Практична робота 5-6

<u>Тема:</u> Основні теореми диференціального числення. Правило Лопіталя-Бернуллі.

<u>Мета:</u> Навчитись застосовувати основні теореми диференціального числення до розв'язання задач. Вміти знаходити похідну функції користуючись правилом Лопіталя-Бернуллі.

Приклад. Чи буде виконуватися теорема Ролля для функції $f(x)=x^2-6x+100$, якщо a = 1, b = 5? При якому значенні ξ?

● Оскільки функція f (x) неперервна та диференційовна на всій числовій прямій і значення функції f (x) на границях сегмента [1, 5] рівні між собою f (1) = f (5) = 95, то теорема Ролля буде виконуватись на інтервалі (1, 5). Значення ξ визначаємо з рівняння $f'(x)=2x-6=0$, тобто $\xi=3$.

Приклад. Знайти координати точки M на дузі AB кривої $y=2x-x^2$, в якій дотична паралельна хорді AB, якщо A (1; 1) та B (3; –3).

● Функція $y=2x-x^2$ неперервна та диференційовна при всіх значеннях x. За теоремою Лагранжа між двома значеннями a = 1 та b = 3 існує значення $x=\xi$, яке задовольняє рівності $y(b)-y(a)=(b-a)y'(\xi)$, де $y'=2-2x$. Підставимо дані умови задачі: $y(3)-y(1)=(3-1)y'(\xi)$, тобто $\left(2\cdot 3-3^2\right)-\left(2\cdot 1-1^2\right)=(3-1)\cdot(2-2\xi)$. Звідки $\xi=2, y(2)=0$. Таким чином, точка M має координати (2; 0).

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}$.

● Чисельник та знаменник дробу окремо прямують до нуля при $x\to 0$ (невизначеність вигляду $\left[\dfrac{0}{0}\right]$).

Використовуючи правило Лопіталя, дістаємо

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}=\lim_{x\to 1}\frac{2x+\frac{1}{x}}{e^x}=\frac{3}{e}.$$

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{xe^{x/2}}{x+e^x}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

● Маємо:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{xe^{x/2}}{x+e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x/2}\left(1+\frac{x}{2}\right)}{1+e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2}e^{x/2}\left(2+\frac{x}{2}\right)}{e^x}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{x}{2}}{e^{x/2}}=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{1/2}{\frac{1}{2}e^{x/2}}=0.$$

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\cdot\ln x\right)=[0\cdot\infty]$.

● Подамо добуток функцій у вигляді дробу, а потім, діставши невизначеність вигляду $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0}\left(x^2\cdot\ln x\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-2x^{-3}}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}x^2=0.$$

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=[\infty-\infty]$.

● Зведемо дроби до спільного знаменника. Маємо невизначеність вигляду $\left[\frac{0}{0}\right]$. До неї застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x\left(e^x-1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x(2+x)}=\frac{1}{2}.$$

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\mathrm{tg}x)^{2\cos x}=\left[\infty^0\right]$.

● Позначимо задану функцію через y: $(\mathrm{tg}x)^{2\cos x}=y$.

Прологарифмуємо її $\ln y=2\cos x\ln\mathrm{tg}x=\frac{2\ln\mathrm{tg}x}{1/\cos x}$.

Обчислимо границю знайденого виразу за допомогою правила Лопіталя (маємо невизначеність вигляду $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$):

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\ln y=2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\mathrm{tg}x}{\sec x}=2\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2x\cdot 1/\mathrm{tg}x}{\sec x\cdot\mathrm{tg}x}=2\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sec x}{\mathrm{tg}^2x}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sec x\,\mathrm{tg}x}{2\mathrm{tg}x\cdot\sec^2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x=0,\quad \text{тобто}\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}y=e^0=1.$$

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\ln x}=\left[1^\infty\right]$.

● Логарифмуючи та застосовуючи правило Лопіталя, маємо:

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\ln x\cdot\ln(1+x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{1/\ln x}=\lim_{x\to 0}\frac{1/(1+x)}{-1/\left(x\ln^2x\right)}=$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{x\ln^2x}{x+1}=-\lim_{x\to 0}\frac{\ln^2x}{1+\frac{1}{x}}=-\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{x}\ln x}{-\frac{1}{x^2}}=2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=0.$$

Таким чином, $\lim\limits_{x\to 0}y=e^0=1$.

