Практична робота 8-9

<u>Тема:</u> Монотонність та екстремум функції.

<u>Мета:</u> Навчитись досліджувати функцію на монотонність та екстремум.

Приклад. Знайти інтервали зростання та спадання функції

$$y = x\left(1+\sqrt{x}\right).$$

● Знайдемо похідну $y' = 1 + \frac{3}{2}\sqrt{x}$. Похідна додатна на проміжку $[0,+\infty)$. Таким чином, функція зростає на всій області означення.

Приклад. Дослідити на екстремум функцію $y = x \cdot \sqrt{1-x^2}$.

● Функція визначена при $-1 \le x \le 1$. Знайдемо першу похідну $y' = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$; $y' = 0$ при $1-2x^2 = 0$; звідси $x_1 = -1/\sqrt{2},\ x_2 = 1/\sqrt{2}$ (стаціонарні точки); y' не існує $(y' = \infty)$ при $x = \pm 1$, тобто на межах області визначення функції.

Знайдемо другу похідну: $y'' = \frac{x\left(2x^2-3\right)}{\left(1-x^2\right)^{3/2}}$.

Обчислимо значення другої похідної в стаціонарних точках:

$$y''\left(1/\sqrt{2}\right) = \frac{1(1-3)}{\sqrt{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{3/2}} < 0, \quad y''\left(-1/\sqrt{2}\right) = -\frac{1(1-3)}{\sqrt{2\left(1-\frac{1}{2}\right)^{3/2}}} > 0.$$

Отже, у точці $x = 1/\sqrt{2}$ функція має максимум

$$y_{\max} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2};$$

у точці $x = 1/\sqrt{2}$ — має мінімум:

$$y_{\min} = -\frac{1}{2}.$$

У критичних точках $x = \pm 1$ екстремуму немає, бо за означенням точками екстремуму можуть бути лише внутрішні точки області визначення функції.

Приклад. Знайти інтервали опуклості, угнутості та точки перегину кривої $f(x) = \left(x^2+7x\right)\sqrt[3]{x} - 5x - 8.$

Розв'язання. 1) ОВФ – вся числова вісь.

2) $$f'(x) = \frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}} + \frac{28}{3}x^{\frac{1}{3}} - 5;\ f''(x) = \frac{28}{9}x^{\frac{1}{3}} + \frac{28}{9}x^{\frac{2}{3}} = \frac{28}{9}\frac{x+1}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

3) Знаходимо критичні точки 2-го роду: $f''(x) = 0 \Rightarrow x+1 = 0; x_1 = -1;$

$f''(x) = \infty \Rightarrow \sqrt[3]{x^2} = 0; x_2 = 0.$ $x_1 = -1; x_2 = 0$ – критичні точки 2-го роду.

4) Відмічаємо критичні точки на ОВФ. Інтервали опуклості, угнутості: $(-\infty;-1),(-1;0),(0;+\infty)$.

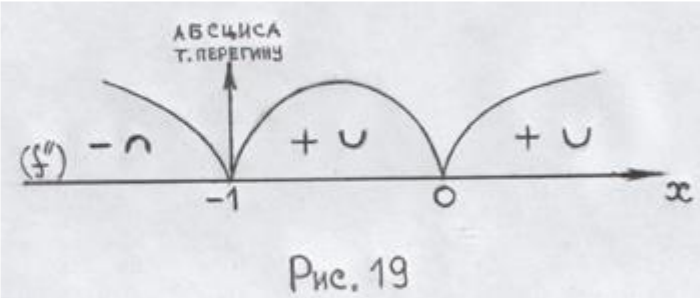

Рис. 19

5) Визначаємо знак похідної на кожному з цих інтервалів:

а) $f''(-2)=\dfrac{28}{9}\dfrac{-2+1}{\sqrt[3]{(-2)^2}}<0$ – крива опукла на інтервалі $(-\infty;-1)$;

б) $f''(-0{,}5)=\dfrac{28}{9}\dfrac{-0{,}5+1}{\sqrt[3]{(-0{,}5)^2}}>0$ – крива угнута на інтервалі (-1;0);

в) $f''(1)=\dfrac{28}{9}\dfrac{1+1}{\sqrt[3]{1^2}}>0$ – крива угнута на інтервалі $(0;+\infty)$.

