**Лекція№5**

# Найбільше і найменше значення функції на відрізку. Технічні задачі на похідну.



## 1. Найбільше і найменше значення функції на відрізку

Якщо функція $f(x)$ неперервна на проміжку [*a*; *b*], то вона набуває на цьому проміжку свого найбільшого й найменшого значення.

Найбільше значення функції на проміжку [*a*; *b*] називається *абсолютним максимумом*, а найменше — *абсолютним мінімумом*.

Припустимо, що на даному проміжку функція $f(x)$ має скінченне число критичних точок. Якщо найбільше значення досягається в середині проміжку [*a*; *b*], то очевидно, що це значення буде одним із максимумів функції (якщо існує кілька максимумів), точніше — найбільшим максимумом. Однак можливо, що най-більше значення досягатиметься на одному з кінців проміжку.

Таким чином, **функція на відрізку [*a*, *b*] досягає свого найбільшого значення на одному з кінців цього проміжку або в такій точці його, яка є точкою максимуму**.

Аналогічне твердження можна сформулювати й про найменше значення функції: **воно досягається на одному з кінців даного проміжку або в такій внутрішній точці, яка є точкою мінімуму**.

*Правило.* Якщо треба знайти найбільше значення неперервної функції на проміжку [*a*, *b*], то необхідно:

1) знайти всі максимуми функції на проміжку;

2) визначити значення функції на кінцях проміжку, тобто обчислити *f* (*a*) і *f* (*b*);

3) з усіх отриманих значень функції вибрати найбільше: воно й буде найбільшим значенням функції на проміжку.

Аналогічно треба діяти і при визначенні найменшого значення функції на проміжку.

**Приклад.** Визначити на проміжку $\left[-3,\ \frac{3}{2}\right]$ найбільше й найменше значення функції $y = x^3 - 3x + 3$.

1. Знаходимо максимуми й мінімуми функції на проміжку $\left[-3,\ \frac{3}{2}\right]$:

$y' = 3x^2 - 3, 3x^2 - 3 = 0,\ \ x_1 = 1,\ \ x_2 = -1$;

$y'' = 6x,\ y''(1) = 6 > 0$.

Таким чином, у точці $x = 1$ маємо мінімум: $y_{\min}(1) = 1$.

Далі, $y''(-1) = -6 < 0$, тобто в точці $x = = -1$ маємо максимум: $y_{\max}(-1) = 5$.

2. Визначаємо значення функції на кінцях проміжку:

$$y\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{15}{8}, \quad y(-3)=-15.$$

3. Таким чином, найбільше значення заданої функції на проміжку $\left[-3, \frac{3}{2}\right]$ є: $y_{\text{найб}}=y_{\max}(-1)=5$, а найменше — $y_{\text{найм}}=y(-3)=-15$.

Графік функції зображено на рис. 1.

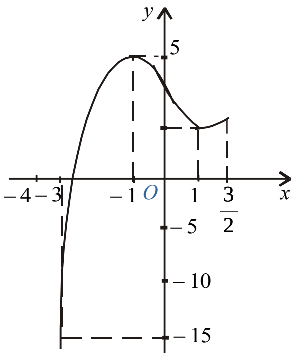


Рис. 1

## 2. Практичні задачі на знаходження найбільшого (найменшого) значення

Задачі на знаходження найбільшого (найменшого) значення деякої величини відіграють значну роль у природничих, технічних та економічних дослідженнях. Часто ці задачі зв'язані з доцільним і одночасно економним витрачанням тих чи інших матеріалів.

Розв'язання практичних (текстових) задач на екстремум рекомендуємо проводити згідно **такої схеми**:

***1.Визначити, для якої величини вимагається знайти найбільше (найменше) значення. Ця величина і буде досліджуваною функцією.***

***2.Скласти аналітичний вираз для досліджуваної функції.***

***3.Серед величин, від зміни яких залежить зміна функції, вибрати одну за незалежну змінну (за аргумент). Виразити досліджувану функцію через аргумент (для цього умови задачі повинні дати достатнє число співвідношень між змінними).***

***4.Із самої суті прикладної задачі встановити область визначення функції (проміжок зміни аргументу).***

***5.Розв'язати задачу на знаходження найбільшого (найменшого) значення функції на цьому проміжку (він може бути і необмеженим).***

**Доповнення до схеми** : 1) При розв'язанні текстових задач (особливо задач геометричного змісту) бажано зробити рисунок, який допоможе виразити змінні, що входять в умову задачі, через одну із них. 2) В прикладних задачах частіше всього трапляється випадок, коли всередині проміжку маємо тільки одну критичну точку. Якщо в цій точці неперервна функція має локальний максимум (мінімум), то він і є найбільше (найменше) значення. 3) Інколи міркування чисто фізичного або геометричного характеру дають можливість легко судити про те, яка критична точка дає максимум, а яка мінімум. Це звільняє від необхідності подальшого аналітичного дослідження на екстремум.

