right]$, $\left[1^\infty\right]$, $[\infty-\infty]$ **до виду** $\left[\frac{0}{0}\right]$ **або** $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Правило Лопіталя можна застосувати тільки для розкриття невизначеностей вигляду $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. При розкритті інших типів невизначеностей їх перетворюють до одного з цих видів.

Невизначеність виду $[0\cdot\infty]$. Нехай $\lim\limits_{x\to a}u(x)=0,\ \lim\limits_{x\to a}v(x)=\infty$.

Потрібно знайти

$$\lim_{x\to a}\left(u(x)\cdot v\cdot(x)\right). \qquad (4)$$

Це невизначеність типу $[0\cdot\infty]$.

Якщо вираз (4) записати у вигляді

$$\lim_{x\to a}u\cdot v=\lim_{x\to a}\frac{u}{\frac{1}{v}}\ \text{ або }\ \lim_{x\to a}u\cdot v=\lim_{x\to a}\frac{v}{\frac{1}{u}},$$

то при $x\to a$ дістанемо невизначеність відповідно вигляду $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^3\ln x\right)$.

● Тут маємо невизначеність вигляду $[0\cdot\infty]$. Зобразимо добуток функції у вигляді частки, а потім, отримавши невизначеність $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0}\left(x^3\ln x\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{\left(x^{-3}\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{3}{x^4}}=-\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}x^3=0.$$

Невизначеність вигляду $\left[0^0\right]$, $\left[\infty^0\right]$, $\left[1^\infty\right]$. Нехай маємо функцію $u(x)^{v(x)}$.

При $x\to a$ (a — скінченне або нескінченне) можливі три випадки:

а) $u\to 0,\ v\to 0$ маємо невизначеність виду $\left[0^0\right]$;

б) $u\to\infty,\ v\to 0$ дістанемо невизначеність $\left[\infty^0\right]$;

в) $u\to 1,\ v\to\infty$ маємо невизначеність виду $\left[1^\infty\right]$.

Ці невизначеності за допомогою логарифмування зводяться до невизначеності вигляду $[0\cdot\infty]$. Справді, позначимо дану функцію через y, тобто візьмемо $y=u^v$. Прологарифмувавши цю рівність, дістанемо $\ln y = v\ln u (u>0)$.

Легко перевірити, що при $x\to a$ добуток $v\ln u$ буде невизначеністю $[0\cdot\infty]$ для всіх трьох випадків.

Відповідно до підпункту 1 розкриємо невизначеність $[0\cdot\infty]$, тобто знайдемо границю $\lim\limits_{x\to a}\ln y = k$ (k — скінченне або ∞).

Звідси $\lim\limits_{x\to a} y = \lim\limits_{x\to a} u^v = e^k$.

Приклад. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^x$.

● Це невизначеність виду $[0^0]$. Позначимо функцію, що стоїть під знаком границі, через y, тобто $y=(\sin x)^x$, і прологарифмуємо її:

$$\ln y = x\ln\sin x = \frac{\ln\sin x}{x^{-1}}.$$

Обчислимо границю логарифма даної функції. Тут маємо невизначеність $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0}\ln y = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin x}{x^{-1}} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{\sin x\left(-x^{-2}\right)} = -\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos x}{\sin x} = 0.$$

Звідси $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^x = e^0 = 1$.

Приклад. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$.

● При $x\to 1$ маємо невизначеність $[1^\infty]$.

$$y = x^{\frac{1}{x-1}},\quad \ln y = \frac{\ln x}{x-1};\quad \lim_{x\to 1}\ln y = \lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{1} = 1.$$

Звідси $\lim\limits_{x\to 1} y = \lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}} = e^1 = e$.

Невизначеність $[\infty-\infty]$. Якщо функції $u(x)\to\infty$, $v(x)\to\infty$ при $x\to a$ (a — скінченне або нескінченне), то різниця $u-v$ при $x\to a$ дає невизначеність $[\infty-\infty]$. Остання з допомогою алгебраїчних перетворень зводиться до невизначеності $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Приклад. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$.

● Маємо невизначеність виду $[\infty-\infty]$. Алгебраїчним перетворенням приведемо цю невизначеність до невизначеності $\left[\frac{0}{0}\right]$, а потім двічі застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x+\cos x-x\sin x}=\frac{0}{2}=0.$$

4. Формула Тейлора

Допустимо, що функція $y=f(x)$ має всі похідні до $(n+1)$-го порядку включно на деякому проміжку, який містить точку $x=a$. Знайдемо многочлен $P_n(x)$ степеня, не більшого за n, значення якого в точці $x=a$ дорівнює значенню функції $f(x)$ в цій точці, а значення його похідних до n-го порядку в точці $x=a$ дорівнюють значенням відповідних похідних від функції $f(x)$ у цій точці

$$P_n(a)=f(a),\ P_n'(a)=f'(a),\ P_n''(a)=f''(a),\dots,P_n^{(n)}(a)=f^{(n)}(a). \qquad (5)$$