6) Оскільки при переході через критичну точку $x_1=-1$ друга похідна змінює знак, то точка $x_1=-1$ є абсцисою точки перегину. При переході через критичну точку $x_2=0$ друга похідна не змінює знак, тому ця точка не є абсцисою точки перегину.

7) Знаходимо координати точки перегину:

$$f(-1)=\left((-1)^2+7(-1)\right)\sqrt[3]{-1}-5(-1)-8=6-3=3.$$

Точка перегину має координати P(-1;3).

Приклад. Знайти асимптоти кривої $y=\sqrt{x^3/(x-2)}$.

● Функція визначена на інтервалах $(-\infty,0)$ та $(2,+\infty)$. Із-за того, що $\lim\limits_{x\to 2+0}\sqrt{x^3/(x-2)}=+\infty$, пряма $x=2$ є вертикальною асимптотою кривої.

Визначимо тепер існування похилих асимптот:

1) $k_1=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^3/(x-2)}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x/(x-2)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1/\left(1-\dfrac{2}{x}\right)}=1,$

$$b_1=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-k_1x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-2}\right)}{\sqrt{x-2}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(x-x+2)}{\sqrt{x-2}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1-\dfrac{2}{x}}\left(1+\sqrt{1-\dfrac{2}{x}}\right)}=1;$$

2) $k_2=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{\dfrac{(-x)^3}{2-x}}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x\sqrt{\dfrac{x}{x-2}}}{x}=$

$$=-\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{1}{1-\dfrac{2}{x}}}=-1,$$

$$b_2 = \lim_{x\to-\infty}(f(x)-k_2x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}+x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\frac{(-x)^3}{2-x}}+x\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{-x}+x\sqrt{2-x}}{\sqrt{2-x}} = -\lim_{x\to-\infty}\frac{x(-x-2+x)}{\sqrt{2-x}\left(\sqrt{-x}+\sqrt{2-x}\right)} = -1.$$

Таким чином, існують права $y = x + 1$ та ліва $y = -x - 1$ похилі асимптоти кривої.

Приклад. Дослідити функцію $f(x) = \dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$ і побудувати графік.

Розв'язання. Маємо

1. $X = R \setminus \{1\}$,

2. $f(x)$ неперіодична. Оскільки $f(-x) = \dfrac{2x+1}{(x+1)^2}$, тобто $f(-x) \neq -f(x)$ і $f(-x) \neq f(x)$, то $f(x)$ ні парна, ні непарна.

3. $f'(x) = -\dfrac{2x}{(x-1)^3}, x_1 = 0.$

4. $f''(x) = -\dfrac{4x+2}{(x-1)^4}, x_2 = -\dfrac{1}{2}.$

5. Складемо таблицю:

x	$\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$	0	(0, 1)	1	$(1, \infty)$
$f'(x)$	-	-	-	0	+	∞	-
$f''(x)$	-	0	+	+	+	∞	+
$f(x)$		перегин $-8/9$		min -1		∞	

(щодо знаків у таблиці див. приклад в п. 1.2, 1 розділ III).

Знайдемо асимптоти. Вертикальною асимптотою є $x = 1$, а похилою - $y = kx + b$, де

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = ck = \lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{x(x-1)^2} = 0,$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{(x-1)^2} = 0.$$

Отже, $y = 0$.

6. Графік цієї функції зображено на рис. 2.

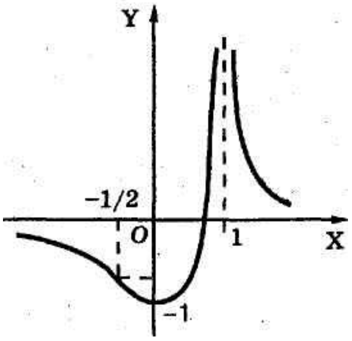

Рис. 2

Завдання для перевірки знань

1. Показати, що функція $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ спадає на інтервалі (–2, 1).

2. Показати, що коли функція $y = \sqrt{2x - x^2}$ зростає на інтервалі (0, 1), то вона спадає на інтервалі (1, 2). Побудувати графік цієї функції.

3. Показати, що функція $y = x^3 + x$ скрізь зростає.

4. Показати, що функція $y = \operatorname{arctg} x - x$ скрізь спадає.

5. Показати, що функція $y = \dfrac{x^2 - 1}{x}$ зростає на будь-якому інтервалі, в який не входить точка $x = 0$.

