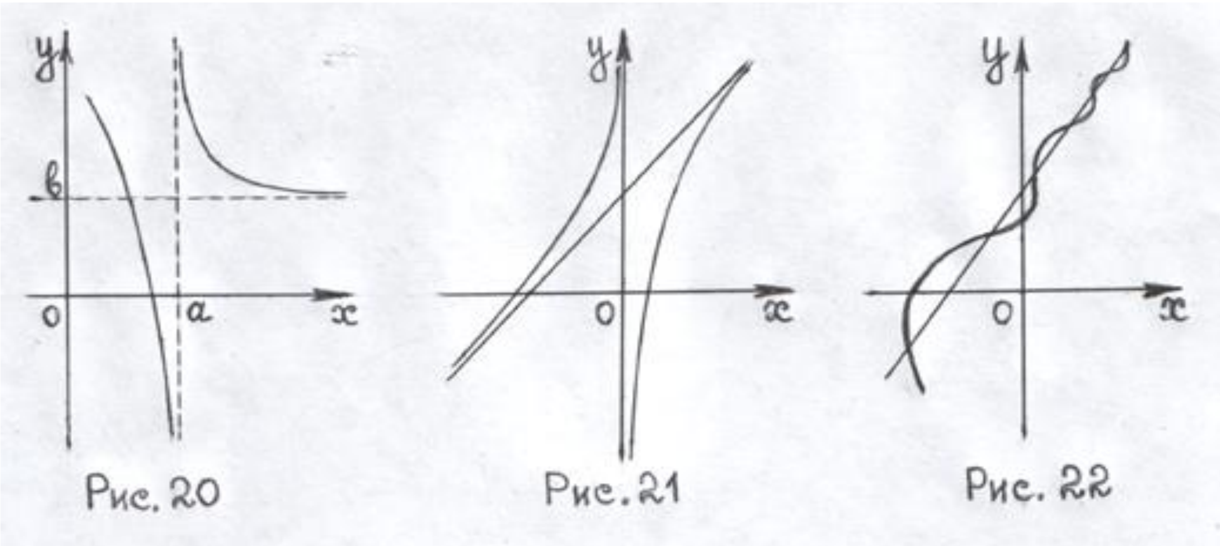
Самостійна робота 8

<u>Тема:</u> Загальна схема дослідження функції.

<u>Мета:</u> Знати загальну схему дослідження функції та побудови графіка.

1. Асимптоти кривої

При дослідженні функції і побудові її графіка важливо вияснити характер її поведінки в околі точок розриву і точок, де функція не визначена, а також вияснити її поведінку при $x \to +\infty$ та $x \to -\infty$. Інакше кажучи, важливо установити форму графіка функції при віддаленні його змінної (біжучої) точки М в нескінченність. Якщо при цьому графік функції необмежено наближається до деякої прямої, то цю пряму називають ***асимптотою кривої***, а саме



наближення – **асимптотичним**. З поняттям асимптоти ми вперше зустрілись в курсі аналітичної геометрії при дослідженні форми гіперболи. Узагальнимо це поняття на довільні криві.

Означення. Пряма називається *асимптотою кривої*, якщо відстань від біжучої точки М кривої до цієї прямої прямує до нуля, коли точка М рухається по кривій в нескінченність.

Крива може наближатися до своєї асимптоти тими ж способами, що і змінна до своєї границі, залишаючись з однієї сторони від асимптоти або з різних сторін, нескінченне число разів перетинаючи асимптоту і переходячи з однієї її сторони на другу (дивись рис. 20, 21, 22).

Розрізняють три види асимптот: *вертикальні, горизонтальні та похилі.* Найпростіше знайти асимптоти, паралельні осям координат, – вертикальні та горизонтальні.

Вертикальна асимптота паралельна осі *Oy*. Рівняння вертикальної асимптоти кривої *y=f(x)* має вигляд *x=a*, де *a* – значення аргументу, при якому функція *f(x)* обертається на нескінченність (терпить нескінченний розрив – дивись рис. 20). Інакше кажучи, для того щоб пряма *x=a* була вертикальною асимптотою кривої *y=f(x)* , необхідно і достатньо виконання хоча б однієї із умов

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=\infty \quad \text{або} \quad \lim_{x\to a-0} f(x)=\infty \quad \text{або} \quad \lim_{x\to a} f(x)=\infty. \qquad (1)$$

Таким чином, вертикальні асимптоти можуть бути або в точках нескінченних розривів функції, або на межах ОВФ. Причому границі знаходять ліворуч та праворуч від точки розриву. Для знаходження вертикальних асимптот потрібно знайти ті скінченні значення аргументу, при яких функція необмежено зростає за абсолютною величиною.

