Тема 6. Невизначений інтеграл. Методи інтегрування

1. Первісна функції.

Означення. Функція $F(x)$ називається *первісною* для функції $f(x)$ на проміжку X, якщо на цьому проміжку $F'(x) = f(x)$. З означення випливає, що первісна $F(x)$ — диференційовна, а значить неперервна функція на проміжку X.

Теорема 1. Якщо $F(x)$ — первісна для функції $f(x)$ на проміжку X, то будь-яка первісна $\Phi(x)$ для $f(x)$ може бути подана у вигляді $\Phi(x) = F(x) + C$ на цьому проміжку, де C=const – довільна стала.

Операція знаходження первісних для $f(x)$ називається *інтегруванням* функції. Задача інтегрування функції на проміжку X полягає у тому, щоб знайти всі її первісні, або довести, що вона не має первісних на цьому проміжку.

Для розв'язування задачі інтегрування функції достатньо знайти одну будь-яку первісну $F(x)$ на розглядуваному проміжку, тоді за теоремою 1 множина всіх первісних на цьому проміжку має вигляд $F(x) + C$.

2. Поняття невизначеного інтеграла.

Означення. Невизначеним інтегралом від функції $f(x)$ на проміжку X називається сукупність всіх первісних $F(x) + C$ для функції $f(x)$ на проміжку X, тобто

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \tag{1}$$

де $\int$ – знак невизначеного інтеграла, $f(x)$– підінтегральна функція, $f(x)dx$– підінтегральний вираз, dx — диференціал змінної інтегрування.

Геометричний зміст невизначеного інтеграла полягає в тому, що сукупність первісних $F(x) + C$ визначає сім'ю кривих, які утворюються одна з одної паралельним перенесенням уздовж осі ординат (рис.1).

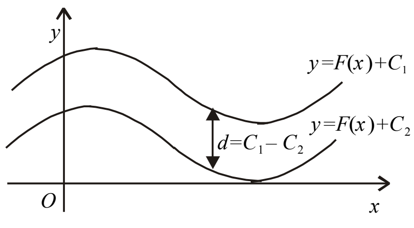

рис. 1

Теорема 2. Для існування невизначеного інтеграла для функції $f(x)$ на певному проміжку достатньо, щоб $f(x)$ була неперервною на цьому проміжку.

Зауваження. Виявляється, що є такі невизначені інтеграли від елементарних функцій, які через елементарні функції не виражаються, наприклад: $\int e^{-x^2}dx$, $\int \frac{\sin x}{x}$, $\int \frac{dx}{\ln x}$, $\int \cos x^2 dx$.

Ці інтеграли існують, але не виражаються через основні елементарні функції, тому їх називають інтегралами, що "не беруться".

3. Властивості і таблиця невизначених інтегралів.

Розглянемо основні властивості невизначеного інтеграла.

1). Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції: $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.

2). Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу: $d\int f(x)dx = f(x)dx$.

3). Невизначений інтеграл від диференціала функції дорівнює цій функції з точністю до сталої: $\int dF(x) = F(x) + C$.

4). Сталий множник можна виносити за знак інтеграла, тобто

$$\int k\cdot f(x)dx = k\cdot\int f(x)dx,\quad k\neq 0.$$

5). Невизначений інтеграл від суми двох функцій дорівнює сумі невизначених інтегралів від цих функцій, якщо вони існують, тобто

$$\int\left(f_1(x)+f_2(x)\right)dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx.$$

Таблиця основних інтегралів

1. $\int 0\cdot dx = C$; 2. $\int dx = x + C$; 3. $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha\neq -1$;

4. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$; 5. $\int e^x dx = e^x + C$; 6. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a\neq 1$;

7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$; 8. $\int \cos x dx = \sin x + C$;

9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$; 10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$;

11. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C$; 12. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C$;

13. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$; 14. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C$;

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C$;

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C = -\arccos \frac{x}{a} + C$;

17. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C$;

18. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + C$;

19. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$;

20. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + C$.

4. Основні методи інтегрування.

Розглянемо основні методи інтегрування: метод безпосереднього інтегрування, метод заміни змінної та метод інтегрування частинами.

Метод безпосереднього інтегрування

Цей метод базується на використанні властивостей невизначеного інтеграла 4) і 5). Розкладаючи підінтегральну функцію на доданки, заданий інтеграл зводиться до суми табличних інтегралів.

