Україна
Національний університет біоресурсів
і природокористування України
Кафедра вищої та прикладної математики

ВИЩА МАТЕМАТИКА

ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

КИЇВ – 2015

УДК 517.52(0758)

Навчальний посібник містить теоретичний матеріал стосовно диференціального числення функцій однієї змінної, проілюстрований прикладами. Автори пропонують 60 варіантів індивідуальних завдань.

Рекомендовано Вченою ННІ Енергетики, автоматики і енергозбереження НУБіП України (протокол №8 від 24.09.2015р.)

Укладачі: Батечко Н.Г., Шостак С.В.

Рецензенти: д. т. н., професор Головач І.В.
к. б. н., доцент Залоїло І.А.

Навчальне видання

ВИЩА МАТЕМАТИКА

ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

Укладачі: БАТЕЧКО Ніна Григорівна
ШОСТАК Сергій Володимирович

Підписано до друку 06.10.2015 р. Зам. №______
Формат 60х90 1/16. Папір офсетний. Друк – різографія.
Наклад 50 пр. Ум. друк. арк. 7
Друк «ЦП «КОМПРИНТ», Свідоцтво ДК №4131, від 04.08.2011р.
м. Київ, вул. Предславинська, 28
528-05-42

§1. ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

Література: [1], §21; [2], гл.5, § 1-2.

1.1 Поняття похідної

Поняття похідної – фундаментальне поняття математичного аналізу, за допомогою якого досліджуються процеси і явища в природничих, соціальних та економічних науках. Зокрема, при застосуванні таких економічних понять, як попит, витрати виробництва, національний прибуток тощо, часто доводиться визначати швидкість зміни значень відповідних величин. Розв'язання таких задач ґрунтується на методах диференціального числення. Тому вивченню похідної слід приділити особливу увагу.

Нехай функція *y=f(x)* визначена і неперервна в деякому проміжку і нехай довільне значення x і точка $x+\Delta x$ належать цьому проміжку. Знайдемо відповідний приріст функції $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$. Тоді відношення $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ характеризує середню швидкість зміни функції на відрізку $[x, x+\Delta x]$. Щоб дістати більш точну характеристику зміни функції, розглянемо $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Якщо ця границя існує, то вона характеризує швидкість зміни функції в точці x.

Означення. Похідною функції $y = f(x)$ в точці x називається границя відношення приросту функції Δy в цій точці до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля.

За означенням

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Позначають так: $\underbrace{y', y'_x, f'(x),}_{\text{позначення Лагранжа}}$ $\underbrace{\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{df(x)}{dx}, \dfrac{d}{dx}f(x)}_{\text{позначення Лейбніца}}$

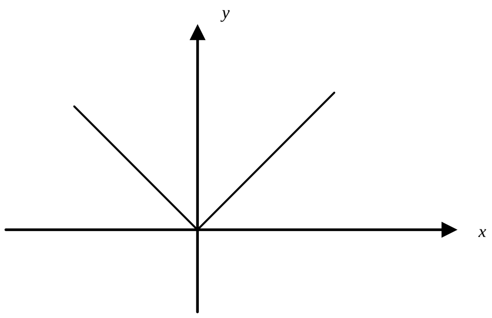
Термін «***похідна***» запровадив французький математик Лагранж. Якщо в точці x $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$, то $f'(x) = \infty$, якщо ж ця границя не існує, то не існує в цій точці і похідної.

Якщо границя (1) існує в кожній точці деякого проміжку, то похідна є функцією від x в цьому проміжку. Для даного фіксованого значення аргументу x похідна є певним числом.

Функцію, яка має скінченну похідну в точці x, називають диференційовною в точці x. Функція називається диференційовною в інтервалі, якщо вона диференційовна в кожній точці цього інтервалу. Операція знаходження похідної від функції називається диференціюванням цієї функції.

ТЕОРЕМА. *Якщо функція $y=f(x)$ диференційовна в точці x, то вона неперервна в цій точці.*

Обернене твердження, взагалі кажучи, не має місця, тобто з неперервності функції $y=f(x)$ в точці x не випливає її диференційовність. Так, наприклад, функція $y=|x|$ неперервна в точці $x=0$, але вона не має в цій точці похідної.



Отже, неперервність функції в точці є лише необхідною умовою її диференційовності в цій точці.

Геометричний зміст похідної. Значення похідної y' в точці x дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної, проведеної до графіка цієї функції у точці з абсцисою x. Отже, $y'(x)=tg\alpha=k$, де α – кут нахилу дотичної.

Механічний зміст похідної. Якщо функція $S=S(t)$ описує закон прямолінійного руху матеріальної точки, де S – шлях, t – час, то швидкість $V(t)$ в даний момент часу – це похідна від пройденого шляху $S(t)$: $V(t)=S'(t)$.

Узагальнюючи, можна сказати так: якщо функція $y=f(x)$ описує деякий фізичний процес, то похідна y' є швидкістю зміни цього процесу. В цьому полягає фізичний зміст похідної.

Економічний зміст похідної пояснимо на прикладі. Якщо позначити через $U(x)$ прибуток від продажу x одиниць товару, то границя $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta U(x)}{\Delta x}=U'(x)$ називається маргінальним (граничним) прибутком.

1.2. Безпосереднє диференціювання

Якщо похідна даної функції знаходиться згідно з означенням (за формулою (1)), тобто шляхом послідовного визначення $\Delta y, \frac{\Delta y}{\Delta x}$ і $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$, то такий спосіб знаходження похідної називається ***безпосереднім диференціюванням.***

Приклад 1. Користуючись способом безпосереднього диференціювання, знайти похідну функції $y=x^2$. Обчислити $y'(5)$.

Розв'язання. При значенні аргументу, що дорівнює x, маємо $f(x)=x^2$. При значенні аргументу, що дорівнює $x+\Delta x$, маємо $f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^2$. Знаходимо приріст функції:

$$\Delta y = f(x+\Delta x)-f(x) = (x+\Delta x)^2-x^2 =$$
$$= x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2-x^2 = 2x\Delta x+(\Delta x)^2.$$

Складаємо відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$: $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=2x+\Delta x.$

Знаходимо границю відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x\to 0,$ а саме

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=\left|\begin{array}{c}\text{границя залежить від } \Delta x\\ \text{і не залежить від } x\end{array}\right|=2x.\text{ Отже } y'=2x.$$

Якщо взяти $x=5$, то похідна $y'(5)=2\cdot 5=10.$

Приклад 2. Виходячи з означення похідної, знайти похідну функції $y=\sqrt{x}.$
Розв'язання. Знаходимо приріст функції

$$\Delta y = f(x+\Delta x)-f(x)=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}.$$

Складаємо відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$: $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}\cdot$ Таким чином,

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

1.3 Основні правила і формули диференціювання

Спосіб безпосереднього диференціювання громіздкий і досить складний. На практиці ним користуються рідко. Проте саме виходячи з означення похідної можна довести справедливість наступних правил і формул диференціювання елементарних функцій. Сукупність цих формул і таблиця похідних основних елементарних функцій утворюють канон диференціального числення, оскільки дають змогу досить просто і швидко знаходити похідні, не користуючись означенням похідної, тобто диференціювати довільну елементарну функцію, не вдаючись кожного разу до знаходження границі. Ці правила і таблицю похідних студент повинен твердо вивчити напам'ять для успішного опанування техніки диференціювання.

В усіх нижченаведених формулах *C* – стала величина; *u,v* – диференційовні функції аргументу *x*.

I. $(C)'_x = 0.$ Похідна сталої дорівнює нулеві.

II. $(x)'_x = 1.$ Похідна незалежної змінної дорівнює одиниці.

III. $(u \pm v \pm \cdots \pm w)' = u' \pm v' \pm \cdots \pm w'.$ (2)

Похідна алгебраїчної суми скінченного числа функцій дорівнює алгебраїчній сумі похідних цих функцій.

IV. $(u \cdot v)' = u'v + uv'.$ (3)

Похідна добутку двох функцій дорівнює похідній першої функції, помноженій на другу функцію, плюс перша функція, помножена на похідну другої.

V. $(C \cdot u)' = Cu'.$ (4)

Сталий множник можна виносити за знак похідної.

VI. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \quad$ за умови, що $v(x) \neq 0.$ (5)

Похідна частки дорівнює добутку похідної чисельника на знаменник мінус добуток чисельника на похідну знаменника; все ділиться на квадрат знаменника.

VII. ***Похідна складеної функції.*** Нехай *y* – функція від змінної *u*, а *u* в свою чергу функція від незалежної змінної *x*, тобто *y=f(u)* і $u=\varphi(x)$, причому значення $\varphi(x)$ не виходять за область визначення функції *f(u)*. Тоді *y*= $f[\varphi(x)]$ – складена функція від *x* (суперпозиція заданих функцій; функція від функції). Змінну $u = \varphi(x)$ називають ***проміжним аргументом,*** або внутрішньою функцією, а змінну *y=f(u)* – зовнішньою функцією.

До складених відносяться ті функції, у яких остання операція неарифметична. Нагадаємо, що арифметичних операцій чотири: додавання, віднімання, множення і ділення. Наведемо приклади.

1) $y = \ln^3 x = (\ln x)^3$. Дана функція є суперпозицією двох елементарних функцій – степеневої і логарифмічної:

$y = u^3$, де $u = \ln x$. Отже, це складена функція степеневого виду з проміжним аргументом $u = \ln x$.

2) $y = 5^{\cos x}$. Це складена функція показникового виду, оскільки її можна записати так: $y = 5^u$, де проміжний аргумент $u = \cos x$.

3) $y = \ln ctgx$. Проміжний аргумент $u = ctgx$. Сама функція $y = \ln u$ – складена, логарифмічного виду.

4) $y = \dfrac{2^x + x^5}{\arcsin x}$. Ця функція не є складеною, так як остання операція (ділення) арифметична.

Будь-яку елементарну функцію можна дістати із основних елементарних функцій за допомогою арифметичних дій, а також операції суперпозиції, тобто утворенням складеної функції. Тому надзвичайно важливе значення набуває правило диференціювання складеної функції. Сформулюємо його.

Правило диференціювання складеної функції з одним проміжним аргументом: *похідна складеної функції дорівнює добутку похідної цієї функції по проміжному аргументу на похідну від проміжного аргументу по незалежній змінній.*

Отже, похідна складеної функції знаходиться згідно з формулою

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x. \qquad (6)$$

Таблиця похідних основних елементарних функцій

1.	$\left(x^{n}\right)' = nx^{n-1}$ степенева функція	1.	$\left(u^{n}\right)' = nu^{n-1} \cdot u'_x$
1а.	$\left(x^{-1}\right)' = \left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$	1а.	$\left(u^{-1}\right)' = -\dfrac{1}{u^2} \cdot u'_x$
1б.	$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	1б.	$\left(u^{\frac{1}{2}}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'_x$
2.	$\left(a^{x}\right)' = a^{x} \cdot \ln a$ показникова функція	2.	$\left(a^{u}\right)' = a^{u} \cdot \ln a \cdot u'_x$
2а.	$\left(e^{x}\right)' = e^{x}$	2а.	$\left(e^{u}\right)' = e^{u} \cdot u'_x$
3.	$\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$	3.	$\left(\log_a u\right)' = \dfrac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'_x$
3а.	$\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$	3а.	$\left(\ln u\right)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'_x$
4.	$\left(\sin x\right)' = \cos x$	4.	$\left(\sin u\right)' = \cos u \cdot u'_x$
5	$\left(\cos x\right)' = -\sin x$	5.	$\left(\cos u\right)' = -\sin u \cdot u'_x$
6.	$\left(\mathrm{tg}\, x\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	6.	$\left(\mathrm{tg}\, u\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'_x$
7.	$\left(\mathrm{ctg}\, x\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	7.	$\left(\mathrm{ctg}\, u\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'_x$
8.	$\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	8.	$\left(\arcsin u\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'_x$
9.	$\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	9.	$\left(\arccos u\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'_x$
10.	$\left(\mathrm{arctg}\, x\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	10.	$\left(\mathrm{arctg}\, u\right)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'_x$
11.	$\left(\mathrm{arcctg}\, x\right)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$	11.	$\left(\mathrm{arcctg}\, u\right)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u''_x$

Доцільно ще раз підкреслити, що оскільки, по суті, на основі однієї цієї формули здійснюється диференціювання будь-якого виразу, то студенти не тільки повинні пам'ятати її напам'ять, але й уміти прочитати її словесно.