Шукатимемо цей многочлен у формі многочлена за степенями $(x-a)$ з невідомими коефіцієнтами

$$P_n(x)=C_0+C_1(x-a)+C_2(x-a)^2+C_3(x-a)^3+\dots+C_n(x-a)^n. \qquad (6)$$

Продиференціювавши n разів вираз (4.25), дістанемо:

$$\left.\begin{array}{l} P_n'(x)=C_1+2C_2(x-a)+3C_3(x-a)^2+\dots+nC_n(x-a)^{n-1},\\ P_n''(x)=2\cdot 1C_2+3\cdot 2C_3(x-a)+\dots+n(n-1)C_n(x-a)^{n-2},\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ P_n^{(n)}(x)=n(n-1)\dots 2\cdot 1\cdot C_n. \end{array}\right\} \qquad (7)$$

Візьмемо у виразах (6) та (7) $x=a$. Результат підставимо в рівності (5), маємо:

$$\begin{array}{l} f(a)=C_0,\\ f'(a)=C_1,\\ f''(a)=2\cdot 1\cdot C_2,\\ f'''(a)=3\cdot 2\cdot 1\cdot C_3,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ f^{(n)}(a)=n(n-1)(n-2)\dots 2\cdot 1\cdot C_n. \end{array}$$

Звідки:

$$\left.\begin{array}{l} C_0=f(a),\ C_1=f'(a),\ C_2=\dfrac{1}{1\cdot 2}f''(a),\\ C_3=\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}f'''(a),\dots,C_n=\dfrac{1}{1\cdot 2\dots n}f^{(n)}(a). \end{array}\right\} \qquad (7)$$

Підставляючи знайдені значення $C_1, C_2, \dots, C_n$ (7) у формулу (6), одержимо шуканий многочлен у вигляді:

$$P_n(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\frac{(x-a)^3}{3!}f'''(a)+\dots+ \\ +\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a). \qquad (8)$$

Позначимо через $R_n(x)$ різницю значень заданої функції $f(x)$ та побудованого многочлена $P_n(x)$:

$$R_n(x)=f(x)-P_n(x),$$

звідки

$$f(x)=P_n(x)+R_n(x),$$

або, у розгорнутому вигляді:

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+ +\ldots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+R_n(x). \tag{9}$$

$R_n(x)$ називається залишковим членом у формулі Тейлора (9). Для тих значень x, для яких залишковий член $R_n(x)$ малий, многочлен $P_n(x)$ дає наближене подання функції $f(x)$.

Оцінимо залишковий член $R_n(x)$ при різних значеннях x, для цього запишемо його в вигляді

$$R_n(x)=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}Q(x), \tag{10}$$

де $Q(x)$ — невідома функція.

Згідно з (29) формула (28) запишеться так:

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+ +\ldots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}Q(x). \tag{11}$$

Для значень t (t лежить між величинами a та x) введемо допоміжну функцію:

$$F(t)=f(x)-f(t)-\frac{x-t}{1!}f'(t)-\frac{(x-t)^2}{2!}f''(t)-\ldots- -\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n)}(t)-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}Q(x). \tag{12}$$

Знайдемо похідну $F'(t)$ від функції $F(t)$ (12):

$$F'(t)=-f'(t)+f'(t)-\frac{x-t}{1!}f''(t)+\frac{2(x-t)}{2!}f''(t)- -\frac{(x-t)^2}{2!}f'''(t)+\ldots-\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t)+\frac{n(x-t)^{n-1}}{n!}f^{(n)}(t)- -\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)+\frac{(n+1)(x-t)^n}{(n+1)!}Q(x),$$

або, після скорочення:

$$F'(t)=-\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)+\frac{(x-t)^n}{n!}Q(x). \tag{13}$$

На основі формул (11) та (12) можна встановити: $F(x)=0,\ F(a)=0.$

Таким чином, функція $F(t)$ задовольняє умови теореми Ролля $\Rightarrow$ між величинами a та x існує таке значення $t=\xi,$ при якому $F'(\xi)=0.$ Згідно з (13) маємо

$$-\frac{(x-\xi)^n}{n!}f^{(n+1)}(\xi)+\frac{(x-\xi)^n}{n!}Q(x)=0,$$

або

$$Q(x)=f^{(n+1)}(\xi).$$

Підставляючи цей вираз у формулу (10), маємо:

$$R_n(x)=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi).$$

Здобута рівність називається *залишковим членом у формі Лагранжа*.

