Варіанти індивідуальних завдань

I.

1. Показати, що функція $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ спадає на інтервалі (–2, 1).

2. Показати, що коли функція $y = \sqrt{2x - x^2}$ зростає на інтервалі (0, 1), то вона спадає на інтервалі (1, 2). Побудувати графік цієї функції.

3. Показати, що функція $y = x^3 + x$ скрізь зростає.

4. Показати, що функція $y = \operatorname{arctg} x - x$ скрізь спадає.

5. Показати, що функція $y = \frac{x^2 - 1}{x}$ зростає на будь-якому інтервалі, в який не входить точка $x = 0$.

6. Показати, що функція $y = \frac{\sin(x + a)}{\sin(x + в)}$ змінюється монотонно на будь-якому інтервалі, в який не входять точки розриву функції.

7. Знайти інтервали монотонності функції $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 14$ та побудувати за точками її графік на інтервалі (–2, 4).
Відповідь. $(-\infty, -1)$ — зростає; $(-1, 3)$ — спадає; $(3, +\infty)$ — зростає.

Знайти інтервали монотонності функцій:

8. $y = x^4 - 2x^2 - 5.$
Відповідь. $(-\infty, -1)$ — спадає; $(-1, 0)$ — зростає; $(0, 1)$ — спадає; $(1, +\infty)$ — зростає.

9. $y = (x - 2)^5 (2x + 1)^4.$
Відповідь. $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ — зростає; $\left(-\frac{1}{2}, \frac{11}{18}\right)$ — спадає; $\left(\frac{11}{18}, +\infty\right)$ — зростає.

10. $y = 2 - 3x + x^3.$
Відповідь. На інтервалах $(-\infty, -1)$ та $(1, +\infty)$ функція зростає; на інтервалі (– 1, 1) — спадає.

11. $y = \left(x^2 - 1\right)^{3/2}.$
Відповідь. При $x > 1$ зростає; при $x < -1$ спадає.

12. $y = xe^{-x}.$
Відповідь. При $x < 1$ зростає; при $x > 1$ спадає.

13. $y = (2 - x)(x + 1)^2.$
Відповідь. При $|x| > 1$ спадає; при $|x| < 1$ зростає.

14. $y = \sqrt[3]{(2x - a)(a - x)^2} \quad (a > 0)$
Відповідь. $\left(-\infty, \frac{2}{3}a\right)$ — зростає; $\left(\frac{2}{3}a, a\right)$ — спадає; $(a, +\infty)$ — зростає.

15. $y = \frac{1 - x + x^2}{1 + x + x^2}.$
Відповідь. $(-\infty, -1)$ — зростає; $(-1, 1)$ — спадає; $(1, +\infty)$ — зростає.

16. $y = \frac{10}{4x^3 - 9x^2 + 6x}.$

Відповідь. $(-\infty, 0)$ — спадає; $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ — спадає; $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ — зростає; $(1, +\infty)$ — спадає.

17. $y = x - e^x.$

Відповідь. $(-\infty, 0)$ — зростає; $(0, +\infty)$ — спадає.

18. $y = x^2 e^{-x}.$

Відповідь. $(-\infty, 0)$ — спадає; $(0, 2)$ — зростає; $(2, +\infty)$ — спадає.

19. $y = \dfrac{x}{\ln x}.$

Відповідь. $(0, 1)$ — спадає; $(1, e)$ — спадає; $(e, +\infty)$ — зростає.

20. $y = 2x^2 - \ln x.$

Відповідь. $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ — спадає; $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ — зростає.

21. $y = (x - 2\sin x) \quad (0 \le x \le 2\pi).$

Відповідь. $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ — спадає; $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)$ — зростає; $\left(\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right)$ — спадає.

22. $y = 2\sin x + \cos 2x \quad (0 \le x \le 2\pi).$

Відповідь. $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ — зростає; $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$ — спадає; $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right)$ — зростає; $\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right)$ — спадає; $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ — зростає.

23. $y = x + \cos x.$

Відповідь. монотонно зростає.

24. $y = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right).$

Відповідь. монотонно зростає.

25. $y = x\sqrt{ax - x^2} \quad (a > 0).$

Відповідь. $\left(0, \frac{3}{4}a\right)$ — зростає; $\left(\frac{3}{4}a, a\right)$ — спадає.

Знайти екстремуми функцій:

26. $y = 2x^3 - 3x^2.$

Відповідь. $y_{\max}(0) = 0, \; y_{\min}(1) = -1.$

27. $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7.$

Відповідь. $y_{\max}(-1) = 17, \; y_{\min}(3) = -47.$

28. $y = \dfrac{3x^2 + 4x + 4}{x^2 + x + 1}.$

Відповідь. $y_{\max}(0) = 4, \; y_{\min}(-2) = \dfrac{8}{3}.$

29. $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 8}.$

Відповідь. $y_{\max}(0) = 2, \; y_{\min}(2) = \sqrt[3]{4}.$

30. $y = x^2\left(1 - x\sqrt{x}\right).$

Відповідь. $y_{\min}(0)=0,\ y_{\max}\left(2\sqrt[3]{2/49}\right)=\frac{12}{49}\sqrt[3]{\frac{4}{7}}$.