Якщо складена функція містить декілька проміжних аргументів, наприклад, $y = f(u), \quad u = \varphi(v), \quad v = \psi(x),$ то похідна від складеної функції по аргументу x дорівнює

$$y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x. \tag{7}$$

Це правило поширюється і на складені функції, які задаються ланцюжком із довільного скінченого числа проміжних аргументів. У цьому разі потрібно виконати наступні дії:
1) визначити вид складеної функції (функція якого виду – степеневого, логарифмічного, показникового, тригонометричного чи обернено тригонометричного);
2) занумерувати проміжні аргументи;
3) необхідне число разів скористатися правилом диференціювання складеної функції.

1.4. Практика диференціювання функцій

Насамперед подамо дві вказівки, якими неодноразово доведеться користуватись в подальшому.

Вказівка 1. *Перш ніж диференціювати функцію, вводимо дробові та від'ємні показники (коли це необхідно):*

$$\sqrt[q]{x^p} = x^{\frac{p}{q}}; \quad x > 0; \quad p,\, q \text{ – натуральні числа;} \quad \frac{1}{x^\alpha} = x^{-\alpha}; \quad x \neq 0.$$

Вказівка 2. *При диференціюванні складеної функції логарифмічного виду інколи потрібно, користуючись властивостями логарифмів, звести її до вигляду, зручного для диференціювання.*

В усіх нижченаведених прикладах знайти похідні вказаних функцій. **1)** $y = 5\sqrt[3]{x^2} + \frac{4}{3}x^2\sqrt[5]{x} - \frac{7}{x^4} + \ln x^5 - \arcsin x + 12\pi^2.$

Введемо дробові і від'ємні показники та скористаємось властивістю логарифма степеня :

$$y = 5x^{\frac{2}{3}} + \frac{4}{3}x^{\frac{11}{5}} - 7x^{-4} + 5\ln x - \arcsin x + 12\pi^2.$$

З огляду на формулу (2) можна записати:

$$y' = \left(5x^{\frac{2}{3}}\right)' + \left(\frac{4}{3}x^{\frac{11}{5}}\right)' - \left(7x^{-4}\right)' + \left(5\ln x\right)' - \left(\arcsin x\right)' + \left(12\pi^{2}\right)'.$$

Виносячи сталий множник за знак похідної і скориставшись таблицею похідних, дістанемо:

$$y' = 5\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} + \frac{4}{3}\cdot\frac{11}{5}x^{\frac{11}{5}-1} - 7(-4)x^{-4-1} + 5\cdot\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}} + 0 =$$

$$= \frac{10}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{44}{15}x^{\frac{6}{5}} + 28x^{-5} + \frac{5}{x} - \frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}} =$$

$$= \frac{10}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{44}{15}\sqrt[5]{x^{6}} + \frac{28}{x^{5}} + \frac{5}{x} - \frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}.$$

2) $y = \left(x^{5}+1\right)tgx.$ Застосуємо формулу похідної добутку двох функцій (3) і таблицю похідних, будемо мати

$$y' = \left(x^{5}+1\right)' tgx + \left(x^{5}+1\right)\left(tgx\right)' = 5x^{4}\cdot tgx + \left(x^{5}+1\right)\cdot\frac{1}{\cos^{2}x}.$$

3) $y = \frac{2^{x}}{\left(\sqrt{x}+\cos x\right)}$. Застосуємо формулу похідної частки двох функцій (5) і таблицю похідних:

$$y' = \frac{\left(2^{x}\right)'\cdot\left(\sqrt{x}+\cos x\right) - 2^{x}\left(\sqrt{x}+\cos x\right)'}{\left(\sqrt{x}+\cos x\right)^{2}} =$$

$$= \frac{2^{x}\ln 2\left(\sqrt{x}+\cos x\right) - 2^{x}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \sin x\right)}{\left(\sqrt{x}+\cos x\right)^{2}}.$$

Перейдемо тепер до диференціювання складених функцій.

4) $y=\sqrt[3]{2x^2+7x-4}.$ Спочатку перепишемо дану функцію, ввівши дробовий показник: $y=\left(2x^2+7x-4\right)^{\frac{1}{3}}.$

Це складена функція степеневого виду з проміжним аргументом

$u=2x^2+7x-4.$ Її можна записати так: $y=u^{\frac{1}{3}}$, де $u=2x^2+7x-4.$

Застосуємо правило диференціювання складеної функції (формулу (6)):

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x=\frac{1}{3}u^{\frac{1}{3}-1}\cdot u'_x=\frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}\cdot u'_x.$$

Остаточно, замінивши u його значенням, дістанемо

$$y'=\underbrace{\frac{1}{3}\left(2x^2+7x-4\right)^{-\frac{2}{3}}}_{y'_u}\cdot\underbrace{\left(2x^2+7x-4\right)'}_{u'_x}=$$

$$=\frac{1}{3}\left(2x^2+7x-4\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(4x+7\right)=\frac{4x+7}{3\sqrt[3]{\left(2x^2+7x-4\right)^2}}.$$

5) $y=\sin^5 x.$ Оскільки $\sin^5 x=\left(\sin x\right)^5$, то маємо справу з диференціюванням функції $y=\left(\sin x\right)^5$. Останньою дією для цієї функції є піднесення до степеня, тому це складена функція степеневого виду $y=u^5$ з проміжним аргументом $u=\sin x.$ Тоді згідно з правилом диференціювання складеної функції маємо

$y'_x=y'_u\cdot u'_x=5u^4\cdot u'_x,$ або, беручи до уваги, що $u=\sin x$, остаточно дістанемо $y'=\underbrace{5\left(\sin x\right)^4}_{y'_u}\cdot\underbrace{\left(\sin x\right)'}_{u'_x}=5\sin^4 x\cdot\cos x.$

6) $y=\ln arctgx.$ Для даної функції $y=\ln\left(arctgx\right)$ останньою дією є взяття натурального логарифма. Ця дія звершується над функцією $\mathrm{arctg}x.$ Тому проміжний аргумент $u=arctgx.$ У такому разі $y=\ln u,$ де $u=\mathrm{arctg}x.$ На підставі формули диференціювання складеної функції (6) можна записати $y'_x = y'_u \cdot u'_x = \frac{1}{u} \cdot u'_x.$ Оскільки $u = arctgx,$ то похідна набуває вигляду

$$y' = \underbrace{\frac{1}{\mathrm{arctg}\,x}}_{y'_u}\underbrace{(\mathrm{arctg}\,x)'}_{u'_x} = \frac{1}{\mathrm{arctg}\,x} \cdot \frac{1}{1+x^2}.$$

Слід зауважити, що до такого детального запису відшукання похідної складеної функції вдаються лише на початковій стадії освоєння техніки диференціювання. Набувши певних навичок застосування правил диференціювання, позначення проміжних аргументів можна опускати (вводити їх подумки).

7) $y = \ln \sqrt[4]{\frac{5x^3-2}{x^2-7}}.$ У даному випадку маємо справу із складеною функцією логарифмічного виду. Диференціювання її у такому вигляді приводить до вельми громіздких викладок. Беручи до уваги вказівку 2, надамо функції іншого вигляду, зручного для диференціювання:

$$y = \ln\left(\frac{5x^3-2}{x^2-7}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}\left[\ln\left(5x^3-2\right) - \ln\left(x^2-7\right)\right].$$

Диференціюючи, дістанемо

$$y' = \frac{1}{4}\left[\left(\ln\left(5x^3-2\right)\right)' - \left(\ln\left(x^2-7\right)\right)'\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{5x^3-2}\left(5x^3-2\right)' - \frac{1}{x^2-7}\left(x^2-7\right)'\right] = \frac{1}{4}\left(\frac{15x^2}{5x^3-2} - \frac{2x}{x^2-7}\right).$$

8) $y = e^{-3x} \cdot ctg \ln x.$ Функція задана добутком двох складених функцій. Згідно з формулою (3) маємо

$$y=\left(e^{-3x}\right)'ctg\ln x+e^{-3x}\left(ctg\ln x\right)'=e^{-3x}(-3x)'ctg\ln x+e^{-3x}\left(-\frac{1}{\sin^2\ln x}\right)(\ln x)'=$$

$$=e^{-3x}(-3)ctg\ln x-e^{-3x}\frac{1}{\sin^2\ln x}\frac{1}{x}=-e^{-3x}\left(3ctg\ln x+\frac{1}{x\sin^2\ln x}\right).$$

9) $y=\dfrac{5^{tgx}}{\cos^2 x}$. Функція задана часткою двох складених функцій. Враховуючи формулу (5), знайдемо її похідну:

$$y'=\frac{\left(5^{tgx}\right)'\cos^2 x-5^{tgx}((\cos x)^2)'}{\left(\cos^2 x\right)^2}=$$

$$=\frac{5^{tgx}\ln 5(tgx)'\cos^2 x-5^{tgx}2\cos x(\cos x)'}{\cos^4 x}=$$

$$=\frac{5^{tgx}\ln 5\dfrac{1}{\cos^2 x}\cos^2 x-5^{tg}2\cos x(-\sin x)}{\cos^4 x}=$$

$$=5^{tgx}\frac{\ln 5+2\cos x\sin x}{\cos^4 x}=5^{tgx}\frac{\ln 5+\sin 2x}{\cos^4 x}.$$

Надалі займемося диференціюванням складених функцій з довільним числом проміжних аргументів.

10) $y=\sin\left(\ln^3 x\right)$. Перепишемо функцію так: $y=\sin\left((\ln x)^3\right)$.

Це складена функція з двома проміжними аргументами: $u=(\ln x)^3$ та $v=\ln x$. Її можна подати у вигляді $y=\sin u$, де $u=v^3$; $v=\ln x$.

Прийнявши до уваги формулу (7), (нагадаємо її: $y'_x=y'_u\cdot u'_v\cdot v'_x$), виконаємо диференціювання:

$$y'_x=\ \cos(\ln x)^3\cdot\left((\ln x)^3\right)'_x=\ \cos(\ln x)^3\cdot 3(\ln x)^2\cdot(\ln x)'_x=$$

$$=\underbrace{\cos(\ln x)^3}_{y'_u}\cdot\underbrace{3(\ln x)^2}_{u'_v}\cdot\underbrace{\frac{1}{x}}_{v'_x}=\frac{3}{x}\cos\left(\ln^3 x\right)\cdot\ln^2 x.$$

11) $y=\left(3^{\arccos\sqrt{x}}+1\right)^4$. Задана функція складена, степеневого виду.

Послідовно застосовуючи правило диференціювання складеної функції, правила і формули диференціювання, дістанемо

$$y' = \left[\left(3^{\arccos\sqrt{x}} + 1\right)^4\right]' = 4\left(3^{\arccos\sqrt{x}} + 1\right)^3 \cdot \left(3^{\arccos\sqrt{x}} + 1\right)' =$$

$$= 4\left(3^{\arccos\sqrt{x}} + 1\right)^3 \cdot 3^{\arccos\sqrt{x}} \ln 3 \cdot \left(\arccos\sqrt{x}\right)' =$$

$$= 4\left(3^{\arccos\sqrt{x}} + 1\right)^3 \cdot 3^{\arccos\sqrt{x}} \ln 3 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{x}\right)^2}}\right) \cdot \left(\sqrt{x}\right)' =$$

$$= \underbrace{4\left(3^{\arccos\sqrt{x}} + 1\right)^3}\cdot \underbrace{3^{\arccos\sqrt{x}} \ln 3}\cdot \underbrace{\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)}\cdot \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}.$$

1.5. Диференціювання неявно заданої функції

Якщо залежність між змінними ***y*** та ***x*** задана рівнянням ***F(x,y)*=0**, то ***y*** називається неявною функцією аргументу ***x.***

Правило: *щоб продиференціювати неявно задану функцію, потрібно взяти похідну по x від обох частин рівності F(x,y)=0, пам'ятаючи, що y є функція від x, яка перетворює це співвідношення у тотожність; потім здобуте співвідношення потрібно розв'язати відносно похідної* y'.

Зауваження. Безпосередньо порівнювати похідні від обох частин рівності можливо тільки в тому випадку, коли ця рівність є тотожністю (а не рівнянням!). Тому в отриманий вираз для y' потрібно підставляти тільки ті числові значення x та y, які задовольняють дане рівняння ***F(x,y)=0.***

Приклад 1. Знайти похідну функції y, заданої рівнянням
$x^3 - x^2 y + y^3 = 15.$

Розв'язання. Диференціюючи обидві частини рівності і враховуючи, що $y = y(x)$, дістаємо

$$\left(x^3 - x^2 y + y^3\right)' = (15)'; \qquad 3x^2 - 2xy - x^2 y' + 3y^2 y' = 0.$$

Розв'яжемо це рівняння відносно y':

$$y'\left(-x^2+3y^2\right)=-3x^2+2xy; \qquad y'\left(x^2-3y^2\right)=3x^2-2xy;$$

$$y'=\frac{3x^2-2xy}{x^2-3y^2}.$$

Зауважимо, що при диференціюванні другого доданка ми скористалися формулою для похідної добутку двох функцій (3), а при диференціюванні третього доданка – правилом диференціювання складеної функції, а саме: $\left(y^3\right)'_x=\left(y^3\right)'_y\cdot y'=3y^2\cdot y'$.