Додаткову інформацію відносно поведінки кривої при $x\to a$ можна дістати, якщо установити до чого прямує при цьому функція $f(x)$: до $+\infty$ чи до $-\infty$. Рис. 23 ілюструє всі можливі випадки (а їх чотири) поведінки функції *f(x)* при $x\to a$, де *x=a* – точка розриву 2-го роду.

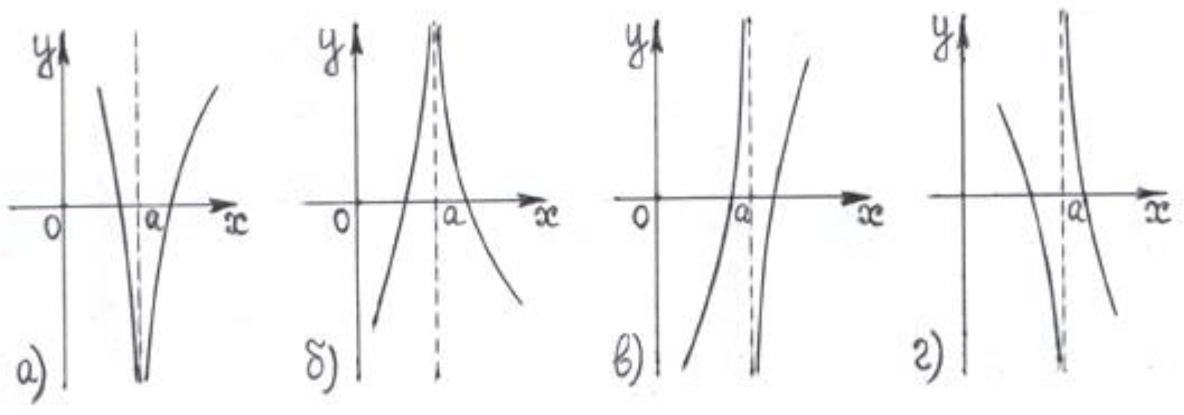


Рис. 23

Горизонтальна асимптота паралельна осі *Ox*. Пряма *y=b* є горизонтальною асимптотою кривої *y=f(x)*, якщо існує границя

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=b \quad \text{або} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=b\ . \qquad (2)$$

При $x \to +\infty$ асимптота називається правою горизонтальною, а при $x \to -\infty$ – лівою (рис. 20).

Похилі асимптоти. Питання про існування похилих асимптот вирішується за допомогою наступної теореми.

ТЕОРЕМА. *Для того щоб пряма* $y = kx + b$ *була похилою асимптотою графіка функції f(x) при* $x \to +\infty (x \to -\infty)$ *необхідно і достатньо існування границь*

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}; \quad b = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - kx], \tag{3}$$

(відповідно $k = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$; $b = \lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - kx]$) (4)

При $x \to +\infty$ асимптота називається правою похилою, а при $x \to -\infty$ – лівою.

Коментарі до теореми. 1. Якщо хоча б однієї із границь у кожному випадку (3) та (4) не існує, то крива *y=f(x)* похилих асимптот не має. 2. Горизонтальну асимптоту можна розглядати як частинний випадок похилої асимптоти при $k = 0, b \neq \infty$.

Цілком можливо, що одна із віток графіка функції має похилу асимптоту, а друга – ні, або ж кожна із віток має свою похилу асимптоту. Коли крива монотонно наближається до асимптоти, то слід постаратися вияснити (якщо це не важко), з якого боку від цієї асимптоти знаходиться крива. Для дослідження розміщення кривої відносно асимптоти потрібно окремо розглядати випадки, коли $x \to +\infty$ та $x \to -\infty$ і в кожному із цих випадків визначати знак різниці $\delta = f(x) - (kx + b)$. Якщо він буде додатним, то крива розміщена над асимптотою, а якщо від'ємним, то під асимптотою. Коли ж ця різниця не буде знакосталою, то крива буде коливатися біля своєї асимптоти.

Знання асимптот значно полегшує побудову графіка функції і дає повне уявлення про його поводження в нескінченності. Більше того, знаючи асимптоти (особливо коли є вертикальні і похилі), можна зробити ескіз графіка функції.