Приклад 1. Знайти інтеграли методом безпосереднього інтегрування:

а) $\int \sqrt[4]{x^3}\,dx$, б) $\int \left(2\sin x - \frac{3}{\cos^2 x}\right)dx$, в) $\int \frac{dx}{x^2+5}$.

Розв'язання. а) Використовуючи формулу 3 з таблиці інтегралів, дістанемо $\int \sqrt[4]{x^3}\,dx = \int x^{\frac{3}{4}}dx = \frac{x^{\frac{3}{4}+1}}{\frac{3}{4}+1} + C = \frac{x^{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}} + C = \frac{4}{7}x\cdot\sqrt[4]{x^3} + C$.

б) Використаємо властивість 5) невизначеного інтеграла і табличні інтеграли:

$$\int \left(2\sin x - \frac{3}{\cos^2 x}\right)dx = 2\int \sin x dx - 3\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = -2\cos x - 3\operatorname{tg} x + C.$$

в) За формулою 9 із таблиці невизначених інтегралів маємо:

$$\int \frac{dx}{x^2+5} = \int \frac{dx}{x^2+\left(\sqrt{5}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{5}} + C.$$

Метод заміни змінної (метод підстановки)

За допомогою цього метода заданий інтеграл шляхом заміни змінної зводять до такого інтеграла, який простіше інтегрується. Метод підстановки базується на використанні формул:

$$\int f(x)dx = \left| \begin{array}{l} x=\varphi(t) \\ dx=\varphi'(t)dt; \\ t=\varphi^{-1}(x) \end{array} \right| = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \qquad (2)$$

або

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = |\varphi(x)=t| = \int f(t)dt. \qquad (3)$$

Зауважимо, що формулу (3) зручно використовувати, коли підінтегральний вираз можна розкласти на два множники: $f(\varphi(x))$ та $\varphi'(x)dx$.

Приклад 2. Знайти інтеграли методом заміни змінної:

а) $\int \frac{dx}{-3x+2}$; б) $\int \mathrm{tg}x dx$; в) $\int 3x^2 e^{x^3} dx$.

<u>*Розв'язання*</u>. а) Зробимо заміну $t=-3x+2$. Тоді

$dt=(-3x+2)'dx=-3dx$, $dx=-\frac{1}{3}dt$, звідки дістаємо

$$\int \frac{dx}{-3x+2} = \int\left(-\frac{1}{3}\right)\frac{dt}{t} = -\frac{1}{3}\ln|t|+C = -\frac{1}{3}\ln|-3x+2|+C.$$

б) $\int \mathrm{tg}x dx = \int \frac{\sin x dx}{\cos x} = \left| \begin{array}{c} t=\cos x \\ dt=d(\cos x)=-\sin x dx \end{array} \right| = -\int \frac{dt}{t} =$

$$= -\ln|t|+C = -\ln|\cos x|+C.$$

в) $\int x^2 e^{x^3} dx = \left| \begin{array}{c} t=x^3, dt=d\left(x^3\right)=3x^2dx \\ x^2dx=\frac{1}{3}dt \end{array} \right| = \int \frac{1}{3}e^t dt = \frac{1}{3}e^t + C = \frac{1}{3}e^{x^3} + C$.

Зауваження. Інтегрування невизначеного інтеграла не залежить від того, якою є змінна інтегрування: незалежною змінною чи функцією (внаслідок інваріантності форми запису диференціала). Наприклад,

$$\left(\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C\right) \Rightarrow \left(\int (\sin x)^\alpha d(\sin x) = \frac{(\sin x)^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C.\right.$$

Тому в деяких випадках при застосуванні формули (3) заміну змінної роблять усно, використовуючи операцію внесення функції під знак диференціала. Якщо $\int f(u)du = F(u)+C$, то

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))\cdot d(\varphi(x)) = F(\varphi(x))+C.$$

Зокрема, коли φ(x) є лінійною функцією, тобто $\varphi(x)=ax+b,$ то:

$$\int f(ax+b)dx=\frac{1}{2}\int f(ax+b)\cdot d(ax+b)=\frac{1}{a}F(ax+b)+C.$$

Зазначимо, що під знак диференціала можна вносити будь-який сталий доданок, так як значення диференціала при цьому не зміниться:

$$d\varphi(x)=d(\varphi(x)+C).$$

Приклад 3. Знайти інтеграли:

а) $\int\sqrt{x-6}dx$; б) $\int\frac{dx}{5+3x}$; в) $\int\sin^3 x\cos xdx$.