Приклад 2. Знайти похідну від неявної функції $arctg\,\dfrac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}.$

Розв'язання. Спочатку для спрощення викладок перепишемо рівняння у вигляді $arctg\,\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)$. Диференціюємо ліву і праву частини рівності, вважаючи при цьому *y* функцією від *x*:

$$\left(arctg\,\frac{y}{x}\right)'=\frac{1}{2}\left(\ln\left(x^2+y^2\right)\right)'; \frac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\frac{y'x-y\cdot 1}{x^2}=\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+y^2}(x^2+y^2)';$$

$$\frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{y'x-y}{x^2}=\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+y^2}\left(2x+2yy'\right);\ y'x-y=x+yy';$$

$$y'(x-y)=x+y;\ \text{звідки} \qquad y'=\frac{x+y}{x-y}, \quad (x\neq y).$$

Приклад 3. Знайти y'_x в точці (0;1), якщо $e^y+xy=e.$

Розв'язання. Продиференціюємо по *x* обидві частини заданої рівності: $\left(e^y+xy\right)'=(e)'; e^y\cdot y'+1\cdot y+xy'=0;\ y'\left(e^y+x\right)=-y;\ y'=-\dfrac{y}{e^y+x}.$

Поклавши *x=0, y=1,* дістанемо значення похідної y'_x у точці (0;1): $y'=-\dfrac{1}{e}.$

1.6. Логарифмічне диференціювання. Похідна показниково-степеневої функції

У деяких випадках операція диференціювання функції *y=f(x)* значно спрощується, якщо її спочатку прологарифмувати за основою *e,* тобто $\ln y=\ln f(x)$, а потім знайти похідну від неявної функції. Операція знаходження похідної, яка ґрунтується на попередньому логарифмуванні заданої функції ***y=f(x),*** називається ***логарифмічним диференціюванням.*** Похідна натурального логарифма функції ***y*** називається ***логарифмічною похідною:*** $(\ln y)' = \frac{1}{y} y'.$

Логарифмічним диференціюванням доцільно користуватися при знаходженні похідної функції, яка після логарифмування спрощується. До таких функцій відносяться:
1) функції, які є добутком або часткою більше ніж двох функцій, а також містять операції піднесення до степеня і добування кореня;
2) показникова функція зі складним показником.

Приклад 1. Знайти похідну функції $y = \frac{(x^2+1)\sqrt{\cos 2x}}{4^{tgx}}, \ -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}.$

Розв'язання. Безпосереднє знаходження похідної за правилами диференціювання частки та добутку неефективне, так як приводить до громіздких викладок. Застосуємо логарифмічне диференціювання.

Попередньо знайдемо логарифм даної функції:

$$\ln y = \ln\left(x^2+1\right) + \ln\left(\cos 2x\right)^{\frac{1}{2}} - \ln 4^{tgx};$$

$$\ln y = \ln\left(x^2+1\right) + \frac{1}{2}\ln\cos 2x - tgx \cdot \ln 4.$$

Це неявна функція, диференціювати яку ми вже вміємо. Скористаємося правилом диференціювання неявної функції:

$$(\ln y)' = \left(\ln\left(x^2+1\right)\right)' + \frac{1}{2}\left(\ln\cos 2x\right)' - \ln 4 \cdot (tgx)';$$

$$\frac{1}{y}y' = \frac{1}{x^2+1}\left(x^2+1\right)' + \frac{1}{2}\frac{1}{\cos 2x}\left(\cos 2x\right)' - \ln 4 \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$\frac{1}{y}y' = \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x + \frac{1}{2\cos 2x}\left(-2\sin 2x\right) - \frac{\ln 4}{\cos^2 x}.$$

Помножимо обидві частини останньої рівності на ***y:***

$$y' = y\left(\frac{2x}{x^2+1} - tg 2x - \frac{\ln 4}{\cos^2 x}\right).$$

І, нарешті враховуючи, що y є задана функція (дивись умову задачі), дістанемо остаточний вираз для шуканої похідної

$$y' = \frac{\left(x^2+1\right)\sqrt{\cos 2x}}{4^{tgx}}\left(\frac{2x}{x^2+1} - tg2x - \frac{\ln 4}{\cos^2 x}\right).$$

Логарифмічне диференціювання застосовується також для знаходження похідної показниково-степеневої функції, тобто функції, у якої і основа і показник змінні: $y = u(x)^{v(x)}$, де u, v – задані і диференційовані функції від ***x.***

Приклад 2 .Задана функція $y = (\sin 3x)^{\sqrt[3]{x}}, 0 < x < \frac{\pi}{3}$. Знайти y'.

Розв'язання. Беручи натуральний логарифм від обох частин рівності, дістанемо $\ln y = \ln(\sin 3x)^{\sqrt[3]{x}}$, або $\ln y = \sqrt[3]{x} \cdot \ln \sin 3x.$ Оскільки $\sin 3x$ стоїть під знаком логарифма, то суттєвим є застереження в умові задачі, що x береться з інтервалу $\left(0; \frac{\pi}{3}\right)$, так як тоді $\sin 3x > 0$ і $\ln \sin 3x$ має сенс.

Диференціюючи останню рівність по *x,* звертаємо увагу на її праву частину, де записаний добуток двох функцій:

$$(\ln y)' = \left(x^{\frac{1}{3}} \cdot \ln \sin 3x\right)'; \qquad \frac{1}{y}y' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' \ln \sin 3x + x^{\frac{1}{3}}(\ln \sin 3x)';$$

$\frac{1}{y}y' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \ln \sin 3x + x^{\frac{1}{3}} \frac{1}{\sin 3x} \cdot 3\cos 3x.$ Множимо обидві частини цієї рівності на ***y*** , враховуючи, що згідно з умовою задачі $y = (\sin 3x)^{\sqrt[3]{x}}$, будемо мати

$$y' = (\sin 3x)^{\sqrt[3]{x}}\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \ln \sin 3x + 3\sqrt[3]{x}ctg 3x\right).$$

1.7. Рівняння дотичної та нормалі до кривої.

Знаючи похідну функції ***y=f(x),*** можна легко знайти дотичну до кривої, що є графіком даної функції.

Задача. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої ***y=f(x)*** у точці $M_o(x_0, y_0)$, припускаючи, що ця дотична не паралельна осі ординат.

Розв'язання. Поскільки дотична – пряма лінія, то скористаємося рівнянням прямої, що проходить через задану точку у заданому напрямі:

$y - y_0 = k(x - x_0)$, де $k = tg\alpha$ – кутовий коефіцієнт дотичної до кривої у точці M_0.

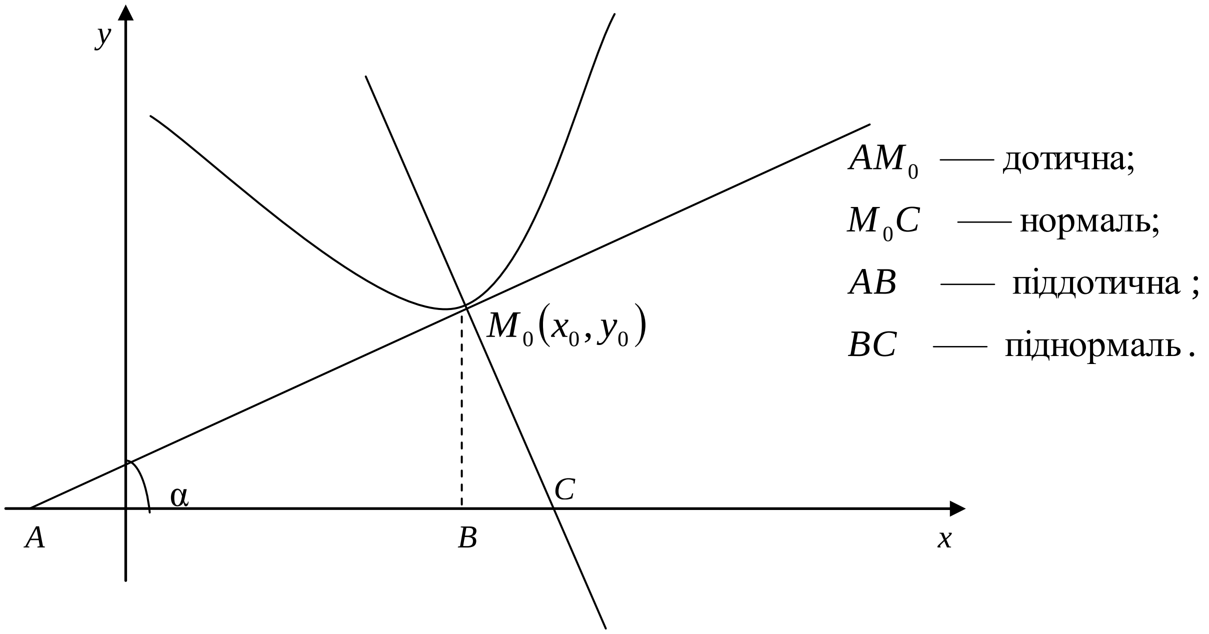
Згідно з геометричним змістом похідної , кутовий коефіцієнт $k = f'(x_0)$, тому шукане рівняння дотичної набирає вигляду

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0). \tag{8}$$

Зокрема, якщо функція ***y=f(x)*** в точці M_0 має нескінчену похідну, то дотична в цій точці паралельна осі ***Oy***, а її рівняння буде таким: $x = x_0$.

Означення. *Нормаллю до кривої в її точці* M_0 *називається пряма, що проходить через точку* M_0 *перпендикулярно до дотичної в цій точці.*

Зробимо рисунок.



Із означення нормалі випливає, що кутові коефіцієнти дотичної і нормалі пов'язані умовою перпендикулярності:

$$k_{\text{норм}} = -\frac{1}{k}, \quad \text{або} \quad k_{\text{норм}} = -\frac{1}{f'(x_0)}.$$

Зважаючи на це, запишемо рівняння нормалі до кривої $y = f(x)$ у точці M_0:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \tag{9}$$

Задача 1. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої $y = x^3$ у точці M(1;1).

Розв'язання. Так як $y' = f'(x) = \left(x^3\right)' = 3x^2$, то $f'(x_0) = f'(1) = 3.$ Поклавши у формулах (8) і (9) $x_0 = 1; \quad y_0 = 1;$ $f'(x_0) = f'(1) = 3,$ дістанемо шукане рівняння дотичної $y - 1 = 3(x - 1) \quad \Rightarrow \quad y = 3x - 2$ і рівняння нормалі

$$y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 1) \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}.$$

Задача 2. Із точки A(-1;-5), що не лежить на параболі $y = x^2 - 3x - 8,$ проведені дотичні до неї. Знайти рівняння цих дотичних.

Розв'язання. Нехай $M_0\left(x_0, y(x_0)\right)$ – точка дотику однієї із дотичних до даної параболи. Тоді рівняння дотичної має вигляд $y - y(x_0) = y'(x_0)(x - x_0).$ Але оскільки $y(x_0) = x_0^2 - 3x_0 - 8;\ y' = 2x - 3$ і $y'(x_0) = 2x_0 - 3$, то рівняння дотичної набуде вигляду

$$y - \left(x_0^2 - 3x_0 - 8\right) = \left(2x_0 - 3\right)\left(x - x_0\right). \tag{10}$$

Так як дотична проходить через точку $A(-1;-5)$, то координати цієї точки задовольняють рівняння дотичної (10), а саме:

$$-5 - \left(x_0^2 - 3x - 8\right) = \left(2x_0 - 3\right)\left(-1 - x_0\right).$$

Дістали рівняння відносно x_0, яке після елементарних перетворень набуває простого вигляду $x_0^2 + 2x = 0; \quad x_0\left(x_0 + 2\right) = 0$.

Звідки $x_0 = 0$ та $x_0 = -2.$

Підставляючи значення x_0 (абсцис точок дотику) в рівняння (10), знаходимо шукані рівняння дотичних:

$$y - (-8) = (2 \cdot 0 - 3)(x - 0) \quad \Rightarrow y + 8 = -3x \Rightarrow 3x + y + 8 = 0;$$

$$y - 2 = \left(2 \cdot (-2) - 3\right)(x - 2) \Rightarrow y - 2 = -7x + 14 \Rightarrow 7x + y + 12 = 0.$$

§2. ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНИХ ДО ОБЧИСЛЕННЯ ГРАНИЦЬ (ПРАВИЛО ЛОПІТАЛЯ)

Література : [1], §24, п.24.2; [2], гл.5, §5, п.5.3.