6. Показати, що функція $y = \dfrac{\sin(x + a)}{\sin(x + в)}$ змінюється монотонно на будь-якому інтервалі, в який не входять точки розриву функції.

7. Знайти інтервали монотонності функції $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 14$ та побудувати за точками її графік на інтервалі (–2, 4).
Відповідь. $(-\infty, -1)$ — зростає; $(-1, 3)$ — спадає; $(3, +\infty)$ — зростає.

Знайти інтервали монотонності функцій:

8. $y = x^4 - 2x^2 - 5.$
Відповідь. $(-\infty, -1)$ — спадає; $(-1, 0)$ — зростає; $(0, 1)$ — спадає; $(1, +\infty)$ — зростає.

9. $y = (x - 2)^5 (2x + 1)^4.$
Відповідь. $\left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right)$ — зростає; $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{11}{18}\right)$ — спадає; $\left(\dfrac{11}{18}, +\infty\right)$ — зростає.

10. $y = 2 - 3x + x^3$.
Відповідь. На інтервалах $(-\infty, -1)$ та $(1, +\infty)$ функція зростає; на інтервалі (– 1, 1) — спадає.

11. $y = \left(x^2 - 1\right)^{3/2}$.
Відповідь. При $x > 1$ зростає; при $x < -1$ спадає.

12. $y = xe^{-x}$.
Відповідь. При $x < 1$ зростає; при $x > 1$ спадає.

13. $y = (2 - x)(x + 1)^2$.

Відповідь. При $|x|>1$ спадає; при $|x|<1$ зростає.

14. $y=\sqrt[3]{(2x-a)(a-x)^2} \quad (a>0)$

Відповідь. $\left(-\infty,\ \frac{2}{3}a\right)$ — зростає; $\left(\frac{2}{3}a,\ a\right)$ — спадає; $(a,\ +\infty)$ — зростає.

15. $y=\frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}.$

Відповідь. $(-\infty,\ -1)$ — зростає; $(-1,\ 1)$ — спадає; $(1,\ +\infty)$ — зростає.

16. $y=\frac{10}{4x^3-9x^2+6x}.$

Відповідь. $(-\infty,\ 0)$ — спадає; $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$ — спадає; $\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$ — зростає; $(1,\ +\infty)$ — спадає.

17. $y=x-e^x.$

Відповідь. $(-\infty,\ 0)$ — зростає; $(0,\ +\infty)$ — спадає.

18. $y=x^2e^{-x}.$

Відповідь. $(-\infty,\ 0)$ — спадає; $(0,\ 2)$ — зростає; $(2,\ +\infty)$ — спадає.

19. $y=\frac{x}{\ln x}.$

Відповідь. $(0,\ 1)$ — спадає; $(1,\ e)$ — спадає; $(e,\ +\infty)$ — зростає.

20. $y=2x^2-\ln x.$

Відповідь. $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$ — спадає; $\left(\frac{1}{2},\ +\infty\right)$ — зростає.

21. $y=(x-2\sin x) \quad (0\le x\le 2\pi).$

Відповідь. $\left(0,\ \frac{\pi}{3}\right)$ — спадає; $\left(\frac{\pi}{3},\ \frac{5\pi}{3}\right)$ — зростає; $\left(\frac{5\pi}{3},\ 2\pi\right)$ — спадає.

22. $y=2\sin x+\cos 2x \quad (0\le x\le 2\pi).$

Відповідь. $\left(0,\ \frac{\pi}{6}\right)$ — зростає; $\left(\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2}\right)$ — спадає; $\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{5\pi}{6}\right)$ — зростає; $\left(\frac{5\pi}{6},\ \frac{3\pi}{2}\right)$ — спадає; $\left(\frac{3\pi}{2},\ 2\pi\right)$ — зростає.

23. $y=x+\cos x.$

Відповідь. монотонно зростає.

24. $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right).$

Відповідь. монотонно зростає.

25. $y=x\sqrt{ax-x^2} \quad (a>0).$

Відповідь. $\left(0,\ \frac{3}{4}a\right)$ — зростає; $\left(\frac{3}{4}a,\ a\right)$ — спадає.