II.

Дослідити функції та побудувати їх графіки:

1. $y=\frac{x}{1+x^2}$.

Відповідь. Область визначення $(-\infty<x<+\infty)$. Графік симетричний відносно початку координат. $y_{\max}(1)=\frac{1}{2}$, $y_{\min}(-1)=-\frac{1}{2}$. Точки перегину $\left(-\sqrt{3},\ -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $(0,\ 0)$, $\left(\sqrt{3},\ \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$. Асимптота y = 0.

2. $y=\frac{x^2}{x^2-1}$.

Відповідь. Не визначена при $x=\pm 1$. Графік симетричний відносно осі ординат. $y_{\max}(0)=0$. При $x<-1$ зростає, при $x>1$ спадає. Графік не має точок перегину. Асимптоти $x=\pm 1,\ y=1$.

3. $y(x-1)(x-2)(x-3)=1$.

Відповідь. Визначена скрізь, крім значень $x=1,\ x=2,\ x=3.$ $y_{\max}\approx -2{,}6$ при $x\approx 2{,}58$, $y_{\min}\approx 2{,}6$ при $x\approx 1{,}42$. Точок перегину немає. Асимптоти $x=1,\ x=2,\ x=3,\ y=0.$

4. $y=\left(x^2-1\right)^3$.

Відповідь. Область визначення $(-\infty,+\infty)$. Графік симетричний відносно осі ординат. $y_{\min}(0)=-1;\ (1,0),\ (-1,0),\ \left(\pm\frac{\sqrt{5}}{2},-\frac{64}{125}\right)$ — точки перегину. Асимптот немає.

5. $y=\frac{x^3}{x^2-4}$.

Відповідь. Асимптоти $x=\pm 2,\ y=x$. Функція непарна. Графік проходить через початок координат. На інтервалі (– 2; 2) функція монотонно спадає. Екстремуми:

$$y_{\min}\left(2\sqrt{3}\right)=3\sqrt{3},\ y_{\max}\left(-2\sqrt{3}\right)=-3\sqrt{3}\ ,$$

точка перегину (0; 0). На інтервалах $(-\infty,-2)$ та (0, 2) графік функції опуклий, на інтервалах (–2, 0) та $(2,+\infty)$ — угнутий.

6. $y=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

Відповідь. $y_{\max}\left(e^2\right)=\frac{2}{e}$. Асимптота y = 0.

7. $y=16x(x-1)^3$.

Відповідь. $y_{\min}\left(\frac{1}{4}\right)=-\frac{27}{16},\ y_{\text{т.пер.}}(1)=0,\ y_{\text{т.пер}}\left(\frac{1}{2}\right)=-1$. Асимптот немає.

8. $y=\frac{1}{x}+4x^2$.

Відповідь. Визначена скрізь, крім $x=0$. $y_{\min}\left(\frac{1}{2}\right)=3$. Точка перегину $\left(-\frac{\sqrt[3]{2}}{2},\ 0\right)$. Асимптота $x = 0$.

9. $y=\dfrac{x^3}{3-x^2}$.

Відповідь. Визначена скрізь, крім $x=\pm\sqrt{3}$. Функція непарна. $y_{\max}(3)=-4{,}5$; $y_{\min}(-3)=4{,}5$. Точка перегину $(0,\ 0)$. Асимптоти $x=\pm\sqrt{3}$ та $x + y = 0$.

10. $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$.

Відповідь. Визначена скрізь, крім $x=-1$. $y_{\min}(-3)=-3\frac{3}{8}$. Точка перегину $(0,\ 0)$. Асимптоти $x = -1$ та $y=\frac{1}{2}x-1$.

11. $y(x^3-1)=x^4$.

Відповідь. Визначена скрізь, крім $x=1$. $y_{\max}(0)=0$, $y_{\min}\left(\sqrt[3]{4}\right)=\frac{4}{3}\sqrt[3]{4}$. Точка перегину $\left(-\sqrt[3]{2},\ -\frac{2}{3}\sqrt[3]{2}\right)$. Асимптоти $x = 1$ та $y=x$.

12. $y=\dfrac{x^3+2x^2+7x-3}{2x^2}$.

Відповідь. Визначена скрізь, крім $x=0$. $y_{\max}(1)=\frac{7}{2}$, $y_{\max}(-3)=-\frac{11}{6}$, $y_{\min}(2)=\frac{27}{8}$. Абсциса точки перегину графіка функції $x=\frac{9}{7}$. Асимптоти $x = 0$ та $y=\frac{1}{2}x+1$.

13. $(y-x)x^4+8=0$.

Відповідь. Визначена скрізь, крім $x=0$. $y_{\max}(-2)=-2{,}5$. Графік точок перегину немає. Асимптоти $x = 0$ та $y=x$.

14. $y=x^2e^{-x}$.