При знаходженні границь функції часто підстановка граничного значення аргументу приводить до невизначених виразів виду

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty, \quad 0^0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty$$

Знаходження границі у таких випадках називають розкриттям невизначеності. В доповнення до відомих нам правил граничного переходу розглянемо ще один простий і зручний спосіб, який ґрунтується на застосуванні похідних.

2.1. Теорема Лопіталя. Розкриття невизначеностей виду $\frac{0}{0}$ та $\frac{\infty}{\infty}$.

ТЕОРЕМА ЛОПІТАЛЯ. *Нехай функції f(x) і $\varphi(x)$ визначені і диференційовні в околі точки x_0 ,за винятком, можливо, самої точки x_0 і $\varphi'(x) \neq 0$ в цьому околі . Нехай також при $x \to x_0$ (або $x \to \infty$) функції f(x) і $\varphi(x)$ спільно прямують до нуля або до нескінченності. Тоді якщо відношення їхніх похідних має границю, то відношення самих функцій також має границю, яка дорівнює границі відношення похідних, тобто*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \qquad (1)$$

Сформульовану теорему прийнято називати ***правилом Лопіталя*** для розкриття невизначеностей виду $\frac{0}{0}$ та $\frac{\infty}{\infty}$. Висновок з цієї теореми (назвемо його також ***правилом Лопіталя***)можна загалом сформулювати так:
якщо при деякому значенні $x = x_0$ (скінченному або нескінченному) границя відношення двох функцій є невизначеність виду $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$ і при цьому значенні $x = x_0$ існує границя відношення похідних цих функцій, то границя відношення функцій дорівнює границі відношення їхніх похідних .
Правило Лопіталя дозволяє звести обчислення границі відношення двох нескінченно малих (або двох нескінченно великих) функцій до границі відношення їхніх похідних, що у багатьох випадках є більш простою задачею.
Може статися, що відношення похідних при $x \to x_0$ знову приводить до невизначеності виду $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$.Тоді потрібно повторно скористатися правилом Лопіталя, виконуючи одночасно спрощення отриманих виразів, наприклад, скоротити спільні множники, або ж , спираючись на теореми про границі, звести задачу до знаходження вже знайомих границь. Більше того, правило Лопіталя можна застосовувати доти, поки не розкриється невизначеність. У цьому разі повторні застосування правила Лопіталя записують зазвичай в один ланцюжок рівностей.

Увага! Студент повинен з великою обережністю користуватися правилом Лопіталя: потрібно ділити похідну від чисельника на похідну від знаменника, взяті порізно, і в ніякому разі не диференціювати функцію як частку (як дріб).

Ще одне суттєве зауваження, на яке слід акцентувати увагу студента. Із того, що границя $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ не існує, не можна робити висновок, що й шукана границя $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ також не існує. Остання функція може існувати й тоді, коли відношення похідних при $x\to x_0$ границі не має.

Отже, хоча правило Лопіталя є ефективним методом обчислення границь, воно, на жаль, не завжди дає змогу досягти цілі. Підтвердимо це прикладом.

Приклад. Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$

Розв'язання. Застосування правила Лопіталя у даному випадку безрезультатне, оскільки відношення похідних цієї функції

$$\frac{(x-\sin x)'}{(x+\sin x)'}=\frac{1-\cos x}{1+\cos x}=tg^2\frac{x}{2}$$

не має границі при $x\to\infty$. Порушено умову теореми Лопіталя. Проте границя даної функції знаходиться досить просто, а саме :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)}{x\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)}=1.$$

Оскільки $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$. Увага! Тут не перша чудова границя.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0\text{, тому, що } |\sin x|<1$$

(чисельник обмежений , а знаменник прямує до нескінченності). Існування границі заданої функції не суперечить теоремі Лопіталя, так як в ній стверджується, що коли відношення похідних прямує до границі, то до цієї границі прямує і відношення функцій, але не навпаки.

Перейдемо до освоєння техніки обчислення границь, що ґрунтується на застосуванні правила Лопіталя.

2.2. Практика розкриття невизначеностей виду $\frac{0}{0}$ та $\frac{\infty}{\infty}$.

Користуючись правилом Лопіталя, знайти вказані границі:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{\ln x}$. Безпосередня підстановка граничного значення аргументу ***x=1*** приводить до невизначеності виду $\dfrac{0}{0}$. Так як функції $f(x)=x^3-1$ і $\varphi(x)=\ln x$ задовольняють умовам теореми Лопіталя, то згідно з (1) будемо мати

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{\ln x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^3-1\right)'}{(\ln x)'}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 1}3x^3=3.$$

Примітка. Обчислення границі згідно з правилом Лопіталя зазвичай записують зразу. В існуванні необхідних похідних і границь переконуються безпосередньо в процесі обчислень. Тому попередні викладки можуть бути опущені, що й рекомендуємо робити в подальшому.

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\frac{a}{x}}{\frac{1}{x}}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(\sin\frac{a}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a\cos\frac{a}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=a\lim\limits_{x\to\infty}\cos\dfrac{a}{x}=a$,де a=const.

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x+2}{7x^2+3x-1}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(5x+2)'}{\left(7x^2+3x-1\right)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5}{14x+3}=0$

Розглянемо приклади, коли правило Лопіталя при знаходженні границі застосовується повторно.

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos 2x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(e^x+e^{-x}-2\right)'}{(1-\cos 2x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{2\sin 2x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=$

$$=\left|\begin{array}{l}\text{Застосуємо правило}\\ \text{Лопіталя вдруге.}\end{array}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{4\cos 2x}=\frac{1+1}{4\cdot 1}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

5) $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\ln x}{ctgx}$. При $x\to 0$, залишаючись додатним, маємо невизначеність виду $\dfrac{\infty}{\infty}$, яку потрібно розкрити. За правилом Лопіталя маємо

$$\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{ctgx}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+0}\frac{(\ln x)'}{(ctgx)'}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}}=-\lim_{x\to+0}\frac{\sin^2 x}{x}.$$

Остання границя при $x\to=+0$ дає невизначеність виду $\frac{0}{0}$. Можливі два шляхи для її розкриття: а) повторно застосувати правило Лопіталя; б) скористатись теоремою про границю добутку двох функцій.

З огляду на сказане маємо

а) $\lim\limits_{x\to+0}\frac{\ln x}{ctgx}=-\lim\limits_{x\to+0}\frac{\sin^2 x}{x}=-\lim\limits_{x\to+0}\frac{(\sin^2 x)'}{(x)'}=-\lim\limits_{x\to+0}\frac{\sin 2x}{1}=0;$

б) $\lim\limits_{x\to+0}\frac{\ln x}{ctgx}=-\lim\limits_{x\to+0}\frac{\sin^2 x}{x}=-\lim\limits_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to+0}\sin x=-1\cdot 0=0$

Наведемо ще декілька прикладів, коли правило Лопіталя приходиться комбінувати з іншими методами знаходження границі.

6) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos^3 x}{e^x-1-x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{(1-\cos^3 x)'}{(e^x-1-x)'}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-3\cos^2(x)(-\sin x)}{e^x-1}=$

$$=\left|\begin{matrix}\text{Скористаємось т теорем}\\ \text{про границю добутку.}\end{matrix}\right|=3\lim_{x\to0}\cos^2 x\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{e^x-1}=\left|\begin{matrix}\text{Границя першого співмножника}\\ \text{тривіальна}\quad \lim\limits_{x\to0}\cos^2 x=1\end{matrix}\right|=$$

$$=3\cdot1\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{e^x-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left|\begin{matrix}\text{Застосуємо правило}\\ \text{Лопіталя повторно.}\end{matrix}\right|=3\lim_{x\to0}\frac{\cos x}{e^x}=3\cdot1=3.$$

7) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{tg5x}{tg3x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(tg5x)'}{(tg3x)'}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{5\sec^2 5x}{3\sec^2 3x}=\frac{5}{3}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 3x}{\cos^2 5x}=$

$$=\frac{5}{3}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos3x}{\cos5x}\right)^2=\frac{5}{3}\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos3x}{\cos5x}\right)^2=\left(\frac{0}{0}\right)=\left|\begin{matrix}\text{Застосуємо правило}\\ \text{Лопіталя повторно.}\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{5}{3}\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-3\sin 3x}{-5\sin 5x}\right)=\frac{5}{3}\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{3}{5}.$$

Формула (1) залишається справедливою, коли відношення похідних прямує до нескінченності, тоді і відношення самих функцій також прямує до нескінченності.

8) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x-\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(x-\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1-\cos x}=$$

$$=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(1-\cos x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{\sin x}=\infty.$$

Увага! Студент повинен розрізняти поняття «границя дорівнює ∞» та «границя не існує».

Розглянемо два важливих приклади.

9) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x^n)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{nx^{n-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{nx^n}=0;(n>0).$$

10) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^n}$; n – ціле додатне число.

Застосуємо правило Лопіталя n разів підряд, дістанемо

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(x^n)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{nx^{n-1}}=\cdots=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{n!}=+\infty.$$

Таким чином, коли аргумент прямує до $+\infty$, то степенева функція x^n *(n>0)* зростає швидше, ніж логарифмічна, а експонента – швидше ніж степенева.

2.3. Розкриття невизначеностей виду $0\cdot\infty$ та $\infty-\infty$.

Під розкриттям невизначеності виду $0\cdot\infty$ розуміють знаходження границі $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\varphi(x)]$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ і $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty$, де x_0 – це число або ∞.

Під розкриттям невизначеності виду $\infty-\infty$ розуміють знаходження границі $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-\varphi(x)]$, коли $f(x)$ і $\varphi(x)$ є нескінченно великі величини одного знаку.

Такі невизначеності з допомогою алгебраїчних перетворень легко зводяться до основних – $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$. Це можна робити за схемою, умовний запис якої такий:

$$0\cdot\infty=0\cdot\frac{1}{0}=\frac{0}{0};\qquad \infty-\infty=\frac{1}{0}-\frac{1}{0}=\frac{0-0}{0\cdot 0}=\frac{0}{0}.$$

Знайти границі:

1) $\lim\limits_{x\to 0} x\,\mathrm{ctg}3x.$ В даному випадку має місце невизначеність виду $0\cdot\infty$.

Записавши функцію як дріб $\dfrac{x}{tg3x}$, дістанемо невизначеність виду $\dfrac{0}{0}$, яку розкриємо за правилом Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0} xctg3x = (0\cdot\infty) = \lim_{x\to 0}\frac{x}{tg3x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{(x)'}{(tg3x)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\dfrac{3}{\cos^2 3x}} = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\cos^2 3x = \frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{1}{3}.$$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 e^{-2x}$. Тут невизначеність виду $\infty\cdot 0.$ Щоб мати можливість застосовувати правило Лопіталя, запишемо добуток $x^2 e^{-2x}$ у вигляді частки $\dfrac{x^2}{e^{2x}}$. При $x\to+\infty$ чисельник і знаменник цього дробу одночасно прямують до $+\infty$. Таким чином, дістали невизначеність виду $\dfrac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 e^{-2x} = (\infty\cdot 0) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^{2x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2\right)'}{\left(e^{2x}\right)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{2e^{2x}} =$$

$$= \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \left|\begin{matrix}\text{Застосуємо правило}\\ \text{Лопіталя вдруге.}\end{matrix}\right| = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2e^{2x}} = 0$$

3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} tg2x(tgx-ctgx).$ Так як $tg2x\to\infty$ і $tgx-ctgx\to 0$ при $x\to\dfrac{\pi}{4}$, то маємо невизначеність виду $\infty\cdot 0$. Перетворимо даний вираз так:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} tg2x(tgx-ctgx) = (\infty\cdot 0) = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{tgx-ctgx}{ctg2x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \left|\begin{matrix}\text{Застосуємо}\\ \text{правило}\\ \text{Лопіталя.}\end{matrix}\right| = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\dfrac{1}{\cos^2 x}+\dfrac{1}{\sin^2 x}}{-\dfrac{2}{\sin^2 2x}} = \frac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}}{-\dfrac{2}{1}} = -\frac{1}{2}.$$

4) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$. При $x=1$ маємо невизначеність виду $(\infty-\infty)$. Зведемо її до невизначеності виду $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1-\ln x)'}{((x-1)\ln x)'}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{1\cdot\ln x+(x-1)\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{x-1}{x}}{\ln x+1-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\ln x+x-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)'}{(x\ln x+x-1)'}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}+1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x+2}=\frac{1}{2}.$$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x-x^2\right)=(\infty-\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}e^x\left(1-\frac{x^2}{e^x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}e^x\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{x^2}{e^x}\right)$.