Знайти екстремуми функцій:

26. $y=2x^3-3x^2.$

Відповідь. $y_{\max}(0)=0,\ y_{\min}(1)=-1.$

27. $y=2x^3-6x^2-18x+7.$

Відповідь. $y_{\max}(-1)=17,\ y_{\min}(3)=-47.$

28. $y=\dfrac{3x^2+4x+4}{x^2+x+1}.$

Відповідь. $y_{\max}(0)=4,\ y_{\min}(-2)=\dfrac{8}{3}.$

29. $y=\sqrt[3]{x^3-3x^2+8}.$

Відповідь. $y_{\max}(0)=2,\ y_{\min}(2)=\sqrt[3]{4}.$

30. $y=x^2\left(1-x\sqrt{x}\right).$

Відповідь. $y_{\min}(0)=0,\ y_{\max}\left(2\sqrt[3]{2/49}\right)=\dfrac{12}{49}\sqrt[3]{\dfrac{4}{7}}$ **.**

31. $y=x+\sqrt{3-x}$ **.**

Відповідь. $y_{\max}\left(\dfrac{11}{4}\right)=\dfrac{13}{4}$ **.**

32. $y=\ln\left(x^2+1\right).$

Відповідь. $y_{\min}(0)=0$ **.**

33. $y=(2x-1)\sqrt[3]{(x-3)^2}$ **.**

Відповідь. $y_{\min}(3)=0,\ y_{\max}(2)=3$ **.**

34. $y=-x^2\sqrt{x^2+2}.$

Відповідь. $y_{\max}(0)=0.$

35. $y=\dfrac{2}{3}x^2\ \sqrt[3]{6x-7}.$

Відповідь. $y_{\max}(0)=0,\ y_{\min}(1)=-\dfrac{2}{3}.$

36. $y=\dfrac{4\sqrt{3}}{9x\sqrt{1-x}}.$

Відповідь. $y_{\min}\left(\dfrac{2}{3}\right)=2.$

37. $y=\dfrac{1+3x}{\sqrt{4+5x^2}}.$

Відповідь. $y_{\max}\left(\dfrac{12}{5}\right)=\dfrac{\sqrt{205}}{10}.$

38. $y=\sqrt[3]{\left(x^2-a^2\right)^2}.$

Відповідь. $y_{\max}(0)=\sqrt[3]{a^4},\ y_{\min}(\pm a)=0.$

39. $y=x-\ln(1+x).$

Відповідь. $y_{\min}(0)=0.$

40. $y=x-\ln\left(1+x^2\right).$

Відповідь. монотонно зростає.

41. $y=(x-5)^2\ \sqrt[3]{(x+1)^2}.$

Відповідь. $y_{\max}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{81}{8}\sqrt[3]{18},\ y_{\min}(-1)=0,\ y_{\min}(5)=0.$

42. $y=\left(x^2-2x\right)\ln x-\frac{3}{2}x^2+4x.$

Відповідь. $y_{\max}(1)=2{,}5;\ y_{\min}(e)=\frac{e(4-e)}{2}\approx 1{,}76.$

43. $y=\frac{1}{2}\left(x^2+1\right)\operatorname{arctg}x-\frac{\pi}{8}x^2-\frac{x-1}{2}.$

Відповідь. $y_{\max}(0)=\frac{1}{2};\ y_{\min}(1)=\frac{\pi}{8}.$

44. $y=\frac{1}{2}\left(x^2-\frac{1}{2}\right)\arcsin x+\frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2}-\frac{\pi}{12}x^2.$

Відповідь. $y_{\max}(0)=0,\ y_{\min}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3\sqrt{3}-2\pi}{48}.$

45. $y=\frac{x}{2}-\sin^2 x$.

Відповідь. $y_{\max}=\frac{\pi-12+6\sqrt{3}}{24},\ y_{\min}=\frac{5\pi-12-6\sqrt{3}}{24}$.