Приклад 1. Знайти асимптоти графіка функції $y = \dfrac{x}{x-1}$.

Розв'язання. 1) ОВФ: $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$ – вся числова вісь, крім точки розриву x=1. 2) Вертикальною асимптотою може бути лише пряма x=1, так як точка x=1 є точкою розриву 2-го роду. Знайдемо границі $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{x}{x-1}$ та $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{x}{x-1}$.

При $x\to 1-0$ (x наближається до 1 зліва) чисельник прямує до 1 , а знаменник, пряму до нуля, залишається весь час від'ємним і тому значення функції прямують до $-\infty$. Символічно запишемо це так: $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{x}{x-1} = \dfrac{1}{-0} = -\infty.$

При $x\to 1+0$ (x наближається до 1 справа) чисельник прямує до 1, а знаменник, прямуючи до нуля, залишається весь час додатним. В свою чергу, значення функції прямують до $+\infty$:

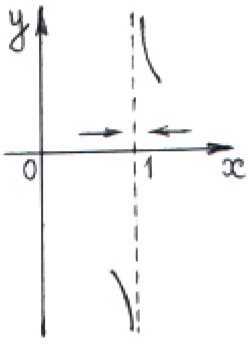


Рис. 24

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{x}{x-1} = \frac{1}{+0} = +\infty.$$

Отже, пряма x=1 є вертикальною асимптотою графіка функції.

Знаючи поведінку функції в околі точки розриву x=1, можна уже побудувати «кусок» графіка функції (дивись рис. 24)

3) Горизонтальні асимптоти. Оскільки існує границя $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x}{x-1} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x'}{(x-1)'} = \dfrac{1}{1} = 1,$ то пряма y=1 є горизонтальною асимптотою графіка функції.

4) Залишилось з'ясувати питання про існування похилих асимптот $y = kx + b.$ Для цього обчислимо

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{(x-1)x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x-1} = 0; \quad k = 0.$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \left[f(x) - kx \right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x-1} = 1; \quad b = 1.$$

Знову дістали рівняння горизонтальної асимптоти y=1 (як частинний випадок похилої при k=0).

Визначимо знак різниці $\delta = f(x) - (kx + b)$ при $x \to +\infty$ та $x \to -\infty.$

$$\delta = f(x) - (kx + b) = \frac{x}{x-1} - 1 = \frac{x - x + 1}{x-1} = \frac{1}{x-1}.$$

$\delta = \dfrac{1}{x-1} > 0$ при $x \to +\infty$ – крива розміщена над асимптотою;

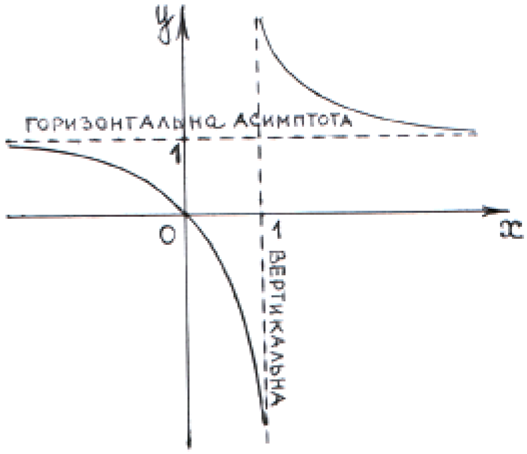


Рис. 25

$\delta = \dfrac{1}{x-1} < 0$ при $x \to -\infty$ – крива розміщена під асимптотою.

Здобута інформація дає змогу, доповнивши рис. 24, побудувати ескіз графіка даної функції (рис. 25).

Приклад 2. Знайти асимптоти графіка функції $y = \ln x.$

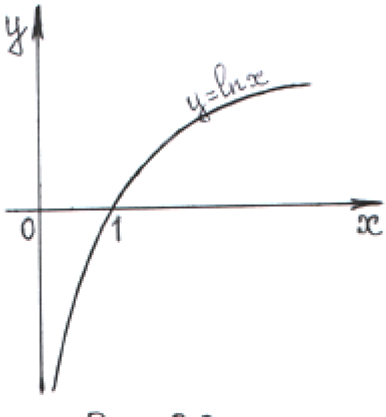


Рис.26

Розв'язання. 1) ОВФ: $(0;+\infty).$ 2) Вертикальні асимптоти. При підході до граничної точки x=0 функція необмежено спадає:

$\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty.$ Отже, пряма x=0 (вісь ординат) є вертикальною асимптотою графіка цієї функції. 3) Горизонтальні асимптоти. Оскільки

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty,$ то горизонтальних асимптот графік функції не має. 4) Похилі асимптоти $y = kx + b$ шукаємо тільки при $x \to +\infty$.