Оскільки

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{x^2}{e^x}\right)=1-\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=1-\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2\right)'}{\left(e^x\right)'}=1-\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x}=$$

$$1-\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x)'}{\left(e^x\right)'}=1-\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=1-0=1,$$

то вихідна границя $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x-x^2\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}e^x\cdot 1=+\infty.$

2.4. Степеневі невизначеності виду $0^0, \infty^0, 1^\infty$

Такі невизначеності мають місце при розгляді степенево- показникової функції $y=f(x)^{\varphi(x)}$, коли *f(x)* прямує відповідно до $0,\infty,1$, а $\varphi(x)$ – відповідно до $0,0,\infty$ при $x\to x_0$.

Перейдемо від степеневих невизначеностей до невизначеності $0\cdot\infty$, скориставшись логарифмічною тотожністю $a=e^{\ln a}$, яка стосовно степенево-показникової функції набирає вигляду

$$f(x)^{\varphi(x)}=e^{\ln f(x)^{\varphi(x)}} \text{ або } f(x)^{\varphi(x)}=e^{\varphi(x)\ln f(x)},$$

де функція *f(x)>0,* так як стоїть під знаком логарифма.

Тепер можна записати

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0} e^{\varphi(x)\ln f|x|}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)\ln f(x)}.$$

Знак границі і знак функції поміняли місцями, що припустимо внаслідок неперервності показникової функції.

Задача звелася до знаходження границі добутку $\varphi(x)\ln f(x)$, який є невизначеністю $0\cdot\infty$. Нехай ця границя дорівнює A ,тобто

$$\lim_{x\to x_0}\varphi(x)\ln f(x)=A.$$

Тоді остаточно для вихідної границі маємо

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{\varphi(x)}=e^{A}.$$

Знайти вказані границі:

1) $\lim\limits_{x\to+0}(\sin x)^x=(0^0)=e^{\lim\limits_{x\to+0}x\ln\sin x}$.

Позначимо через *A* показник і знайдемо границю:

$$A=\lim_{x\to+0}x\cdot\ln\sin x=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to+0}\frac{\ln\sin x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+0}\frac{(\ln\sin x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to+0}\frac{x^2\cos x}{\sin x}=-\lim_{x\to+0}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to+0}x\cos x=-1\cdot 0=0.$$

Отже, *A=0.* Повернемося до вихідної границі.

$$\lim_{x\to+0}(\sin x)^x=e^A=e^0=1$$

2) $\lim\limits_{x\to1+}(x-1)^{\ln x}=(0^0)=e^{\lim\limits_{x\to1+0}\ln x\cdot\ln(x-1)}$;

$$A=\lim_{x\to1+}\ln x\cdot\ln(x-1)=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to1+}\frac{\ln(x-1)}{(\ln x)^{-1}}=\frac{\infty}{\infty}=$$

$$=\lim_{x\to 1+}\frac{\left(\ln(x-1)\right)'}{\left((\ln x)^{-1}\right)'}=\lim_{x\to 1+}\frac{\frac{1}{x-1}\cdot 1}{-\frac{1}{\ln^2 x}\cdot\frac{1}{x}}=-\lim_{x\to 1+}\frac{x\ln^2 x}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to 1+}x\cdot\lim_{x\to 1+}\frac{\ln^2 x}{x-1}=-1\cdot\lim_{x\to 1+}\frac{\left(\ln^2 x\right)'}{(x-1)'}=-\lim_{x\to 1+}\frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{1}=0.$$

Отже, $A=0$. В свою чергу, $\lim\limits_{x\to 1+}(x-1)^{\ln x}=e^A=e^0=1$.

3) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-arctgx\right)^{\frac{1}{x}}=(0^0)=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot\ln\left(\frac{\pi}{2}-arctgx\right)};$$

$$A=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot\ln\left(\frac{\pi}{2}-arctgx\right)=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{\pi}{2}-arctgx\right)}{x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\ln\left(\frac{\pi}{2}-arctgx\right)\right)'}{x'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{\frac{\pi}{2}-arctgx}=-\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+x^2\right)^{-1}}{\frac{\pi}{2}-arctgx}=$$

$$=\left(\frac{0}{0}\right)=\left|\begin{array}{l}\text{Повторно скористаємось}\\ \text{правилом Лопіталя.}\end{array}\right|=-\lim_{x\to+\infty}\frac{-\left(1+x^2\right)^{-2}\cdot 2x}{-\frac{1}{1+x^2}}=$$

$$=-2\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2}=-2\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1+x^2}=-2\lim_{x\to+\infty}\frac{x'}{\left(1+x^2\right)'}=-2\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}=0.$$

$A=0$. Остаточно для вихідної границі маємо

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-arctgx\right)^{\frac{1}{x}}=e^A=e^0=1$$

4) $$\lim_{x\to+0}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^x=\left(\infty^0\right)=e^{\lim\limits_{x\to+0}x\cdot\ln\left(\ln\frac{1}{x}\right)};$$

$$A=\lim_{x\to+0} x\cdot\ln\left(\ln\frac{1}{x}\right)=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to+0}\frac{\ln\left(\ln\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\left|\begin{array}{l}\text{Заміна}\quad t=\frac{1}{x};\\ \text{при}\quad x\to+0\\ \text{змінна}\quad t\to+\infty.\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln(\ln t)}{t}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{t\to+\infty}\frac{(\ln(\ln t))'}{t'}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\frac{1}{\ln t}\cdot\frac{1}{t}}{1}=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t\ln t}=0; A=0.$$

Тепер можна повернутися до вихідної границі:

$$\lim_{x\to+0}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^x=e^A=e^0=1.$$

5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(tgx)^{\cos x}=\left(\infty^0\right)=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\cos x\cdot\ln tgx}$;

$$A=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\cos x\cdot\ln tgx=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\ln tgx}{(\cos x)^{-1}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{(\ln tgx)'}{\left((\cos x)^{-1}\right)'}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\frac{1}{tgx}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}{-\frac{1}{\cos^2 x}\cdot(-\sin x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{ctgx}{\sin x}=\frac{0}{1}=0.$$

Оскільки *A=0,* то $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(tgx)^{\cos x}=e^A=e^0=1.$

6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+e^x\right)^{\frac{1}{x}}=\left(\infty^0\right)=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot\ln\left(1+e^x\right)}$;

$$A=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot\ln\left(1+e^x\right)=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+e^x\right)}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\ln\left(1+e^x\right)\right)'}{x'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+e^x}\cdot e^x}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1+e^x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\left|\begin{matrix}\text{Скористаємось}\\ \text{правилом Лопіталя}\\ \text{ще раз.}\end{matrix}\right|=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x}=1;\quad A=1.$$

Отже, остаточно дістанемо $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+e^x\right)^{\frac{1}{x}}=e^A=e$.

7) $\lim\limits_{x\to0}\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}=\left(1^\infty\right)=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{1-\cos x}\cdot\ln\left(1-x^2\right)}$;

$$A=\lim_{x\to0}\frac{1}{1-\cos x}\ln\left(1-x^2\right)=(\infty\cdot0)=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(1-x^2\right)}{1-\cos x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\left(\ln\left(1-x^2\right)\right)'}{\left(1-\cos x\right)'}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1-x^2}(-2x)}{\sin x}=-2\lim_{x\to0}\frac{x}{\left(1-x^2\right)\sin x}=$$

$$=-2\lim_{x\to0}\frac{1}{1-x^2}\cdot\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}=-2\cdot1\cdot1=-2;\quad A=-2.$$

Повертаємося до вихідної границі: $\lim\limits_{x\to0}\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}=e^A=e^{-2}$.

8) $\lim\limits_{x\to1}(2-x)^{tg\frac{\pi x}{2}}=\left(1^\infty\right)=e^{\lim\limits_{x\to1}tg\frac{\pi x}{2}\cdot\ln(2-x)}$;

$$A=\lim_{x\to1}tg\frac{\pi x}{2}\cdot\ln(2-x)=(\infty\cdot0)=\lim_{x\to1}\frac{\ln(2-x)}{ctg\frac{\pi x}{2}}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\left(\ln(2-x)\right)'}{\left(ctg\frac{\pi x}{2}\right)'}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{2-x}\cdot(-1)}{-\frac{1}{\sin^2\frac{\pi x}{2}}\cdot\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to1}\frac{\sin^2\frac{\pi x}{2}}{2-x}=\frac{2}{\pi}\cdot1=\frac{2}{\pi}.$$

Оскільки $A=\frac{2}{\pi}$, то $\lim\limits_{x\to1}(2-x)^{tg\frac{\pi x}{2}}=e^A=e^{\frac{2}{\pi}}$.

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\frac{m}{x}\right)^x=\left(1^\infty\right)=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\ln\cos\frac{m}{x}}$;

$$A=\lim_{x\to\infty} x\cdot\ln\cos\frac{m}{x}=(\infty\cdot 0)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\cos\frac{m}{x}}{\frac{1}{x}}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\cos\frac{m}{x}}\cdot\left(-\sin\frac{m}{x}\right)\cdot m\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}=-m\lim_{x\to\infty} tg\frac{m}{x}=0; A=0$$

У такому разі $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\frac{m}{x}\right)^x=e^0=1$.

Зауваження. Можливий ще й такий спосіб розкриття невизначеностей: задану функцію попередньо логарифмуємо і знаходимо границю її логарифма, а потім уже за границею логарифма знаходимо границю самої функції. Покажемо це на прикладі.

Знайдемо границю $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[x]{x}$, яку позначимо через *B:* $B=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[x]{x}$.

Прологарифмувавши обидві частини рівності, будемо мати

$$\ln B=\ln\left(\lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\ln\sqrt[x]{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\ln x^{\frac{1}{x}}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\ln x\right)=$$

$$=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)'}{x'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0.$$

Таким чином, $\ln B=0$, звідки вихідна границя *B=1.*

§3. ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ЗА ДОПОМОГОЮ ПОХІДНИХ

Важливим призначенням диференціального числення є його застосування при дослідженні характеру поведінки функції в залежності від зміни аргументу. Це застосування спирається на досить простий зв'язок, який існує між поведінкою функції та властивостями її похідних.

3.1. Монотонність функції

Нехай функція *y=f(x)* визначена на деякому інтервалі (*a;b*). Звернемося до рис.1, нагадавши одночасно геометричний зміст похідної функції *y=f(x)* точці *x:* $f'(x) = k = tg\alpha$, де α – кут нахилу дотичної, проведеної до графіка функції у точці з абсцисою *x*.

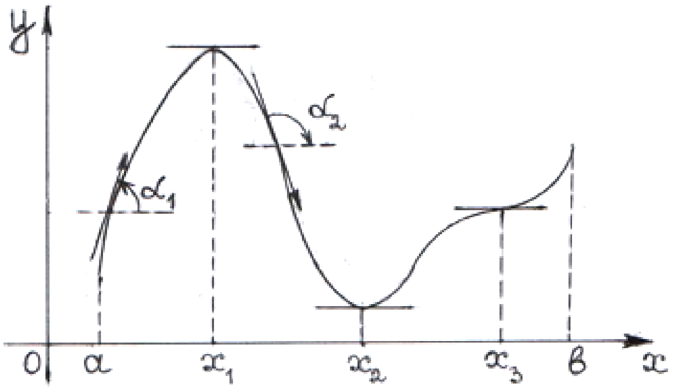


Рис.1

Будемо рухатися вздовж кривої зліва направо. Із рисунка видно, що коли функція зростає на деякому проміжку, то кут нахилу дотичної до кривої гострий, тому $y' = tg\alpha > 0.$ Якщо ж функція спадає, то навпаки, кут нахилу дотичної до кривої буде тупим, а отже $y' = tg\alpha < 0$.

Постараємося тепер аналітично обґрунтувати наші геометричні спостереження і висновки.

Означення. *Функція f(x) називається* ***зростаючою (спадною)*** *на інтервалі (a;b), якщо на цьому інтервалі більшому значенню аргументу відповідає більше (менше) значення функції, тобто*

$$f(x_2) > f(x_1) \ \ (f(x_2) < f(x_1)) \text{ при } x_2 > x_1; x_1, x_2 \in (a;b).$$

Означення. *Функція f(x) називається* ***монотонною*** *на інтервалі (a;b), якщо вона на цьому інтервалі або тільки зростає, або тільки спадає.*

Наприклад, показникова функція $y = a^x$ при *a>1* є зростаючою на всій числовій осі; при 0<*a*<1 – спадною на всій числовій осі.