46. $y=x\sin x+\cos x-\frac{1}{4}x^2\ \left(-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}\right).$

Відповідь. $y_{\max}\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)=\frac{6\pi\sqrt{3}-\pi^2+18}{36}\approx 1{,}13;\ y_{\min}(0)=1.$

47. $y=\left(\frac{1}{2}-x\right)\cos x+\sin x-\frac{x^2-x}{4}\ \left(0\le x\le\frac{\pi}{2}\right).$

Відповідь. $y_{\max}\left(\frac{1}{2}\right)=\sin\frac{1}{2}+\frac{1}{16},\ \ y_{\min}\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{36\sqrt{3}-12\pi\sqrt{3}+72-\pi^2+6\pi}{144}.$

За допомогою другої похідної знайти екстремуми функцій:

48. $y=x^3-2ax^2+a^2x\ \ (a>0).$

Відповідь. $y_{\max}\left(\frac{a}{3}\right)=\frac{4}{27}a^3,\ y_{\min}(a)=0.$

49. $y=x^2(a-x)^2.$

Відповідь. $y_{\max}\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{a^4}{16},\ y_{\min}(0)=0,\ y_{\min}(a)=0.$

50. $y=x+\frac{a^2}{x}\ \ (a>0).$

Відповідь. $y_{\max}(-a)=-2a,\ y_{\min}(a)=2a.$

51. $y=x+\sqrt{1-x}.$

Відповідь. $y_{\max}\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{5}{4}.$

52. $y=x+\sqrt{2-x^2}.$

Відповідь. $y_{\max}(1)=1,\ y_{\min}(-1)=-1.$

53. $y=\frac{x}{\ln x}.$

Відповідь. $y_{\min}(e)=e.$

54. При якому значенні a функція $f(x)=a\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x$ має екстремум при $x=\frac{\pi}{3}$? Який це буде екстремум: максимум чи мінімум?

Відповідь. При $a = 2$ максимум.

55. Знайти значення a та b, при яких функція $y=a\ln x+bx^2+x$ має екстремуми в точках $x_1=1$ та $x_2=2$. Показати, що при цих значеннях a та b задана функція має мінімум у точці x_1 та максимум у точці x_2.

Відповідь. $a=-\frac{2}{3},\ b=-\frac{1}{6}.$

56. З'ясувати, опукла чи вгнута крива $y=x^5-5x^3-15x^2+30$ в околі точок $P_1(1,\,11)$ та $P_2(3,\,3)$.

Відповідь. Опукла в околі точки P_1, вгнута в околі точки P_2.

57. З'ясувати, опукла чи вгнута крива $y=\operatorname{arctg}x$ в околі точок $P_1\left(1,\,\frac{\pi}{4}\right)$ та $P_2\left(-1,\,-\frac{\pi}{4}\right)$.

Відповідь. Опукла в околі точки P_1, вгнута в околі точки P_2.

58. З'ясувати, опукла чи вгнута крива $y=x^2\ln x$ в околі точок $P_1(1,\,0)$ та $P_2\left(\frac{1}{e^2},-\frac{2}{e^4}\right)$.

Відповідь. Опукла в околі точки P_2, вгнута в околі точки P_1.

59. Показати, що графік функції $y=x\operatorname{arctg}x$ скрізь вгнутий.

60. Показати, що графік функції $y=\ln\left(x^2-1\right)$ скрізь опуклий.

61. Показати, що крива $y=\frac{x+1}{x^2+1}$ має три точки перегину, які лежать на одній прямій.

62. Показати, що точки перегину кривої $y=x\sin x$ лежать на кривій $y^2\left(4+x^2\right)=4x^2$.

63. Показати, що точки перегину кривої $y=\frac{\sin x}{x}$ лежать на кривій $y^2\left(4+x^4\right)=4$.

64. При яких значеннях a та b точка (1,3) є точкою перегину кривої $y=ax^3+bx^2$?

Відповідь. $a=-\frac{3}{2},\ b=\frac{9}{2}.$

Знайти точки перегину кривих:

65. $y=(x-4)^5+4x+4$.

Відповідь. P (4; 20).

66. $y=(x-1)\sqrt[7]{(x-1)^6}$.

Відповідь. P (1; 0).

67. $y=x^4-8x^3+24x^2$.

Відповідь. Крива точок перегину не має.

Знайти точки перегину, інтервали вгнутості та опуклості графіків функцій.

68. $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 5.$

Відповідь. Точка перегину $\left(\frac{5}{3}, -\frac{250}{27}\right)$. Інтервали: опуклості — $\left(-\infty, \frac{5}{3}\right)$, угнутості — $\left(\frac{5}{3}, +\infty\right)$.

69. $y = (x+1)^4 + e^x.$

Відповідь. Точок перегину не існує, графік функції вгнутий.