Приклад. Подати функцію $f(x)=\sqrt[3]{x}$ у вигляді многочлена п'ятого степеня відносно двочлена $x-1$.

● Обчислимо значення функції $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$ та її похідних до п'ятого порядку включно при $a=1$:

$$f(1)=1,\qquad f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}},\qquad f'(1)=\frac{1}{3};$$

$$f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}, \qquad f''(1) = -\frac{2}{9};$$
$$f'''(x) = \frac{10}{27}x^{-\frac{8}{3}}, \qquad f'''(1) = \frac{10}{27};$$
$$f^{(4)}(x) = -\frac{80}{81}x^{-\frac{11}{3}}, \qquad f^{(4)}(1) = -\frac{80}{81};$$
$$f^{(5)}(x) = \frac{880}{243}x^{-\frac{14}{3}}, \qquad f^{(5)}(1) = \frac{880}{243}.$$

Звідси, за формулою Тейлора дістанемо:

$$\sqrt{x} = 1 + \frac{1}{3}(x-1) + \frac{2}{9 \cdot 2!}(x-1)^2 + \frac{10}{27 \cdot 3!}(x-1)^3 -$$
$$- \frac{80}{81 \cdot 4!}(x-1)^4 + \frac{880}{243 \cdot 5!}(x-1)^5 + R_5,$$

де $R_5 = \frac{f^{(6)}(\Theta x)}{6!}(x-1)^6 = -\frac{12320}{729 \cdot 6!}(\Theta x)^{-17/3}(x-1)^6, \quad 0 < \Theta < 1.$

Приклад. Обчислити з точністю до 10^{-3} наближене значення $\sqrt[3]{29}$.

● Запишемо задане число так: $\sqrt[3]{29} = \sqrt[3]{27+2} = 3\left(1 + \frac{2}{27}\right)^{1/3}$. Використаємо розклад:

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + R_n.$$

Звідси одержимо наближену рівність

$$(1+x)^m \approx 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n,$$

похибка якої

$$R_n = \frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{(n+1)!}x^{n+1}(1+\Theta x)^{m-n-1}$$

може бути зроблена як завгодно малою при $|x| < 1$ та при достатньо великому n.

Візьмемо $x = \frac{2}{27}$ та $m = \frac{1}{3}$, одержимо:

$$\sqrt[3]{29} \approx 3\left(1 + \frac{2}{81} - \frac{2 \cdot 2}{81 \cdot 81} + \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5}{81^3} - \frac{2^5 \cdot 5}{81^4} + \ldots + R_n\right).$$

Оцінюючи величини послідовних похибок обчислення $3|R_n|$, знаходимо:

$$3|R_1| < \frac{3 \cdot 2 \cdot 2}{81^2} < 0{,}002,$$

$$3|R_2| < \frac{3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5}{81^3} < 0{,}0003$$

Звідси для обчислення з заданою точністю достатньо взяти три члени, які стоять у розкладі перед залишком R_2, тобто

$$\sqrt[3]{29} \approx 3(1 + 0{,}024 - 0{,}0006) = 3{,}072$$

Завдання для перевірки знань

Застосовувати основні теореми диференціального числення до розв'язання задач.

1. Чи буде виконуватися теорема Ролля для функції $f(x)=\sqrt[3]{8x-x^2}$ на інтервалі (0; 8)? При якому значенні ξ?

Відповідь. Теорема Ролля буде виконуватись на заданому інтервалі; $f'(x)=0$ при $x=\xi=4$.

2. Показати, що похідна $f'(x)$ многочлена $f(x)=x^3-x^2-x+1$ має дійсний корінь на інтервалі (–1; 1).

Відповідь. $x=-\frac{1}{3}$.

3. В якій точці дуги *AB* кривої $y=x^3-3x$ дотична паралельна хорді *AB*, якщо *A* (0; 0), *B* (3; 18)?

Відповідь. M ($\sqrt{3}$; 0).

Знайти границі:

1. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-3x^2+2}{x^3-4x^2+3}$. *Відповідь.* $\frac{3}{5}$.

2. $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$. *Відповідь.* 2.

3. $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\alpha x}-\cos\alpha x}{e^{\beta x}-\cos\beta x}$. *Відповідь.* $\frac{\alpha}{\beta}$.

4. $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\mathrm{arctg}x}{x^3}$. *Відповідь.* $\frac{1}{3}$.