Увага! Надалі студент повинен чітко розуміти різницю між необхідними та достатніми умовами зростання та спадання функції тощо. Для цього слід більш детально зупинитися на поняттях необхідної і достатньої умови.

Умова називається *необхідною* для даної обставини, якщо завжди, коли дана обставина має місце, ця умова виконується. Умова називається *достатньою,* якщо кожного разу, коли вона виконується, дана обставина має місце.

Наприклад, подільність деякого числа *k* на 2 необхідна (але не достатня) для його подільності на 6, а подільність на 6 достатня (але не необхідна) для його подільності на 2. Дійсно, із того що число ділиться на 6 випливає його подільність на 2. Таким чином, для того щоб число ділилось на 6 , необхідна його парність. Ясно, що не всяке парне число ділиться на 6 (тобто ця умова не є достатньою).

Зростання та спадання функції характеризується знаком її похідної. Сформулюємо аналітичну ознаку (критерій) зростання та спадання функції.

ТЕОРЕМА 1 ***(необхідна ознака монотонності функції).***

1. Якщо функція f(x) на інтервалі (a;b) диференційовна *і* ***зростає,*** *то її похідна* ***невід'ємна*** *на цьому інтервалі, тобто*

$$f'(x) \geq 0, \qquad x \in (a;b).$$

2. Якщо функція f(x) на інтервалі (a;b) диференційовна і ***спадає,*** *то її похідна* ***недодатна*** *на цьому інтервалі, тобто*

$$f'(x) \leq 0, \qquad x \in (a;b).$$

Геометричний зміст щойно наведеної теореми очевидний і випливає з геометричного змісту похідної: 1) дотична до графіка зростаючої функції утворює з додатним напрямом осі *Ox* гострий кут або (в окремих точках) горизонтальна $\left(0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}\right)$; 2) дотична до графіка спадної функції – тупий кут (або в окремих точках) горизонтальна $\left(\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi\right)$.

Що нам дає теорема 1? ТЕОРЕМА 1 дозволяє за характером росту монотонної в інтервалі функції установити знак її похідної в цьому інтервалі. Проте, коли ми тільки починаємо досліджувати функцію, то її поведінка, як правило, нам невідома. Тому для нас значно важливіше сформулювати таку умову, виконання якої гарантує, що функція зростає (спадає) на деякому проміжку; інакше кажучи, сформулювати достатню умову монотонності функції.

ТЕОРЕМА 2 ***(достатня ознака монотонності функції).***

Якщо функція f(x) в кожній точці інтервалу (a;b) має ***додатну (від'ємну)*** *похідну, то сама функція* ***зростає (спадає)*** *на цьому інтервалі.*

Унаочнимо сказане такою табличкою:

y'	+	–
y	↗	↘

Геометрично ясно, що функція буде монотонною і в тому випадку, коли її похідна, зберігаючи весь час сталий знак, в окремих точках дорівнює нулю.

Теореми 1 і 2 – це чисто аналітичні ознаки, які знаходяться у повній погодженості з тими висновками, які ми зробили із спостережень над кривою на початку параграфа (дивись рис.1).

Зауваження. Ми не ввели поняття зростаючої та спадної функції в точці. Водночас не запровадили більш детальної класифікації функцій стосовно характеру їхньої поведінки на інтервалі, а саме: зростаюча, спадна, незростаюча, неспадна. І нарешті, на основі цієї класифікації не сформулювали відповідні ознаки поведінки функції. Вичерпну відповідь на ці питання студент може знайти , скориставшись такими навчальними посібниками:

1. Суліма І.М., Ковтун І.І., Яковенко В.М. Вища математика, ч.2, НАУ, Київ, 2003. 2. Валєєв К.Г., Джалладова І.А. Вища математика, ч.1, КНЕУ, Київ,2001.

***Означення. Інтервалами** або **проміжками монотонності** функції f(x) називаються інтервалами її області визначення, на яких функція або тільки зростає, або тільки спадає.*

Ознакою інтервалу монотонності є зберігання знака похідної функції на цьому інтервалі

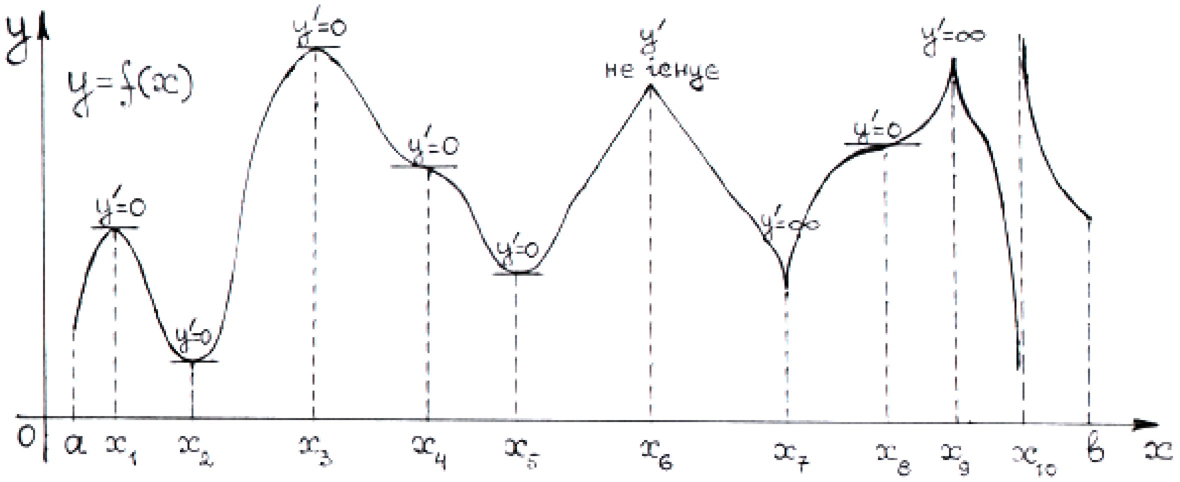


Рис. 2

.

Звернувшись до рис.2, бачимо, що інтервали монотонності можуть відділятися один від одного або точками, де похідна функції дорівнює нулю (їх називають *стаціонарними точками*), або точками, де похідна дорівнює нескінченності чи не існує. І, нарешті, це можуть бути точки розриву функції.

Відмітимо, що коли похідна не існує в якійсь точці (але існує в сусідніх точках), то в цій точці похідна розривна. В стаціонарних точках дотична до графіка функції паралельна осі *Ox* (на рис. 2 це точки $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_8$). В точках, де похідна дорівнює нескінченності, дотична перпендикулярна до осі *Ox* (на рис. 2 це точки x_7, x_9); їх називають ***зворотними точками***. В точках, де похідна не існує, не існує і дотична (на рис. 2 це точка x_6); їх називають ***кутовими точками.***

Увага! Не кожна стаціонарна точка відділяє інтервали монотонності (на рис.2 це точки x_4, x_8). Якщо на двох сусідніх інтервалах, розділених стаціонарною точкою, знак похідної y' однаковий , то ці інтервали складають єдиний інтервал монотонності. На рис. 2 інтервали $(x_3; x_4)$ та $(x_4; x_5)$ складають єдиний інтервал спадання функції $(x_3; x_5)$, а інтервали $(x_7; x_8)$ та $(x_8; x_9)$ – єдиний інтервал зростання функції $(x_7; x_9)$.

***Означення. Критичними точками 1-го роду** функції f(x) називають точки, розташовані всередині її області визначення, в яких похідна $f'(x) = 0$ або нескінченності або не існує.*

Зазначимо, що критичні точки включають в себе і стаціонарні точки. В стаціонарних точках миттєва швидкість зміни функції дорівнює нулю, тобто це ніби точки миттєвого спокою.

ПРАВИЛО ЗНАХОДЖЕННЯ ІНТЕРВАЛІВ МОНОТОННОСТІ ФУНКЦІЇ *f(x)* :

1.	Знайти область визначення функції (ОВФ) *f(x)*.
2.	Знайти першу похідну $f'(x)$.
3.	Знайти критичні точки 1-го роду з рівняння $f'(x)=0$ та з умов, що $f'(x)=\infty$ або не існує.
4.	Нанести критичні точки на ОВФ *f(x)*. Вони разом з точками розриву функції *f(x)* розбивають ОВФ на інтервали монотонності.
5.	Визначити знак похідної на кожному із знайдених інтервалів. На інтервалах, де похідна додатна, функція зростає, а де вона від'ємна – спадає.

Приклад 1. Знайти інтервали монотонності функції

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x - 3.$$

Розв'язання. 1) Функція визначена і диференційована на інтервалі $(-\infty;+\infty)$. 2) Знаходимо похідну: $y' = 3x^2 - 12x + 9.$

3) Знаходимо критичні точки 1-го роду:

$$y' = 0 \Rightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0; x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = 3.$$

Інших критичних точок немає, так як y' існує на всій числовій осі.

4) Наносимо критичні (стаціонарні) точки на область визначення функцій (рис.3).

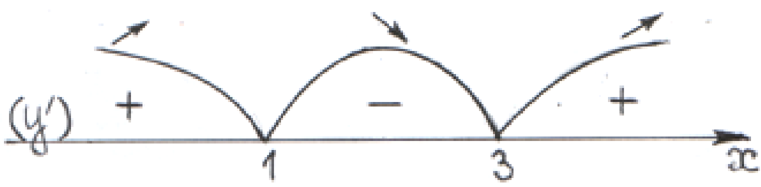


Рис.3

Вони розбивають ОВФ на три інтервали: $(-\infty;1), (1;3), (3;+\infty)$. Так як похідна y' може змінювати знак тільки при переході через точки, в яких вона перетворюється в нуль або терпить розрив неперервності (в даному випадку точки розриву y' відсутні), то в кожному із інтервалів похідна *зберігає знак,* тому в кожному із цих інтервалів задана функція монотонна. 5) Встановлюємо знак похідної на кожному інтервалі. Для цього достатньо визначити знак похідної в одній довільній внутрішній точці (пробній точці) кожного інтервалу. Маємо $y'(0) > 0$ – функція зростає на інтервалі $(-\infty;1)$; $y'(2) < 0$ – функція спадає на інтервалі (1;3); $y'(4) > 0$ – функція зростає на інтервалі $(3;+\infty)$.

Нанесемо на рис. 3 результати дослідження знака похідної на інтервалах монотонності. Стрілками, звернутими вгору і вниз, показано поводження функції на цих інтервалах.

Приклад 2. Знайти інтервали зростання і спадання функції $y = \dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$.

Розв'язання. 1) Функція визначена і диференційована на множині дійсних чисел, крім точки $x=1$ (так як знаменник не повинен перетворюватися в нуль). Точка $x=1$ – точка розриву функції. Тому ОВФ : $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$. 2) $y' = -\dfrac{2x}{(x-1)^3}$. Рекомендуємо переконатися самостійно, що похідна знайдена вірно. 3) Знаходимо критичні точки 1-го роду : $y'=0 \Rightarrow x=0$ – стаціонарна точка. Інших критичних точок функція не має.

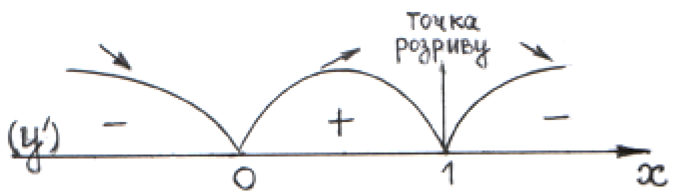


Рис. 4

4) Відмічаємо критичні точки на ОВФ (дивись рис. 4) . Інтервали монотонності : $(-\infty;0),(0;1),(1;+\infty)$.
5) Визначаємо знак похідної на кожному інтервалі. Маємо

$y'(-1) = -\dfrac{1}{4} < 0$ – функція спадає на $(-\infty;0)$;

$y'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 8 > 0$ – функція зростає на $(0;1)$;

$y'(2) = -4 < 0$ – функція спадає на $(1;+\infty)$.

Результати визначення знака похідної нанесемо на рис. 4.

3.2. Екстремум функції

Більшість елементарних функцій не є монотонними всюди, де вони визначені. ОВФ часто містить як проміжки зростання, так і проміжки спадання функції. Особливу зацікавленість викликають «примежові» значення аргументу (на рис. 2 це точки $x_2, x_2, x_3, x_5, x_6, x_7, x_9$). Вони відокремлюють область зростання функції від області її спадання або навпаки, тобто при переході через ці точки поведінка функції змінюється. До розгляду поведінки функції в околі такої точки ми зараз і перейдемо.

