Практична робота 9-10

Тема: **Найбільше і найменше значення функції на відрізку. Технічні задачі на похідну.**

Мета: **Навчитись знаходити найбільше і найменше значення функції на відрізку. Вміти розв'язувати технічні задачі на похідну.**

Приклад. Знайти найбільше та найменше значення функції $f(x)=3x-x^2$ на відрізку $[-2{,}3]$.

- Знайдемо першу похідну $f'(x)=3-3x^2$ та стаціонарні точки: $3-3x^2=0$, тобто $x=\pm 1$. Визначимо значення функції в стаціонарних точках та на кінцях сегмента: f (1) = 2, f (– 1) = – 2; f (– 2) = 2, f (3) = – 18.

З одержаних чотирьох значень вибираємо найбільше та найменше: $f_{\text{найб}}=f_{\max}(1)=2,\ f_{\text{найм}}=f(3)=-18$.

Приклад. Дослідити на екстремум і монотонність функції $f(x)=x^3-3x+1$. Знайти найбільше й найменше значення $f(x)$ на $[0{,}2]$.

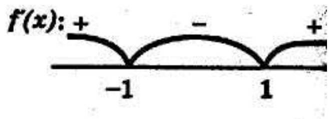

Рис. 1

Розв'язання. Очевидно $X=R$. Маємо. Отже $f'(x)=3x^2-3$, при $x_1=-1,\ x_2=1$ тобто $\{-1{,}1\}\subset R$. Точки x_1 і x_2 ділять область визначення $f(x)$ на три інтервали (рис. 1). Знак похідної в кожному інтегралі визначимо за її знаком у будь-якій точці цього інтервалу. Взявши, наприклад, $f'(-2)>0, f'(0)<0, f'(-2)>0$. На основі відповідних теорем про монотонність і екстремум функції маємо

$$f\uparrow \text{ при } x\in[-\infty;-1], \text{ і при } x\in[-\infty;-1);$$

$$f\downarrow \text{при } x\in[-1;1];$$

$$\max f(x)=f(-1)=3,\ \min f(x)=f(1)=-1.$$

Щодо найбільшого і найменшого значень, то, оскільки $\{-1\}\in[0{,}2]$, досить знайти $f(1)=-1, f(0)=1, f(2)=3.$. Отже,

$$\max_{x\in[0,2]} f(x)=f(-1)=3,\ \min_{x\in[0,2]} f(x)=f(1)=-1.$$

Розглянемо кілька задач практичного змісту:

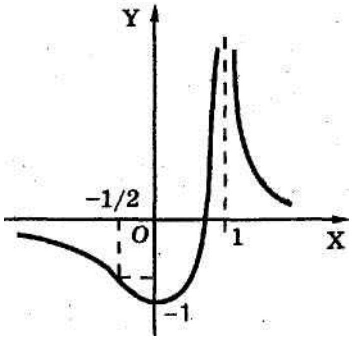

Рис. 2

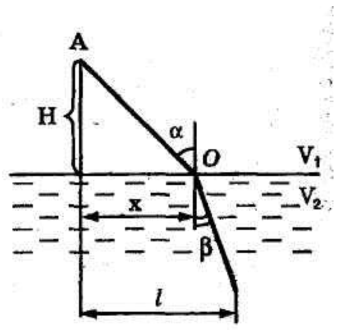

Рис. 3

Приклад. 1. Знайти форму променя світла. Який заломлюється на межі двох середовищ так, щоб з точки A в B точку (рис. 2) промінь пройшов найкоротший час (*принцип Ферма* для світла).

Розв'язання. Виходи темо з того, що в однорідному середовищі світло рухається по прямій зі сталою швидкістю. Його шлях у повітрі $AO = \sqrt{x^2 + H^2}$. При цьому промінь рухається зі швидкістю v_1. У воді шлях променя $OB = \sqrt{(l-x)^2 + h^2}$, а швидкість $v_2 (v_1 > v_2)$. Тоді перехід A в B здійсниться за час

$$t(x) = \frac{1}{v_1}\sqrt{H^2 + x^2} + \frac{1}{v_2}\sqrt{h^2 + (l-x)^2}.$$

Згідно з необхідною умовою екстремум

$$\frac{x}{v_1\sqrt{H^2 + x^2}} = \frac{l - x}{v_2\sqrt{h^2 + (l-x)^2}}.$$

Як бачимо на рис.9

$$\sin\alpha = x / \sqrt{H^2 + x^2}, \sin\beta = (l-1) / \sqrt{h^2 + (l-x)^2}.$$

Отже, $\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$.

Це є закон. Снneліуса для заломлення світла не межі двох середовищ. Оскільки закон встановлено експериментально, то підтверджується принцип Ферма на якому ґрунтується розв'язання задачі.

Достатні умови екстремуму тут не перевірено, бо це недоцільно, оскільки характер екстремуму зрозумілий з практичного змісту задачі.

Приклад. 2. Треба збудувати циліндричне нафтосховище заданого об'єму $V = \pi R^2 h$ (рис. 3) так, щоб витрати на спорудження його були найменшими.

Розв'язання. Витрати визначаються в основному вартістю матеріалів і трудомісткістю виготовлення. Зрозуміло, що обидва види витрат пропорційні площі поверхні циліндра.

Таким чином, за критерій оптимізації слід взяти площу поверхні циліндра $S = 2\pi R^2 + 2\pi Rh$.