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)'}{x'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0;$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to+\infty} [\ln x - 0 \cdot x] = \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty.$$

А це означає, що графік функції $y = \ln x$ не має похилих асимптот (рис. 26).

Приклад 3. Знайти асимптоти кривої $y = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$.

Розв'язання. 1) ОВФ : $(-\infty;0) \cup (0;+\infty)$. Функція визначена на всій числовій осі *Ox*, крім точки x=0, де вона розривна.

2) Вертикальні асимптоти. Крива має вертикальну асимптоту *x=0,* так як *x=0* – це точка розриву 2-го роду. Дійсно, знайдемо границі:

$$\lim_{x\to+0} x \cdot e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \left| \begin{array}{l} \text{Заміна } t = \dfrac{1}{x}; \\ \text{коли } x \to +0, \\ \text{то } \quad t \to +\infty. \end{array} \right| = \lim_{t\to+\infty} \frac{e^t}{t} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{(e^t)'}{t'} = \lim_{t\to+\infty} e^t = +\infty;$$

$$\lim_{x\to-0} x \cdot e^{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to-\infty} \frac{e^t}{t} = \lim_{t\to-\infty} e^t = \lim_{t\to-\infty} \frac{1}{e^{-t}} = 0.$$

Пряма $x = 0$ – вертикальна асимптота даної кривої.

3) Горизонтальних асимптот крива не має, оскільки

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x \cdot e^{\frac{1}{x}} = +\infty; \ \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x \cdot e^{\frac{1}{x}} = -\infty.$$

4) Похилі асимптоти $y = kx + b,$ де $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1;\ k = 1;$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[xe^{\frac{1}{x}} - x \right] =$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = \left| \begin{array}{l} \text{Заміна } t = \dfrac{1}{x}; \\ \text{коли } t \to \pm\infty, \\ \text{то} \quad t \to 0. \end{array} \right| = \lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} =$$

$$= \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{t\to 0} \frac{(e^t - 1)'}{t'} = \lim_{t\to 0} \frac{e^t}{1} = 1; \quad b = 1.$$

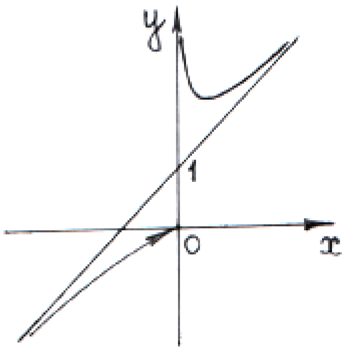


Рис. 27

Пряма $y = x + 1$ – похила асимптота даної кривої.

Графік функції $y = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$ схематично показаний на рис. 27.

2. Загальна схема дослідження функції та побудова її графіка

I. ***Елементарне дослідження функції.***

1. Знайти ОВФ.

2. З'ясувати, чи не є функція парною, непарною або періодичною.

3. Знайти (якщо це не важко) точки перетину графіка з координатними осями.

4. Знайти точки розриву (якщо вони існують) та вияснити характер розривів.

5. Знайти асимптоти графіка функції або довести, що їх немає.

II. ***Дослідження функції на монотонність та екстремум.***

1. Знайти першу похідну функції та критичні точки 1-го роду.

2. На ОВФ допоміжного рисунка відмітити критичні точки, установити інтервали монотонності функції і на кожному із них методом пробних точок за знаком першої похідної з'ясувати зростає чи спадає функція.

3. Знайти точки екстремуму за зміною знака першої похідної при переході через критичну точку 1-го роду.

4. Обчислити екстремальні значення функції.

5. У випадку дослідження функції на екстремум за допомогою другої похідної, знайти другу похідну і скористатися другою достатньою ознакою екстремуму.

III. ***Дослідження графіка функції на опуклість, угнутість та перегин.***

1. Знайти другу похідну функції та критичні точки 2-го роду.

2. Нанести критичні точки 2-го роду на ОВФ допоміжного рисунка і установити інтервали опуклості, угнутості кривої.