Нехай функція *y=f(x)* визначена на інтервалі $(a;b)$ і точка $x_0 \in (a;b)$. Введемо наступні означення :

функція f(x) має ***максимум (мінімум)*** *у точці* $x = x_0$, *якщо значення функції у цій точці* ***більше (менше),*** *ніж її значення в усіх інших точках деякого околу* *точки* x_0, *тобто* $f(x_0) > f(x)$ $\left(f(x_0) < f(x)\right)$ *для всіх* x *досить близьких до* x_0.

Точка x_0 називається ***точкою максимуму (мінімуму)*** функції *f(x)*. Термін «**максимум**» та «**мінімум**» об'єднуються спільним терміном «**екстремум**».

Позначають так :

1) максимум – *max* (скорочення латинського «найбільший»);
2) мінімум – *min* (скорочення латинського «найменший»);
3) екстремум – *extr* (скорочення латинського «крайній»).

Точку x_0 називають ***точкою екстремуму*** або ***екстремальною точкою,*** а значення функції у цій точці – її ***екстремальним значенням*** або ***екстремумом***.

В економічних дисциплінах екстремум функції називають її ***локальним оптимумом***, а процес знаходження екстремального значення функції називають **оптимізацією.**

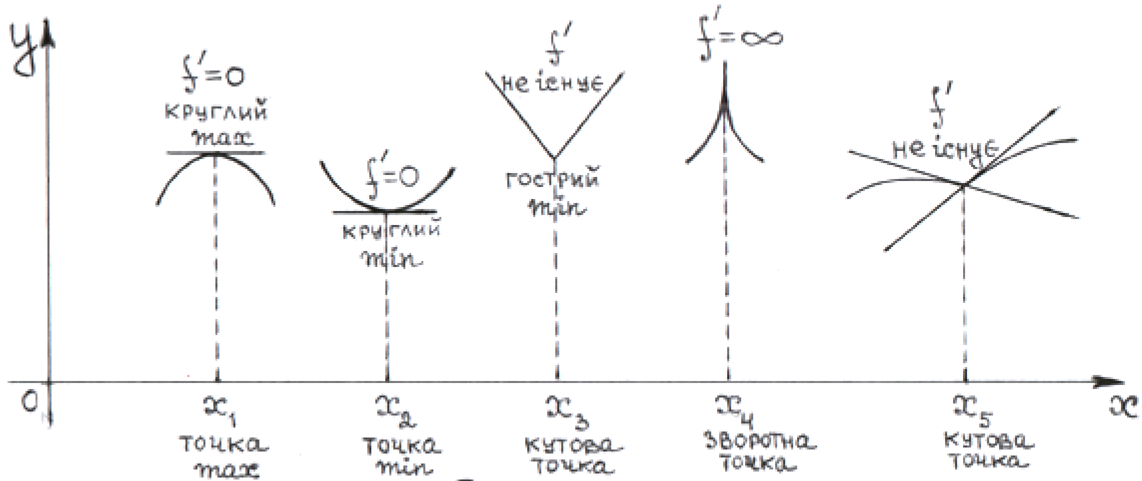


Рис. 5

Рис. 5 ілюструє деякі характерні випадки поведінки функції в околі екстремальної точки.

Звернемо увагу на такі обставини.

1.Якщо функція визначена на відрізку $[a;b]$, то вона може досягати екстремуму тільки всередині цього відрізка. Чому? Тому що згідно означення екстремуму функції в точці, ми повинні знати всю інформацію про характер зміни функції в деякому околі, який охоплює точку і який належить ОВФ. Окремі А кінцеві точки a та b охопити такими околами неможливо.

2.Поняття екстремуму носить локальний (місцевий) характер і завжди зв'язане з поведінкою функції тільки в деякому околі точки із ОВФ, а не з усією ОВФ. Окремі *min* можуть бути навіть більшими деяких *max* функції (дивись рис. 2)Тому не слід плутати *max* і *min* функції з її найбільшим та найменшим значенням в ОВФ.

З'ясуємо умови існування екстремуму.

ТЕОРЕМА 3 (необхідна ознака екстремуму). *Якщо у точці* x_0 *функція f(x) має екстремум, то її перша похідна в цій точці дорівнює нулю або дорівнює нескінченності, або не існує:*

$$f'(x_0)=0 \quad \textit{або} \quad f'(x_0)=\infty \quad \textit{або} \quad f'(x_0) \ \textit{не існує}$$

Коментарі до теореми 3.

1. Умова $f'(x_0)=0$ з погляду геометрії означає, що дотична до графіка функції $f(x)$ у точці $(x_0; f(x_0))$ горизонтальна (паралельна осі *Ox*). Умова $f'(x_0)=\infty$ означає, що ця дотична вертикальна (x_0 – зворотна точка). Умова $f'(x_0)$ не існує означає, що дотична також не існує (x_0 – кутова точка).

2. Точки екстремуму функції є її критичними точками 1-го роду. Це зразу звужує множину точок, серед яких можуть знаходитись точки екстремуму. Обернене твердження невірне: не всяка критична точка функції є її екстремальною точкою. Так, наприклад, для функції $y=x^3$ точка x=0 є критичною точкою. Дійсно, $y'=3x^2 \Rightarrow y'\big|_{x=0}=0.$

Проте ця точка не є екстремальною, що видно з графіка цієї функції (див. рис. 17).

У зв'язку з цим критичні точки іноді називають точками, «підозрілими» на екстремум або точками можливого екстремуму, тому що екстремальні точки потрібно шукати лише серед них. В практичних задачах функція має зазвичай всього декілька критичних точок.

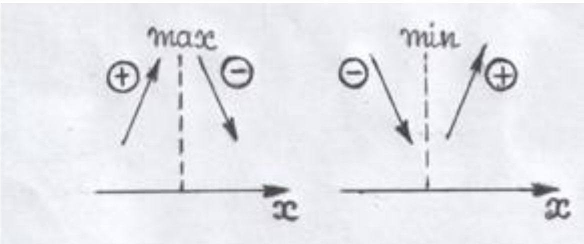
Розглянемо критерії, які дають змогу із множини критичних точок виділити точки екстремуму.

Перша достатня ознака екстремуму (перше правило). *Нехай функція y=f(x) диференційована в околі критичної точки 1-го роду* x_0 *,(крім, можливо, самої точки* x_0*). Тоді:*

1) якщо при переході через точку x_0 *зліва направо похідна функції* $f'(x)$ *змінює знак з «+» на «–» , то точка* x_0 *– точка max функції f(x);*

2) якщо ж при такому переході похідна $f'(x)$ *змінює знак з «–» на «+», то точка* x_0 *– точка min функції f(x);*

3) якщо похідна $f'(x)$ *не змінює знак, то в точці* x_0 *екстремум відсутній.*



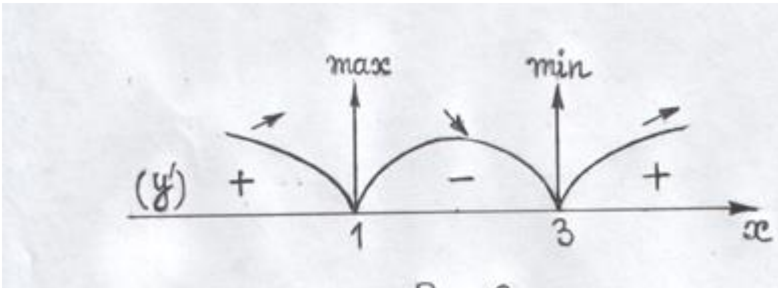


Рис.6

Повернемося до ***прикладу 1*** **п.3.1.** Нами були знайдені інтервали монотонності функції $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$ та визначений характер її поведінки на кожному інтервалі (дивись рис,3). Продовжимо дослідження – знайдемо екстремальні точки цієї функції, скориставшись достатньою ознакою екстремуму. 1) Так як при переході через стаціонарну точку $x_1 = 1$ похідна змінює знак з «+» на «–», то згідно першого правила в точці $x_1 = 1$ функція має max, точніше, круглий max (дивись рис. 6). Так як при переході через стаціонарну точку $x_2 = 3$ похідна змінює знак з «–» на «+», то в точці $x_2 = 3$ функція має min, точніше, круглий min (дивись рис. 6). 2) Знайдемо екстремальні значення функції:

$$y_{\max} = y(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 - 3 = 1; y_{\min} = y(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 - 3 = -3.$$

Тоді A(1;1) та B(3;-3) – це точки на графіку функції, де вона досягає максимуму та мінімуму відповідно. 3) Результати дослідження поведінки функції, схематично зображені на рис. 6, дають можливість легко побудувати ескіз графіка функції. Що ми й зробимо. Дамо декілька порад щодо побудови наближеного графічного зображення даної функції. Спочатку наносимо на вісь *Ox*, яка є областю визначення нашої функції, характерні точки. В даному випадку обмежимося тільки екстремальними точками $x_1 = 1$ та $x_2 = 3$, так як нулі функції, на жаль, знайти не просто, а точок розриву функція не має. Далі на площині *Oxy* відмічаємо точки A(1;1) та B(3;-3). І, нарешті, рухаючись зліва направо по осі *Ox* рисунка 6, зчитуємо отриману інформацію, будуючи одночасно ескіз графіка функції (дивись рис. 7).

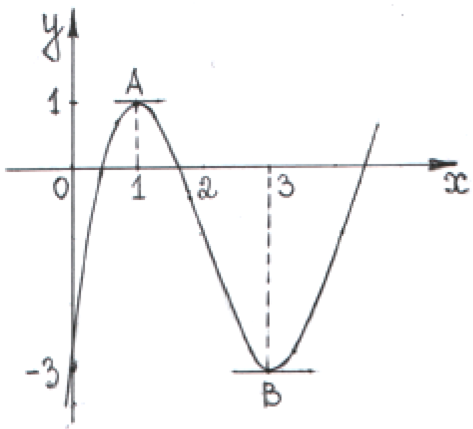


Рис. 7

***Правило дослідження функції f(x) на монотонність та екстремум*:**

1.	Знайти ОВФ *f(x)*
2.	Знайти першу похідну $f'(x)$
3.	Знайти критичні точки 1-го роду функції *f(x)* і, розмістивши їх в порядку зростання, нанести на ОВФ
4.	Записати інтервали монотонності, на які критичні точки разом з точками розриву функції ділять ОВФ.
5.	За знаком похідної $f'(x)$ встановити, зростає чи спадає функція на кожному інтервалі.
6.	Скориставшись першою достатньою ознакою екстремуму, знайти екстремальні точки.
7.	Обчислити екстремальні значення функції.

Приклад 1. Знайти інтервали монотонності та дослідити на екстремум функцію $y = 2x + 3\sqrt[3]{x^2}.$

Розв'язання. Використаємо вище наведене правило. 1) ОВФ: $(-\infty;+\infty).$

2) Знаходимо похідну $y' = 2 + \dfrac{2}{\sqrt[3]{x}} = \dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}\left(\sqrt[3]{x} + 1\right).$

3) Знаходимо критичні точки 1-го роду:

а) $y' = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x} + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x_1 = -1}$ – стаціонарна точка;

б) $y' = \infty,$ коли знаменник дробу дорівнює нулю, тобто коли $\sqrt[3]{x} = 0 \Rightarrow \boxed{x_2 = 0}$ – критична точка. Зазначимо, що в цій точці похідна терпить розрив, а сама функція визначена і неперервна. Інших критичних точок немає. 4) Відмічаємо критичні точки на ОВФ (дивись рис. 8) Інтервали монотонності: $(-\infty;-1),(-1;0),(0;+\infty).$

5) Визначаємо знак похідної на кожному інтервалі за знаком похідної у пробній точці інтервалу:

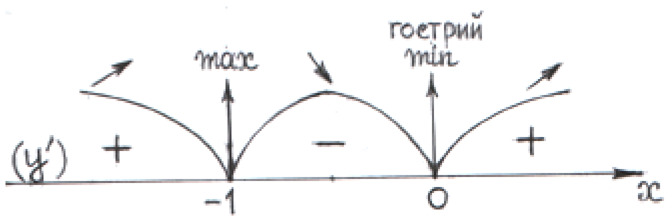


Рис.8

$$y'(-2) = \frac{2}{\sqrt[3]{-2}}\left(\sqrt[3]{-2} + 1\right) \approx \frac{2}{-1,26}(-1,2$$

– функція зростає на $(-\infty;-1)$;

$$y'(-0,5) = \frac{2}{\sqrt[3]{-0,5}}\left(\sqrt[3]{-0,5} + 1\right) \approx \frac{2}{-0,79}$$

– функція спадає на (–1;0);

$y'(1) = \dfrac{2}{\sqrt[3]{1}}\left(\sqrt[3]{1} + 1\right) = 4 > 0$ – функція зростає на $(0;\infty).$

6) При переході через стаціонарну точку $x_1 = -1$ похідна змінює знак з «+» на «–», отже точка $x_1 = -1$ – точка круглого максимуму. При переході через критичну точку $x_2 = 0$ похідна змінює знак з «–» на «+», тому точка $x_2 = 0$ – це точка гострого мінімуму (дивись рис. 8) .