***Задача 1.*** Сума двох додатних чисел дорівнює ***a.*** Які мають бути ці числа, щоб їхній добуток був найбільшим?

***Розв'язання.*** Позначимо через ***x*** один із доданків. Тоді другий доданок дорівнює ***a–x*** . Якщо через ***f*** позначимо добуток цих доданків, то маємо $f = x(a-x) = ax - x^2.$ Задача звелась до знаходження найбільшого значення функції $f(x) = ax - x^2$ на проміжку (0;*a*). Знаходимо критичні точки функції *f(x):* $f'(x) = a - 2x;\ f'(x) = 0 \Rightarrow a - 2x = 0;\ x_0 = \dfrac{a}{2}$ – єдина критична (стаціонарна) точка, причому $x_0 \in (0;a)$ . Покажемо, що при $x_0 = \dfrac{a}{2}$ функція *f(x)* набуває максимального значення. Використаємо другу достатню ознаку екстремуму: $f''(x) = -2 < 0$ всюди (а значить і при $x_0 = \dfrac{a}{2}$ ). Тому при $x_0 = \dfrac{a}{2}$ функція досягає максимуму, який і буде найменшим значення функції *f(x)* на проміжку (0;*a*).

Отже, добуток двох додатних чисел, сума яких дорівнює ***a***, буде найбільшим, коли ці числа однакові (обидва доданки дорівнюють $\dfrac{a}{2}$).

***Задача 2.*** Знайти максимальну площу рівнобедреного трикутника, бічна сторона якого дорівнює ***l***.

***Розв'язання.*** Нехай ***x*** – висота трикутника (рис. 2). Площа трикутника $S = \dfrac{1}{2} OC \cdot AB.$ Оскільки $AB = 2AO = 2\sqrt{l^2 - x^2},$ то площа трикутника $S = S(x) = x\sqrt{l^2 - x^2}.$ Таким чином, площа трикутника виражена як функція його висоти. Потрібно знайти найбільше значення функції $S(x)$ на відрізку [0;*l*].

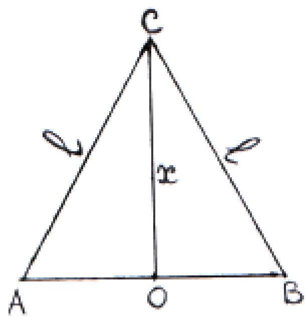


Рис. 2

Обчислимо значення функції на кінцях відрізка: $S(x)=0; S(l)=0$. Так як площа – величина невід'ємна, то функція *S(x)* досягає максимуму на інтервалі (0;*l*). Знайдемо критичні точки, які належать цьому інтервалу. Якщо ця точка єдина (а це дійсно так), то вона і буде точкою максимуму функції *S(x)* на інтервалі (0;*l*).

$$S'(x)=\sqrt{l^2-x^2}-x\cdot\frac{2x}{2\sqrt{l^2-x^2}}=\frac{l^2-2x^2}{\sqrt{l^2-x^2}};$$

$S'(x)=0 \Rightarrow l^2-2x^2=0; x=\pm\frac{l}{\sqrt{2}}$. Нас цікавить тільки критична (стаціонарна) точка $x_0=\frac{l}{\sqrt{2}}$, бо точка

$$x=-\frac{l}{\sqrt{2}}\notin(0;l). \quad S'(x)=\infty \Rightarrow \sqrt{l^2-x^2}=0; \quad x=\pm l\notin(0;l).$$

Отже, на інтервалі (0;*l*) знаходиться єдина критична (стаціонарна) точка, яка і буде точкою максимуму і одночасно точкою найбільшого значення функції. Обчислимо максимальну площу трикутника:

$$S_{\max}=S\left(\frac{l}{\sqrt{2}}\right)=\frac{l}{\sqrt{2}}\sqrt{l^2-\frac{l^2}{2}}=\frac{l^2}{2}(\text{кв.од}).$$

Максимальну площу буде мати прямокутний трикутник.

***Задача 3.*** Залізнична колія проходить по прямій ***AB=r.*** В стороні на відстані ***l*** від залізниці знаходиться завод ***C***, із якого перевозять вантаж в місто ***A.*** Завод потрібно з'єднати шосейною дорогою із залізницею. Вартість перевезень автотранспортом в 3 рази дорожча вартості перевезень залізницею. Виникає запитання: як провести шосе ***CP*** до залізниці, щоб вартість перевезень від заводу ***C*** до міста ***A*** була найменшою?

***Розв'язання.*** Припустимо, що ми перевозимо вантаж від заводу ***C*** спочатку автотранспортом до деякого пункту ***P*** на залізниці, а потім залізницею до міста ***A.*** Ясно, що шосейна дорога повинна бути прямолінійною, а пункт ***P*** не може лежати ліворуч точки ***B*** або праворуч точки ***A*** (рис. 3).