3. Методом пробних точок за знаком другої похідної визначити опукла чи угнута крива на кожному із цих інтервалів.

4. Знайти абсциси точок перегину за зміною знака другої похідної при переході через критичну точку 2-го роду.

5. Знайти точки перегину.

IV. ***Побудова графіка функції.***

1. Побудувати графік функції, враховуючи результати проведених досліджень в розділах I-III.

Зауваження. В процесі дослідження функції не обов'язково точно притримуватися наведеної схеми; інколи порядок дослідження зручно вибирати, виходячи із особливостей заданої функції. Більше того, при розв'язанні конкретної задачі окремі етапи цієї схеми можуть бути розширені, інші ж виявитися зайвими.

Приклад 1. Дослідити функцію $y = \dfrac{5 - x^2}{x + 3}$ та побудувати її графік.

Розв'язання. 1) Це дробово-раціональна функція, яка визначена і неперервна на всій осі *Ох* за винятком точки *х*=-3. Отже, ОВФ : $(-\infty;-3)\cup(-3;+\infty)$. 2) Так як ОВФ не симетрична відносно початку координат, то досліджувана функція ні парна, ні непарна; крім того, вона неперіодична. 3) Знайдемо точки перетину графіка функції з осями координат : а) з віссю *Ох:* $y=0 \Rightarrow 5-x^2=0; x=\pm\sqrt{5};$

$x_1=-\sqrt{5}; x_2=\sqrt{5}$ – нулі функції; $A\left(-\sqrt{5};0\right), B\left(\sqrt{5};0\right)$ – точки перетину графіка функції з віссю *Ох*; б) з віссю *Оу*: $x=0 \Rightarrow y=\frac{5-0}{0+3}=\frac{5}{3};$

$C\left(0;\frac{5}{3}\right)$ – точка перетину графіка функції з віссю *Оу*.

4) Дослідимо поведінку функції поблизу точки розриву $x=-3$. Знайдемо односторонні границі функції в точці $x=-3$:

$$\lim_{x\to-3-0}\frac{5-x^2}{x+3}=\frac{-4}{-0}=+\infty; \quad \lim_{x\to-3+0}\frac{5-x^2}{x+3}=\frac{-4}{+0}=-\infty.$$

Отже, $x=-3$ є точка розриву 2-го роду, тому пряма $x=-3$ є вертикальною асимптотою.

Залишається дослідити, як веде себе функція , коли $x\to+\infty$ та $x\to-\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5-x^2}{x+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(5-x^2\right)'}{(x+3)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x}{1}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5-x^2}{x+3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(5-x^2\right)'}{\left(x+3\right)'}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x}{1}=+\infty.$$

Так як при $x\to\pm\infty$ функція не має скінчених границь, то горизонтальних асимптот у даної кривої немає.

5) Шукаємо похилі асимптоти. Для того щоб вияснити, чи має графік функції похилі асимптоти, згадаємо, що коефіцієнти k та b рівняння $y = kx + b$ знаходяться із співвідношень

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}; \qquad b = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx].$$

Маємо (границі при $x \to +\infty$ та $x \to -\infty$ співпадають)

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{5 - x^2}{x(x+3)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\left(5 - x^2\right)'}{\left(x^2 + 3x\right)'} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(-2x)'}{(2x+3)'} = \frac{-2}{2} = -1;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{5 - x^2}{x+3} + x\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{5 - x^2 + x^2 + 3x}{x+3} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(5+3x)'}{(x+3)'} = \frac{3}{1} = 3.$$

Отже, $k = -1; b = 3$. Рівняння похилої асимптоти: $y = -x + 3$.

З’ясуємо питання про взаємне розташування графіка функції і похилої асимптоти відносно один одного. Складемо різницю

$$\delta = f(x) - (kx + b) = \frac{5 - x^2}{x+3} - (-x + 3) = \frac{5 - x^2}{x+3} + x - 3 = -\frac{4}{x+3}.$$

Знайдемо знак δ при $x \to -\infty$ та $x \to +\infty$.

$\delta = -\dfrac{4}{x+3} < 0$ при $x \to +\infty$ – крива розміщена під асимптотою.

$\delta = -\dfrac{4}{x+3} > 0$ при $x \to -\infty$ – крива розміщена над асимптотою.