5. $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x-\mathrm{tg}x}$. *Відповідь.* $-\frac{1}{2}$.

6. $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$. *Відповідь.* $\frac{m}{n}a^{m-n}$.

7. $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}$. *Відповідь.* –2.

8. $\lim\limits_{x\to0}\frac{a^x-в^x}{x\sqrt{1-x^2}}$. *Відповідь.* $\ln\frac{a}{в}$.

9. $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$. *Відповідь.* 2.

10. $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\mathrm{tg}x}-e^x}{\mathrm{tg}x-x}$. *Відповідь.* 1.

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\pi-2\,\mathrm{arctg}x}{e^{3/x}-1}\right)$. *Відповідь.* $\frac{2}{3}$.

12. $\lim\limits_{x\to0}\frac{2-(e^x+e^{-x})\cos x}{x^4}$. *Відповідь.* $1/3$.

13. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a)}$. *Відповідь.* 1.

14. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^n e^{-x}\right)$. *Відповідь.* 0.

15. $\lim\limits_{\varphi\to a}\left(a^2-\varphi^2\right)\operatorname{tg}\frac{\pi\varphi}{2a}$. *Відповідь.* $\frac{4a^2}{\pi}$.

16. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cdot\operatorname{ctg}\pi x\right)$. *Відповідь.* $\frac{1}{\pi}$.

17. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\arcsin x\cdot\operatorname{ctg} x\right)$. *Відповідь.* 1.

18. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\cos x\right)\cdot\operatorname{ctg} x$. *Відповідь.* 0.

19. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x-\frac{1}{x}\right)$. *Відповідь.* 0.

20. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{(a+x)(в+x)(c+x)}-x\right)$. *Відповідь.* $\frac{a+в+c}{3}$.

21. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)\right)$. *Відповідь.* 1.

22. $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+x\right)^{\frac{1}{x}}$. *Відповідь.* e^2.

23. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$. *Відповідь.* $-\frac{1}{2}$.

24. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{p}{1-x^p}-\frac{q}{1-x^q}\right)$. *Відповідь.* $\frac{p-q}{2}$.

25. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)$. *Відповідь.* $\frac{2}{3}$.

26. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\pi-2x\right)^{\cos x}$. *Відповідь.* 1.

27. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos 2x\right)^{3/x^2}$. *Відповідь.* e^{-6}.

28. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+2^x\right)^{1/x}$. *Відповідь.* 2.

29. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$. *Відповідь.* $e^{1/3}$.

Застосувати формулу Тейлора або Маклорена в задачах:

1. Розкласти по степенях $x-2$ многочлен $x^4-5x^3+5x^2+x+2$.
Відповідь. $-7(x-2)-(x-2)^2+3(x-2)^3+(x-2)^4$.

2. Розкласти за степенями $x+1$ многочлен $x^5+2x^4-x^2+x+1$.
Відповідь. $(x+1)^2+2(x+1)^3-3(x+1)^4+(x+1)^5$.

3. Записати формулу Тейлора для функції $y=\sqrt{x}$ при $a = 1$, $n = 3$.

Відповідь. $\sqrt{x}=1+\frac{x-1}{1!}\cdot\frac{1}{2}-\frac{(x-1)^2}{2!}\cdot\frac{1}{4}+\frac{(x-1)^3}{3!}\cdot\frac{3}{8}-\ -\frac{(x-1)^4}{4!}\cdot\frac{15}{16}\left(1+\Theta(x-1)\right)^{-\frac{7}{2}},\quad 0<\Theta<1.$

4. Написати формулу Маклорена для функції $y=\sqrt{1+x}$ при $n = 2$.

Відповідь. $\sqrt{1+x} = 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{x^3}{16(1+\Theta x)^{\frac{5}{2}}}$, $0<\Theta<1$.

Користуючись формулою Тейлора, обчислити границі:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln^2(1+x)-\sin^2 x}{1-e^{-x^2}}$. *Відповідь.* 0.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2(\mathrm{tg}\,x-\sin x)-x^3}{x^5}$. *Відповідь.* $\frac{1}{4}$.

3. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$. *Відповідь.* 0.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\mathrm{ctg}\,x}{x}\right)$. *Відповідь.* $\frac{1}{3}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\mathrm{ctg}^2\,x\right)$. *Відповідь.* $\frac{2}{3}$.