70. $y = x + 36x^2 - 2x^3 - x^4.$

Відповідь. Точки перегину (– 3,294) та (2,114). Інтервали: опуклості — $(-\infty, -3)$, угнутості — $(-3, 2)$, опуклості — $(2, +\infty)$.

71. $y = 3x^5 - 5x^4 + 3x - 2.$

Відповідь. Точка перегину (1, –1). Інтервали: опуклості — $(-\infty, 1)$, угнутості — $(1, +\infty)$.

72. $y = \frac{x^3}{x^2 + 3a^2}$ $(a > 0).$

Відповідь. Точки перегину $\left(-3a, -\frac{9a}{4}\right)$, (0, 0), $\left(3a, \frac{9a}{4}\right)$. Інтервали: вгнутості — $(-\infty, 3a)$, опуклості — $(-3a, 0)$, угнутості — $(0, 3a)$, опуклості — $(3a, +\infty)$.

73. $y = a - \sqrt[3]{x - b}.$

Відповідь. Точка перегину (b, a). Інтервали: опуклості — $(-\infty, b)$, вгнутості — $(b, +\infty)$.

74. $y = e^{\sin x}\left(-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}\right).$

Відповідь. Точка перегину $\left(\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}, e^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right)$. Інтервали: угнутості — $\left(-\frac{\pi}{2}, \arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$, опуклості — $\left(\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

75. $y = \ln\left(1 + x^2\right).$

Відповідь. Точки перегину $(\pm 1, \ln 2)$. Інтервали: опуклості — $(-\infty, -1)$, угнутості — $(-1, 1)$, опуклості — $(1, +\infty)$.

76. $y = \frac{a}{x} \ln\frac{x}{a}$ $(a > 0).$

Відповідь. Точка перегину $\left(a\, e^{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2} e^{-\frac{3}{2}}\right)$. Інтервали: опуклості — $\left(0, a\, e^{\frac{3}{2}}\right)$, угнутості — $\left(a\, e^{\frac{3}{2}}, +\infty\right)$.

77. $y = a - \sqrt[5]{(x-b)^2}.$

Відповідь. Точок перегину не існує. Графік угнутий.

Знайти асимптоти кривих:

78. $y = \frac{1}{x^2 - 4x + 5}.$ *Відповідь.* $y = 0$.

79. $y = 2x - \frac{\cos x}{x}.$ *Відповідь.* $x = 0$; $y = 2x$.

80. $y=\dfrac{\ln^2 x}{x}-3x$. *Відповідь.* $x = 0$; $y = -3x$.

81. $y=\dfrac{1}{2}x+\operatorname{arctg}x$. *Відповідь.* $y=\dfrac{1}{2}x+\pi$; $y=\dfrac{1}{2}x$.

82. $y=c+\dfrac{a^3}{(x-b)^2}$. *Відповідь.* $x = b$, $y = c$.

83. $y=x\ln\left(e+\dfrac{1}{x}\right)$. *Відповідь.* $x=-\dfrac{1}{e}$, $y=x+\dfrac{1}{e}$.

84. $y=xe^{\frac{2}{x}}+1$. *Відповідь.* $x = 0$, $y = x + 3$.

85. $y=2x+\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}$. *Відповідь.* $y=2x\pm\dfrac{\pi}{2}$.

Дослідити функції та побудувати їх графіки:

86. $y=\dfrac{x}{1+x^2}$.

Відповідь. Область визначення $(-\infty<x<+\infty)$. Графік симетричний відносно початку координат. $y_{\max}(1)=\dfrac{1}{2}$, $y_{\min}(-1)=-\dfrac{1}{2}$. Точки перегину $\left(-\sqrt{3},-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $(0, 0)$, $\left(\sqrt{3},\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$. Асимптота $y = 0$.

87. $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$.

Відповідь. Не визначена при $x=\pm1$. Графік симетричний відносно осі ординат. $y_{\max}(0)=0$. При $x<-1$ зростає, при $x>1$ спадає. Графік не має точок перегину. Асимптоти $x=\pm1$, $y=1$.

88. $y(x-1)(x-2)(x-3)=1$.

Відповідь. Визначена скрізь, крім значень $x=1$, $x=2$, $x=3$. $y_{\max}\approx-2{,}6$ при $x\approx2{,}58$, $y_{\min}\approx2{,}6$ при $x\approx1{,}42$. Точок перегину немає. Асимптоти $x=1$, $x=2$, $x=3$, $y=0$.