Відповідь. Область визначення $(-\infty,\ +\infty)$. $y_{\max}(2)=\frac{4}{e^2}$, $y_{\min}(0)=0$. Абсциса точки перегину графіка функції $x=2\pm\sqrt{2}$. Асимптота $y=0$.

15. $y=x-\ln(x+1)$.

Відповідь. Область визначення $(-1,\ +\infty)$. $y_{\min}(0)=0$. Графік не має точок перегину. Асимптота $x=-1$.

16. $y=x^2e^{-x^2}$.

Відповідь. Область визначення $(-\infty,+\infty)$. Функція парна $y_{\max}(\pm1)=\frac{1}{e}$, $y_{\min}(0)=0$. Абсциси точок перегину графіка функції $x=\pm\frac{\sqrt{5\pm\sqrt{17}}}{2}$. Асимптота $y=0$.

17. $y=x^3e^{-x}$.

Відповідь. Область визначення $(-\infty,\ +\infty)$. $y_{\max}(3)=\frac{27}{e^3}$. Абсциси точок перегину $x=0$, $x=3\pm\sqrt{3}$. Асимптота $y=0$.

18. $y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$.

Відповідь. Область визначення $(-\infty,\ -1)\cup(0,\ +\infty)$. На інтервалі $(-\infty,\ -1)$ функція зростає від e до ∞; на інтервалі $(0,\ +\infty)$ зростає від 1 до e. Графік складається з двох окремих віток. Асимптоти $y=e$ та $x=-1$.

19. $y = x + \sin x.$

Відповідь. Область визначення $(-\infty, +\infty).$ Екстремумів та асимптот не має. Функція непарна. Точки перегину $(k\pi, k\pi)$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots);$ в точках перегину графік перетинає пряму $y = x.$

20. $y = x \cdot \sin x.$

Відповідь. Область визначення $(-\infty, +\infty).$ Функція парна. Абсциси точок екстремуму задовольняють рівняння $\operatorname{tg} x = -x.$ Абсциси точок перегину задовольняють рівняння $x \operatorname{tg} x = 2.$ Асимптот не має.

21. $y = \cos x - \ln \cos x.$

Відповідь. Функція визначена на інтервалах $\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \ \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right),$ де $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$ Період $T = 2\pi.$ Функція парна. $y_{\min}(2k\pi) = 1.$ Графік не має точок перегину. Асимптоти $x = \frac{\pi}{2} + k\pi.$

22. $y = x - 2\operatorname{arctg} x.$

Відповідь. Область визначення $(-\infty, +\infty).$ Функція непарна. $y_{\max}(-1) = \frac{\pi}{2} - 1,$ $y_{\min}(1) = 1 - \frac{\pi}{2}.$ Точка перегину (0, 0). Асимптоти $y = x \pm \pi.$

23. $y = e^{\frac{1}{x^2 - 4x + 3}}.$

Відповідь. Визначена скрізь, крім $x = 1,$ $x = 3.$ $y_{\max}(2) = e^{-1}.$ Графік не має точок перегину. Асимптоти $x = 1,$ $x = 3,$ $y = 1.$

24. $y = \sqrt[3]{x^2} - x.$

Відповідь. Область визначення $(-\infty, +\infty).$ $y_{\max}\left(\frac{8}{27}\right) = \frac{4}{27},$ $y_{\min}(0) = 0.$ Графік не має точок перегину та асимптот.

25. $y^3 = x^2 (x^2 - 4)^3.$

Відповідь. Область визначення $(-\infty, +\infty).$ Функція парна. $y_{\max}(0) = 0,$ $y_{\min}(\pm 1) = -3.$ Графік не має точок перегину та асимптот.

26. $(3y + x)^3 = 27x.$

Відповідь. Область визначення $(-\infty, +\infty).$ Функція непарна. $y_{\max}(1) = \frac{2}{3},$ $y_{\min}(-1) = -\frac{2}{3}.$ Точка перегину (0, 0). Асимптот не має.

27. $y = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{x^2} + 1.$

Відповідь. Область визначення $(-\infty, +\infty).$ $y_{\max}(0) = 2,$ $y_{\min}(-1) = 0.$ Точка перегину $\left(-\frac{1}{2}, 1\right).$ Асимптота $y = 1.$

28. $(y - x)^2 = x^5.$

Відповідь. Область визначення $[0, +\infty).$ Функція двозначна. Функція $y = x + \sqrt{x^5}$ (верхня вітка графіка) монотонно зростає. Функція $y = x - \sqrt{x^5}$

(нижня вітка графіка) має максимум при $x = \frac{\sqrt[3]{20}}{5}$. Графік точок перегину та асимптот не має.

29. $y^2 = x^3 + 1.$

Відповідь. Визначена при $x \geq -1$, двозначна. Екстремумів не має. Графік симетричний відносно осі абсцис, має точки перегину (0, 1) та (0, –1). Асимптот не має.

30. $y = e^{\frac{1}{x}} - x.$

Відповідь. Визначена скрізь, крім $x = 0$. Екстремумів не має. Точка перегину $\left(-\frac{1}{2}, e^{-2} + \frac{1}{2}\right)$. Асимптоти $x = 0$, $x + y = 1$.