6) Знаходимо першу похідну даної функції:

$$y' = \frac{-2x(x+3) - \left(5 - x^2\right)}{(x+3)^2} = -\frac{x^2 + 6x + 5}{(x+3)^2} = -\frac{(x+5)(x+1)}{(x+3)^2}.$$

7) Знаходимо критичні точки 1-го роду:

$y' = 0 \Rightarrow x_1 = -5; x_2 = -1$ – критичні (стаціонарні) точки 1-го роду. Похідна терпить розрив при x=-3, але ця точка не входить в ОВФ.

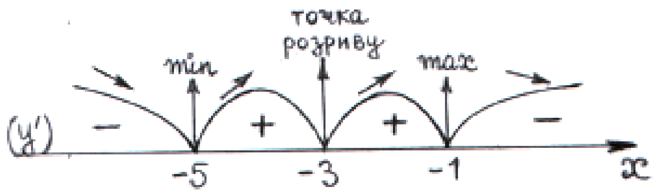


Рис. 28

8) Відмічаємо критичні точки на ОВФ (дивись допоміжний рис. 28).Цими точками та точкою розриву ОВФ ділиться на чотири інтервали монотонності:

$$(-\infty;-5), (-5;-3), (-3;-1), (-1;+\infty).$$

9) Методом пробних точок визначимо, зростає чи спадає функція на кожному з цих інтервалів:

$y'(-6) < 0$ – функція спадає на інтервалі $(-\infty;-5)$;

$y'(-4) > 0$ – функція зростає на інтервалі $(-5;-3)$;

$y'(-2) > 0$ – функція зростає на інтервалі $(-3;-1)$;

$y'(0) < 0$ – функція спадає на інтервалі $(-1;+\infty)$.

10) Дослідимо функцію на екстремум. При переході через точку $x = -5$ перша похідна змінює свій знак з «–» на «+», тому $x = -5$ – це точка мінімуму. При переході через точку $x = -1$ перша похідна змінює знак з «+» на «–», тому $x = -1$ – це точка максимуму.

11) Обчислимо екстремальні значення функції:

$$y_{\min} = y(-5) = \frac{5-(-5)^2}{-5+3} = \frac{5-25}{-2} = 10;$$

$$y_{\max} = y(-1) = \frac{5-(-1)^2}{-1+3} = \frac{5-1}{2} = 2$$

12) Знаходимо другу похідну функції: $y'' = -\frac{8}{(x+3)^3}$. Друга похідна в нуль ніде не перетворюється і зазнає розриву при $x = -3$, але ця точка не входить в ОВФ. Критичних точок 2-го роду функція не має, тому друга похідна може

змінювати знак тільки при переході через точку розриву $x=-3$. Інтервали опуклості, угнутості (рис. 29): $(-\infty;-3),(-3;+\infty)$.

13) Визначимо, опукла чи угнута крива па кожному інтервалі:

$y''(-4)>0$ – крива угнута на інтервалі $(-\infty;-3)$; $y''(0)<0$ – крива опукла на інтервалі $(-3;+\infty)$. Точок перегину функція не має.

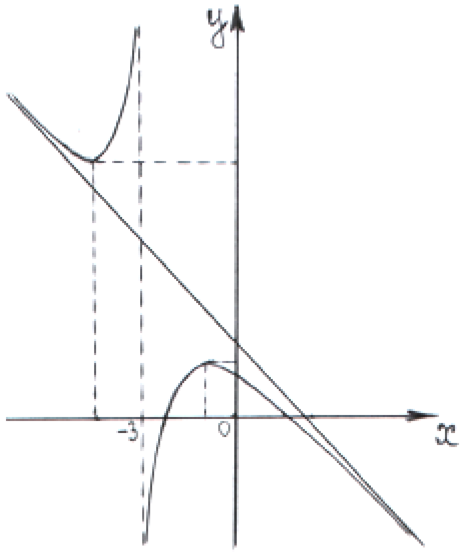


Рис.30

14) На основі знайдених даних побудуємо графік функції в такій послідовності: насамперед відмітимо на осі *Ox* характерні точки (точку розриву, нулі функції, точки екстремуму). На площині *Oxy* відмітимо точки графіка, які відповідають виділеним значенням аргументу; проведемо вертикальну та похилу асимптоти. Характер точки розриву визначає вигляд кривої поблизу цієї точки. Знання інтервалів зростання та спадання функції, інтервалів опуклості, угнутості допоможе нам точніше побудувати графік даної функції (дивись рис. 30).