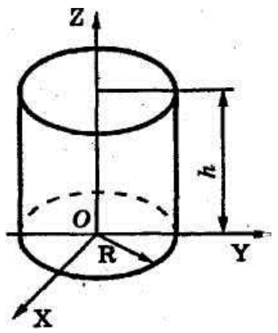

Рис. 3

Дістанемо функцію двох змінних R і h, на які накладено додаткову залежність. Оскільки об'єм заданий. Вилучаючи величину h двох рівностей, маємо

$$S(R) = 2\pi R^2 + 2V/R, \quad 0 < R < \infty.$$

Скористаємося необхідною умовою екстремуму $\left(S'(R) = 0\right)$. Маємо $4\pi R - 2V/R^2 = 0$, звідки $h = 2R$.

Оскільки $S''(R) = \left(4\pi + 4V/R^3\right) > 0 \forall R > 0,$ то $S(R)$. Має мінімум. Це єдиний екстремум $S(R)$ на відкритому інтервалі. Отже $S(R)$ при $h = 2R$ набуває найменшого значення для вказаного R.

Таким чином, висота циліндричного нафтосховища має дорівнювати його діаметру (якщо брати до уваги оптимізацію за вказаним критерієм).

Приклад. 3. Треба з найменшими затратами виготовити циліндричне відро, об'єм якого $V = \pi R^2 h$ (теж нафтосховище. Але менших розмірів і без верхньої кришки).

Розв'язання. Маємо $S(R) = \pi R^2 + 2V/R,\ S'(R) = 0$, звідки $R = h$.

Проте такі низькі відра не роблять. Річ у тім що великий резервуар складається з багатьох листів металу і загальна довжина зварних швів приблизно пропорційна його поверхні. Відро ж виготовляють з одного листа металу, вартість якого нижча вартості роботи із зварювання шва на бічній поверхні та її спряжені з дном. Загальна довжина шва не пропорційна поверхня.

Якщо виходити лише з трудомісткістю, ігноруючи вартість матеріалу. То відро має бути конічної форми. Саме так роблять пожежні відра. Вони мають кілька специфічних переваг над звичайними відрами, мають велику відкриту площу, через те, що центри має таких відер (разом з водою) розміщені високо.

Якщо зважати на вартість і трудомісткість виготовлення, то матимемо класичне відро у формі зрізаного конуса. Проте, коли відро (барило) виготовляти з дерев'яних клепок, де швів багато, то знайденій розв'язок правильний $(R = h)$.

Завдання для перевірки знань

Знайти найменше та найбільше значення функції на зазначеному інтервалі:

1. $y = x^4 - 2x^3 + 3;\ [-3,\ 2].$ *Відповідь.* $y_{\text{найм}} = 2,\ y_{\text{найб}} = 66.$

2. $y = x^4 - 2x^2 + 5;\ [-2,\ 2].$ *Відповідь.* $y_{\text{найм}} = 4,\ y_{\text{найб}} = 13.$

3. $y = x + 2\sqrt{x};\ [0,\ 4].$ *Відповідь.* $y_{\text{найм}} = 0,\ y_{\text{найб}} = 8.$

4. $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1;\ [-1,\ 2].$ *Відповідь.* $y_{\text{найм}} = -10,\ y_{\text{найб}} = 2.$

5. $y = x^3 - 3x^2 + 6x - 2;\ [-1,\ 1].$ *Відповідь.* $y_{\text{найм}} = -12,\ y_{\text{найб}} = 2.$

6. $y = \sqrt{100 - x^2};\ [-6,\ 8].$ *Відповідь.* $y_{\text{найм}} = 6,\ y_{\text{найб}} = 10.$

7. $y = \dfrac{1 - x + x^2}{1 + x - x^2};\ [0,\ 1].$ *Відповідь.* $y_{\text{найм}} = \dfrac{3}{5},\ y_{\text{найб}} = 1.$

8. $y = \dfrac{x - 1}{x + 1};\ [0,\ 4].$ *Відповідь.* $y_{\text{найм}} = -1,\ y_{\text{найб}} = \dfrac{3}{5}.$

9. $y = \sin 2x - x;\ \left[-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right].$ *Відповідь.* $y_{\text{найм}} = -\dfrac{\pi}{2},\ y_{\text{найб}} = \dfrac{\pi}{2}.$

10. $y = \sqrt[3]{\left(x^2 - 2x\right)^2};\ [0,\ 3].$ *Відповідь.* $y_{\text{найм}} = 0,\ y_{\text{найб}} = \sqrt[3]{9}.$

11. $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1 - x}{1 + x},\ [0,\ 1].$ *Відповідь.* $y_{\text{найм}} = 0,\ y_{\text{найб}} = \dfrac{\pi}{4}.$

12. Число 8 розбити на два такі доданки, щоб сума їх кубів була найменшою.
Відповідь. 4 та 4.

13. Число 36 розкласти на два такі множники, щоб сума їх квадратів була найменшою.
Відповідь. 6 та 6.

14. Об'єм правильної трикутної призми дорівнює V. Якою повинна бути сторона основи, щоб повна поверхня призми була найменшою?
Відповідь. $\sqrt[3]{4V}.$

15. Знайти співвідношення між радіусом R та висотою H циліндра, який при заданому об'ємі має найменшу повну поверхню.
Відповідь. $H = 2R.$

16. Знайти найбільший об'єм конуса з твірною l.

Відповідь. $V = \dfrac{2\pi l^3\sqrt{3}}{27}.$

17. Знайти найбільший об'єм циліндра, повна поверхня якого дорівнює S.

Відповідь. $V = \dfrac{S}{3}\sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}.$