89. $y=\left(x^2-1\right)^3$.

Відповідь. Область визначення $(-\infty,+\infty)$. Графік симетричний відносно осі ординат. $y_{\min}(0)=-1$; $(1,0)$, $(-1,0)$, $\left(\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2},-\dfrac{64}{125}\right)$ — точки перегину. Асимптот немає.

90. $y=\dfrac{x^3}{x^2-4}$.

Відповідь. Асимптоти $x=\pm2$, $y=x$. Функція непарна. Графік проходить через початок координат. На інтервалі (– 2; 2) функція монотонно спадає. Екстремуми:

$$y_{\min}\left(2\sqrt{3}\right)=3\sqrt{3},\ y_{\max}\left(-2\sqrt{3}\right)=-3\sqrt{3},$$

точка перегину (0; 0). На інтервалах $(-\infty,-2)$ та (0, 2) графік функції опуклий, на інтервалах (–2, 0) та $(2,+\infty)$ — угнутий.

91. $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

Відповідь. $y_{\max}\left(e^2\right) = \frac{2}{e}$. Асимптота $y = 0$.

92. $y = 16x(x-1)^3$.

Відповідь. $y_{\min}\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{27}{16}$, $y_{\text{т.пер}}(1) = 0$, $y_{\text{т.пер}}\left(\frac{1}{2}\right) = -1$. Асимптот немає.

93. $y = \frac{1}{x} + 4x^2$.

Відповідь. Визначена скрізь, крім $x = 0$. $y_{\min}\left(\frac{1}{2}\right) = 3$. Точка перегину $\left(-\frac{\sqrt[3]{2}}{2},\ 0\right)$. Асимптота $x = 0$.

94. $y = \frac{x^3}{3 - x^2}$.

Відповідь. Визначена скрізь, крім $x = \pm\sqrt{3}$. Функція непарна. $y_{\max}(3) = -4{,}5$; $y_{\min}(-3) = 4{,}5$. Точка перегину $(0,\ 0)$. Асимптоти $x = \pm\sqrt{3}$ та $x + y = 0$.

95. $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$.

Відповідь. Визначена скрізь, крім $x = -1$. $y_{\min}(-3) = -3\frac{3}{8}$. Точка перегину $(0,\ 0)$. Асимптоти $x = -1$ та $y = \frac{1}{2}x - 1$.

96. $y\left(x^3 - 1\right) = x^4$.

Відповідь. Визначена скрізь, крім $x = 1$. $y_{\max}(0) = 0$, $y_{\min}\left(\sqrt[3]{4}\right) = \frac{4}{3}\sqrt[3]{4}$. Точка перегину $\left(-\sqrt[3]{2},\ -\frac{2}{3}\sqrt[3]{2}\right)$. Асимптоти $x = 1$ та $y = x$.

97. $y = \frac{x^3 + 2x^2 + 7x - 3}{2x^2}$.

Відповідь. Визначена скрізь, крім $x = 0$. $y_{\max}(1) = \frac{7}{2}$, $y_{\max}(-3) = -\frac{11}{6}$, $y_{\min}(2) = \frac{27}{8}$. Абсциса точки перегину графіка функції $x = \frac{9}{7}$. Асимптоти $x = 0$ та $y = \frac{1}{2}x + 1$.

98. $(y - x)x^4 + 8 = 0$.

Відповідь. Визначена скрізь, крім $x = 0$. $y_{\max}(-2) = -2{,}5$. Графік точок перегину немає. Асимптоти $x = 0$ та $y = x$.

99. $y = x^2 e^{-x}$.

Відповідь. Область визначення $(-\infty,\ +\infty)$. $y_{\max}(2) = \frac{4}{e^2}$, $y_{\min}(0) = 0$. Абсциса точки перегину графіка функції $x = 2 \pm \sqrt{2}$. Асимптота $y = 0$.

100. $y = x - \ln(x+1)$.

Відповідь. Область визначення $(-1,\ +\infty)$. $y_{\min}(0) = 0$. Графік не має точок перегину. Асимптота $x = -1$.

101. $y = x^2 e^{-x^2}$.

Відповідь. Область визначення $(-\infty, +\infty)$. Функція парна $y_{\max}(\pm 1) = \frac{1}{e}$, $y_{\min}(0) = 0$. Абсциси точок перегину графіка функції $x = \pm\frac{\sqrt{5 \pm \sqrt{17}}}{2}$. Асимптота $y = 0$.