Оскільки величина ξ лежить між величинами x та a, то її можна подати у вигляді $\xi=a+\Theta(x-a)$, де $0<\Theta<1$; тоді формула для залишкового члена набирає вигляду:

$$R_n(x)=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\Theta(x-a)).$$

Вираз

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots+$$
$$+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\Theta(x-a)),\quad (0<\Theta<1)$$

називається формулою Тейлора із залишковим членом у формі Лагранжа.

Узявши у формулі $a=0$, дістанемо формулу Маклорена:

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\ldots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+$$
$$+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\Theta\, x)\,. \qquad (14)$$

5. Розклад за формулою Маклорена функцій e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^m$

Розклад функції $f(x)=e^x$. Послідовно диференціюючи функцію e^x, дістаємо:

$$f(x)=e^x,\qquad f(0)=1;$$
$$f'(x)=e^x,\qquad f(0)=1;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f^{(n)}(x)=e^x,\quad f(0)=1.$$

Підставляючи здобуті вирази у формулу (14), маємо:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\Theta x},\ \ 0<\Theta<1.$$

Нехай $|x|\le 1,\ n=8.$ Оцінка залишкового члена в цьому разі така:

$$R_8 < \frac{1}{9!} < 10^{-5}.$$

При $x = 1$ маємо формулу для знаходження наближеного значення числа e:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{8!} \approx 2{,}71828,$$

при цьому допущена похибка не перевищує числа $\frac{3}{9!}$ або 0,00001.

Можна також показати, що для будь-яких $|x| > 1$

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\Theta x} = 0.$$

Таким чином, для будь-яких $x \in (-\infty, +\infty)$, взявши достатнє число членів, можна обчислити e^x з заданим степенем точності.

Розклад функції $f(x) = \sin x$. Знаходимо послідовно похідні від $f(x) = \sin x$:

$$
\begin{array}{ll}
f(x) = \sin x, & f(0) = 0; \\
f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), & f'(0) = 1; \\
f''(x) = -\sin x = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right), & f''(0) = 0; \\
f'''(x) = -\cos x = \sin\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right), & f'''(0) = -1; \\
f^{(4)}(x) = \sin x = \sin\left(x + 4\frac{\pi}{2}\right), & f^{(4)}(0) = 0; \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), & f^{(n)}(0) = \sin\frac{\pi n}{2}; \\
f^{(n+1)}(x) = \sin\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right), & f^{(n+1)}(\xi) = \left(\xi + (n+1)\frac{\pi}{2}\right) \\
 & (\xi = \Theta x,\ 0 < \Theta < 1).
\end{array}
$$

Підставляючи здобуті значення у формулу (14), дістаємо розклад функції $f(x) = \sin x$ за формулою Маклорена:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{x^n}{n!}\sin\frac{\pi n}{2} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\sin\left(\xi + (n+1)\frac{\pi}{2}\right).$$

Оскільки $\left|\sin\left(\xi + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)\right| \le 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ для всіх $x \in (-\infty, +\infty)$.

Застосуємо здобуту формулу для наближеного обчислення $\sin 20°$. Візьмемо $n = 3$, тобто обмежимося двома першими членами розвинення:

$$\sin 20^\circ \approx \sin\frac{\pi}{9} \approx \frac{\pi}{9} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^3 = 0{,}342.$$

Оцінимо зроблену похибку, яка дорівнює залишковому члену:

$$|R_3| = \left|\left(\frac{\pi}{9}\right)^4 \frac{1}{4!}\sin(\xi + 2\pi)\right| \le \left(\frac{\pi}{9}\right)^4 \frac{1}{4!} \approx 0{,}00062 < 0{,}001.$$

Розклад функції $f(x)=\cos x$. Знаходячи значення послідовних похідних при $x = 0$ від функції $f(x)=\cos x$ та підставляючи у формулу Маклорена, дістаємо:

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+\frac{x^n}{n!}\cos\frac{\pi n}{2}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cos\left(\xi+(n+1)\frac{\pi}{2}\right), \quad |\xi|<|x|.$$

Тут $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$ при всіх $x\in(-\infty, +\infty)$.

Розклад функції $f(x)=\ln(1+x)$:

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+\frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{x}{1+\xi}\right)^{n+1}, \ |\xi|<|x|.$$

Тут $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)}\left(\frac{x}{1+\xi}\right)^{n+1}=0$ при $-1<x<1$.

Розклад функції $f(x)=(1+x)^m$:

$$(1+x)^m = 1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots+$$
$$+\frac{m(m-1)\ldots(m-(n-1))}{n!}x^n+\frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{(n+1)!}x^{n+1}(1+\Theta x)^{m-n-1}, \ 0<\Theta<1.$$

Тут $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{(n+1)!}x^{n+1}(1+\Theta x)^{m-n-1}=0$ при $|x|<1$.