Розв'язання. Внесемо під знак диференціала відповідну функцію, тоді

а) $\int\sqrt{x-6}dx=\int(x-6)^{\frac{1}{2}}d(x-6)=\frac{(x-6)^{\frac{3}{2}}}{3/2}+C=\frac{2\sqrt{(x-6)^3}}{3}+C$;

б) $\int\frac{dx}{5+3x}=\frac{1}{3}\int\frac{3dx}{5+3x}=\frac{1}{3}\int\frac{d(5+3x)}{5+3x}=\frac{1}{3}\ln|5+3x|+C$;

в) $\int\sin^3 x\cos xdx=\int\sin^3 xd(\sin x)=\frac{\sin^4 x}{4}+C$.

Метод інтегрування частинами

Метод інтегрування частинами базується на використанні формули

$$\int u\cdot dv=u\cdot v-\int vdu, \tag{4}$$

де функції $u=u(x)$ та $v=v(x)$ мають неперервні похідні.

На практиці функції $u(x)$ та $v(x)$ рекомендується вибирати так. Підінтегральний вираз $f(x)dx$ розбивають на два множники, тобто $f(x)dx=u\cdot dv$. Функція $u(x)$ вибирається так, щоб вона спрощувалась при диференціюванні, при цьому вираз dv повинен легко інтегруватись.

Методом інтегрування частинами зручно обчислювати такі інтеграли:

1) інтеграли виду $\int P(x)e^{kx}dx$, $\int P(x)\sin kxdx$, $\int P(x)\cos kxdx$, де $P(x)$ – многочлен, k – дійсне число, причому за u беруть множник $P(x)$, а за dv – вираз, що залишився;

2) інтеграли виду $\int P(x)\ln xdx$, $\int P(x)\arcsin xdx$, $\int P(x)\arccos xdx$, $\int P(x)arctgxdx$, $\int P(x)arcctgxdx$, в яких треба брати за $dv=P(x)dx$;

3) інтеграли виду $\int e^{kx}\sin\beta x dx$, $\int e^{kx}\cos\beta x dx$, де α, β – дійсні числа, після двократного застосування формули (4) утворюється рівняння відносно шуканого інтеграла, розв'язуючи яке, знаходимо інтеграл.

Приклад 4. Знайти інтеграли методом інтегрування частинами:

а) $\int x\sin x dx$, б) $\int xe^{7x}dx$, в) $\int x^2 \ln x dx$.

<u>*Розв'язання.*</u> За формулою (4) дістаємо:

$$\text{а) } \int x\sin x dx = \left| \begin{array}{l} u = x,\ du = dx, \\ dv = \sin x dx, \\ v = \int dv = \int \sin x dx = \\ = -\cos x \end{array} \right| = -x\cos x - \int(-\cos x)dx = -x\cos x + \sin x + C;$$

$$\text{б) } \int xe^{7x}dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & dv = e^{7x}dx \\ du = dx & v = \int e^{7x}dx = \frac{1}{7}e^{7x} \end{array} \right| = \frac{1}{7}xe^{7x} - \int \frac{1}{7}e^{7x}dx =$$

$$= \frac{1}{7}xe^{7x} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{7}e^{7x} + C = \frac{1}{49}e^{7x}(7x-1) + C.$$

$$\text{в) } \int x^2 \ln x dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & dv = x^2 dx \\ du = \frac{dx}{x} & v = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} \end{array} \right| = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \int \frac{1}{3}x^3 \frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{3}\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{x^3}{3\cdot 3} + C = \frac{x^3}{9}(3\ln x - 1) + C\cdot$$

Зауваження. В деяких випадках доводиться інтегрувати частинами кілька разів для того, щоб звести заданий інтеграл до табличного.

Приклад 5. Знайти інтеграли $\int x^2 e^{3x}dx$.

<u>*Розв'язання.*</u> а) Застосовуючи формулу (4) двічі, маємо:

$$\int x^2 e^{3x}dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2, du = 2xdx, \\ dv = e^{3x}dx, v = \frac{1}{3}e^{3x} \end{array} \right| = \frac{x^2}{3}e^{3x} - \frac{2}{3}\int xe^{3x}dx = \left| \begin{array}{l} u = x, du = dx, \\ dv = e^{3x}dx, v = \frac{1}{3}e^{3x} \end{array} \right| =$$

$$\frac{x^2}{3}e^{3x} - \frac{2}{3}\left(\frac{x}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}dx\right) = e^{3x}\left(\frac{x^2}{3} - \frac{2}{9}x + \frac{2}{27}\right) + C.$$