102. $y = x^3 e^{-x}$.

Відповідь. Область визначення $(-\infty, +\infty)$. $y_{\max}(3)=\frac{27}{e^3}$. Абсциси точок перегину $x=0,\ x=3\pm\sqrt{3}$. Асимптота $y=0$.

103. $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

Відповідь. Область визначення $(-\infty, -1)\cup(0, +\infty)$. На інтервалі $(-\infty, -1)$ функція зростає від *e* до ∞; на інтервалі $(0, +\infty)$ зростає від 1 до *e*. Графік складається з двох окремих віток. Асимптоти $y=e$ та $x=-1$.

104. $y=x+\sin x$.

Відповідь. Область визначення $(-\infty, +\infty)$. Екстремумів та асимптот не має. Функція непарна. Точки перегину $(k\pi, k\pi)$ $(k=0, \pm1, \pm2, \ldots)$; в точках перегину графік перетинає пряму $y=x$.

105. $y=x\cdot\sin x$.

Відповідь. Область визначення $(-\infty, +\infty)$. Функція парна. Абсциси точок екстремуму задовольняють рівняння $\operatorname{tg}x=-x$. Абсциси точок перегину задовольняють рівняння $x\operatorname{tg}x=2$. Асимптот не має.

106. $y=\cos x-\ln\cos x$.

Відповідь. Функція визначена на інтервалах $\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$, де $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$. Період $T=2\pi$. Функція парна. $y_{\min}(2k\pi)=1$. Графік не має точок перегину. Асимптоти $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$.

107. $y=x-2\operatorname{arctg}x$.

Відповідь. Область визначення $(-\infty, +\infty)$. Функція непарна. $y_{\max}(-1)=\frac{\pi}{2}-1$, $y_{\min}(1)=1-\frac{\pi}{2}$. Точка перегину (0, 0). Асимптоти $y=x\pm\pi$.

108. $y=e^{\frac{1}{x^2-4x+3}}$.

Відповідь. Визначена скрізь, крім $x=1$, $x=3$. $y_{\max}(2)=e^{-1}$. Графік не має точок перегину. Асимптоти $x=1, x=3, y=1$.

109. $y=\sqrt[3]{x^2}-x$.

Відповідь. Область визначення $(-\infty, +\infty)$. $y_{\max}\left(\frac{8}{27}\right)=\frac{4}{27}$, $y_{\min}(0)=0$. Графік не має точок перегину та асимптот.

110. $y^3=x^2\left(x^2-4\right)^3$.

Відповідь. Область визначення $(-\infty, +\infty)$. Функція парна. $y_{\max}(0)=0$, $y_{\min}(\pm1)=-3$. Графік не має точок перегину та асимптот.

111. $(3y+x)^3=27x$.

Відповідь. Область визначення $(-\infty, +\infty)$. Функція непарна. $y_{\max}(1)=\frac{2}{3}$, $y_{\min}(-1)=-\frac{2}{3}$. Точка перегину (0, 0). Асимптот не має.

112. $y=\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{x^2}+1$.

Відповідь. Область визначення $(-\infty, +\infty)$. $y_{\max}(0)=2$, $y_{\min}(-1)=0$. Точка перегину $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$. Асимптота $y = 1$.

113. $(y-x)^2 = x^5$.

Відповідь. Область визначення $[0, +\infty)$. Функція двозначна. Функція $y = x+\sqrt{x^5}$ (верхня вітка графіка) монотонно зростає. Функція $y = x-\sqrt{x^5}$ (нижня вітка графіка) має максимум при $x = \frac{\sqrt[3]{20}}{5}$. Графік точок перегину та асимптот не має.

114. $y^2 = x^3 + 1$.

Відповідь. Визначена при $x \geq -1$, двозначна. Екстремумів не має. Графік симетричний відносно осі абсцис, має точки перегину (0, 1) та (0, –1). Асимптот не має.

115. $y = e^{\frac{1}{x}} - x$.

Відповідь. Визначена скрізь, крім $x = 0$. Екстремумів не має. Точка перегину $\left(-\frac{1}{2}, e^{-2}+\frac{1}{2}\right)$. Асимптоти $x = 0$, $x + y = 1$.