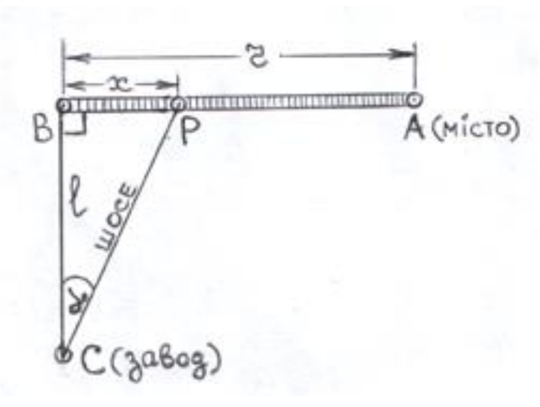

Рис. 3

Введемо позначення ***BP=x,*** тоді ***x*** змінюється в межах $0\le x\le r$, а шлях перевезення вантажу залізницею ***PA=r–x***.

Нехай ***k*** – вартість перевезень залізницею (вартість тонно-кілометра); тоді ***3k*** – вартість перевезень автотранспортом. Оскільки

$CP = \sqrt{l^2 + x^2}$, то загальна вартість перевезень вантажу ***W*** від заводу ***C*** до міста буде такою: $W(x) = k(r - x) + 3k\sqrt{l^2 + x^2}$. Так як ***k=const,*** то задача зводиться до знаходження найменшого значення функції $f(x) = r - x + 3\sqrt{l^2 + x^2}$ на відрізку [0;*l*]. Знайдемо критичні точки функції ***f(x)*** , які належать інтервалу (0;*l*).

$$f'(x) = -1 + \frac{3x}{\sqrt{l^2 + x^2}} = \frac{3x - \sqrt{l^2 + x^2}}{\sqrt{l^2 + x^2}};$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x - \sqrt{l^2 + x^2} = 0; 3x = \sqrt{l^2 + x^2};$$

$$9x^2 = l^2 + x^2; 8x^2 = l^2; x = \pm\frac{l}{\sqrt{8}}; x_1 = \frac{l}{\sqrt{8}}$$

– єдина критична (стаціонарна) точка, яка належить інтервалу (0;*l*), бо $x_2 = -\frac{l}{\sqrt{8}} \notin (0;l)$. Переконаємося, що це точка мінімуму функції ***f(x)*** . Знайдемо другу похідну функції ***f(x)***: $f''(x) = \frac{3l^2}{(l^2 + x^2)\sqrt{l^2 + x^2}}$. Очевидно, що $f''(x) > 0$ для всіх ***x***, в тому числі і для стаціонарної точки $x_1$. Тому згідно з другою достатньою ознакою екстремуму точка $x_1 = \frac{l}{\sqrt{8}}$ є точкою мінімуму функції $f(x)$. А оскільки ця стаціонарна точка єдина на [0;*l*], то вона одночасно є точкою, де функція ***f(x)*** досягає найменшого значення на відрізку [0;*l*].

Таким чином, транспортні витрати мінімальні, якщо вантаж перевозять шосейною дорогою до пункту ***P***, який знаходиться на відстані $\frac{l}{\sqrt{8}}$ від точки ***B.***

***Зауваження.*** В процесі розв’язання ніде не використовувалась величина ***r*** – відстань між точками ***B*** та ***A.*** Це означає, що завжди вигідно везти вантаж до залізниці під певним кутом $\alpha$, незалежно від того, на яку відстань він перевозиться. Цей кут залежить лише від співвідношення між вартостями перевезень залізницею і автотранспортом: $tg\alpha = \frac{x}{l} = \frac{l}{\sqrt{8} \cdot l} = \frac{1}{\sqrt{8}}$.

***Задача 4.*** Нехай витрати виробництва ***K(x)*** визначає функція $K(x) = x^3 - 8x^2 + 25x$, де $x$ – обсяг продукції $(0 < x < \infty)$. При якому значенні $x$ середні витрати виробництва мінімальні ?

***Розв'язання.*** Середні витрати виробництва розраховуємо згідно з формулою $\Pi(x) = \dfrac{K(x)}{x} = x^2 - 8x + 25$, де $0 < x < \infty$. Потрібно знайти найменше значення функції $\Pi(x)$ на заданому проміжку.

Знаходимо першу похідну: $\Pi'(x) = 2x - 8$. Знаходимо критичні точки функції $\Pi(x)$: $\Pi'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 8; x = 4$ – єдина критична (стаціонарна) точка. Покажемо, що в цій точці функція $\Pi(x)$ досягає мінімуму. Знайдемо другу похідну: $\Pi''(x) = 2 > 0$ для всіх $x$, а значить і для стаціонарної точки $x$=4. На підставі другої достатньої ознаки екстремуму ця точка є точкою мінімуму і одночасно точкою, в якій функція $\Pi(x)$ набуває найменшого значення.

Таким чином, мінімальні середні витрати виробництва складають:

$$\Pi_{\min} = \Pi(4) = 4^2 - 8 \cdot 4 + 25 = 9.$$