7) Обчислимо екстремальні значення функції:

$$y_{\max} = y(-1) = 2(-1) + 3\sqrt[3]{(-1)^2} = 1;$$

$$y_{\min} = y(0) = 0.$$

A(-1;1) і O(0;0) – точки на графіку функції, де вона має max і min відповідно.

8) Будуємо ескіз графіка функції (дивись рис.9).

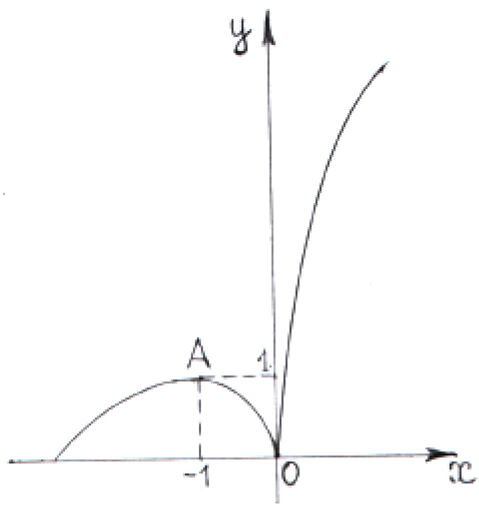


Рис. 9

У більш– менш складних прикладах визначити знак похідної у пробних точках досить трудно. Щоб «обійти» ці труднощі, в окремих випадках можна скористатися іншим способом дослідження функції на екстремум. Сформулюємо так звану другу достатню ознаку екстремуму, яка інколи виявляється зручнішою і простішою, ніж перша достатня ознака.

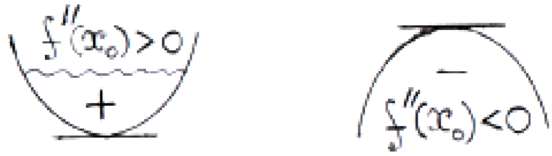
Друга достатня ознака екстремуму (друге правило). *Нехай в околі стаціонарної точки* x_0 *існує неперервна друга похідна функції f(x), причому* $f''(x_0)\neq 0$. *Тоді*

Якщо $f''(x_0)>0$, *то* x_0 *– точка min функції f(x);*

Якщо $f''(x_0)<0$, *то* x_0 *– точка max функції f(x).*

При $f''(x_0)=0$ *у точці* x_0 *може бути або max, або min,або ж не буде ні max, ні min. Потрібні додаткові дослідження.*

Унаочнює другу достатню ознаку так зване правило «ковшика»:



Правило знаходження екстремуму функції за допомогою другої похідної:

1.	Знайти першу похідну $f'(x)$.
2.	Знайти стаціонарні точки даної функції, тобто точки, в яких $f'(x)=0$.
3.	Знайти другу похідну $f''(x)$.
4.	Дослідити знак другої похідної в кожній з стаціонарних точок. Якщо при цьому друга похідна буде додатною, то функція в такій точці має min, а якщо від'ємною, то max.
5.	Обчислити значення функції в точках екстремуму.

Приклад 2. Дослідити на екстремум функцію $y=x^4e^{-x^2}$.

Розв'язання. 1) Задана функція всюди неперервно диференційовна. Знайдемо її першу похідну:

$$y'=\left(x^4e^{-x^2}\right)'=4x^3e^{-x^2}+x^4\cdot e^{-x^2}(-2x)=2x^3e^{-x^2}\left(2-x^2\right).$$

2) Шукаємо стаціонарні точки із умови $y'=0\Rightarrow 2x^3e^{-x^2}\left(2-x^2\right)=0.$

Стаціонарні точки будуть такими: $x_1=-\sqrt{2}; x_2=0; x_3=\sqrt{2}.$

3) Знайдемо другу похідну:

$$y'' = \left(e^{-x^2}\left(4x^3 - 2x^5\right)\right)' = \left(e^{-x^2}\right)' \cdot \left(4x^3 - 2x^5\right) + e^{-x^2}\left(4x^3 - 2x^5\right)' =$$
$$= e^{-x^2}\left(-2x\right)\left(4x^3 - 2x^5\right) + e^{-x^2}\left(12x^2 - 10x^4\right) = 2x^2 e^{-x^2}\left(2x^4 - 9x^2 + 6\right).$$

4) Досліджуємо знак другої похідної в стаціонарних точках:

$$y''(0) = 0; y''\left(-\sqrt{2}\right) = 2 \cdot 2e^{-2}\left(2 \cdot 4 - 9 \cdot 2 + 6\right) = 4e^{-2} \cdot \left(-4\right) < 0;$$

Отже, $y''\left(-\sqrt{2}\right) < 0; y''\left(\sqrt{2}\right) < 0.$ Тому, згідно з другого правилом у стаціонарних точках $x_1 = -\sqrt{2}$ та $x_3 = \sqrt{2}$ функція досягає максимуму.

5) Обчислимо екстремальні значення функції:

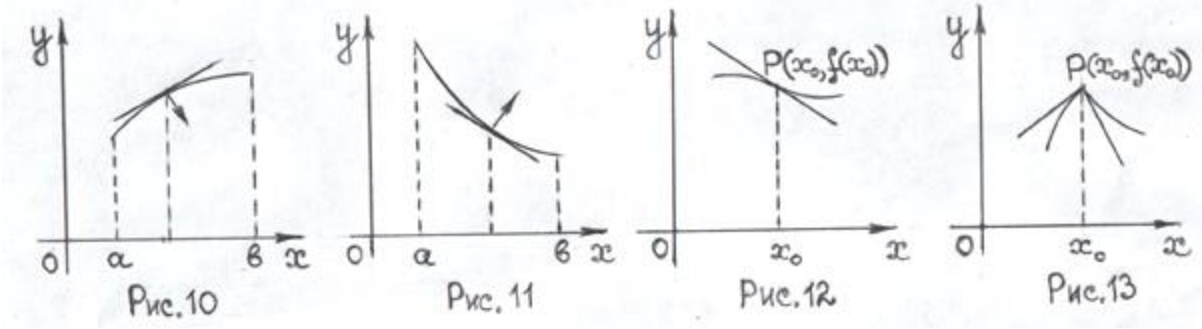
$$y\left(\pm\sqrt{2}\right) = \left(\pm\sqrt{2}\right)^4 e^{-\left(\pm\sqrt{2}\right)^2} = 4e^{-2}.$$

Примітка. Що стосується стаціонарної точки $x_2 = 0,$ то нічого конкретного поки сказати неможливо. Для її дослідження потрібно скористатися першою достатньою ознакою. Доходимо висновку, що друге правило застосовне для вужчого класу функцій , ніж перше.

3.3. Дослідження графіка функції на опуклість, угнутість. Точки перегину

Нехай крива, що задана рівнянням *y=f(x),* гладка на деякому інтервалі *(a;b),* тобто функція *f(x)* неперервна і неперервно диференційовна на цьому інтервалі. Тоді в кожній точці такої кривої можна провести дотичну.

Означення. Крива називається *опуклою(угнутою)* на інтервалі *(a;b),*якщо всі її точки, крім точки дотику, лежать *під (над)* довільною її дотичною на цьому інтервалі (рис.10 – крива опукла на інтервалі *(a;b);* рис.11 – крива угнута на інтервалі *(a;b)*).



Означення. *Точкою перегину* називається така точка неперервної кривої, яка відділяє її опуклу частину від угнутої (рис.12,13; $P\left(x_0; f\left(x_0\right)\right)$ – точка перегину кривої).

Приклади **1**. Півколо $y = \sqrt{1 - x^2}$ – це крива, яка опукла на інтервалі (-1;1) (рис. 14). **2**. Крива, задана рівнянням $y = 3^x$ (показникові функція) угнута на інтервалі $\left(-\infty; +\infty\right))$ (рис. 15).

3. Парабола $y = x^2$ також угнута на всій числовій осі (рис. 16).

4. Кубічна парабола $y = x^3$ має точку перегину (0;0), яка розмежовує опуклу і угнуту частини її графіка (рис. 17).

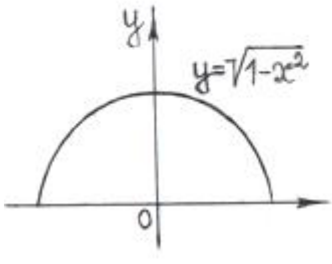


Рис. 14

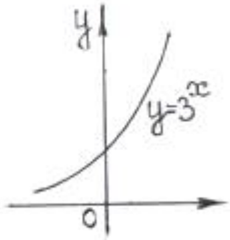


Рис.15

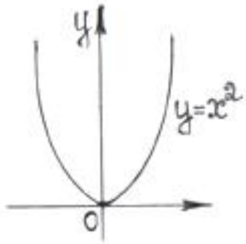


Рис. 16

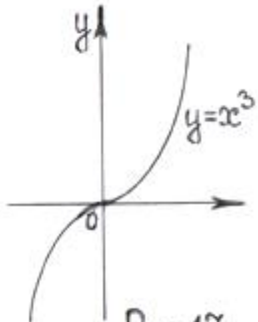


Рис.17

Не всяка крива має точки перегину. Криві, зображені на рис. 14, 15, 16 , точок перегину не мають. Іноді крива може мати їх декілька або, як синусоїда , навіть нескінченну множину.

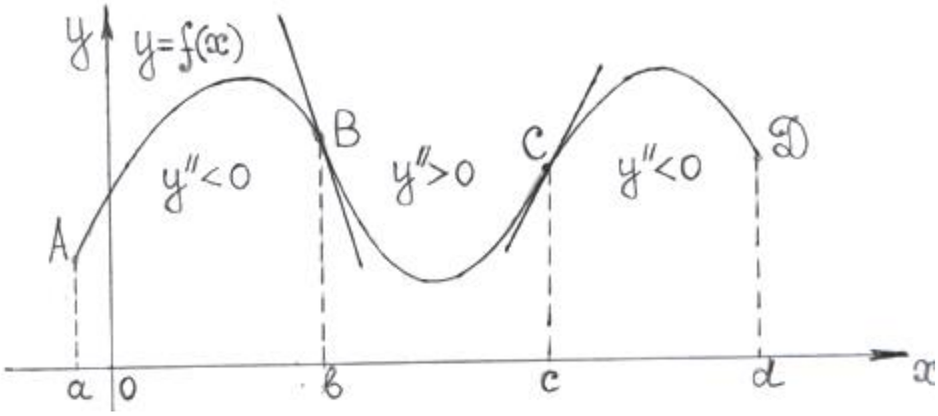
Установлення інтервалів, де крива опукла, угнута, та знаходження точок перегину має важливе значення для характеристики поведінки функції *f(x)*. Дослідження на опуклість, угнутість і перегин кривої аналогічне дослідженню на монотонність та екстремум функції, при умові, що за функцію приймаємо $f'(x)$, а за її похідну – $f''(x)$. Аналогічно тому, як за знаком першої можна визначити, зростає чи спадає функція, так за знаком другої похідної можна зробити висновок, в яку сторону вигинається лінія графіка функції. Іншими словами, аналізуючи знак другої похідної, можна встановити, на яких інтервалах крива опукла, а на яких угнута. При цьому, інтервалу спадання першої похідної відповідає інтервал опуклості графіка функції, а інтервалу зростання – інтервал угнутості.

Ознака опуклості та вгнутості кривої: *нехай функція f(x) двічі диференційовна на (a;b). Тоді, якщо для будь-якого* $x \in (a;b)$

$f''(x) > 0$, *то крива угнута на (a;b);*

якщо $f''(x) < 0$, *то крива опукла на (a;b).*

Для того щоб легше запам’ятати зв'язок між знаком другої похідної і поведінкою кривої, можна скористатися уже згадуваним раніше мнемонічним «правилом ковшика», його ще називають «правилом дощу»: дощ, падаючи на графік функції, розсіюється на випуклих ділянках, на яких $f''(x) < 0$, і збирається на угнутих , на яких $f''(x) > 0$ (дивись рис. 18). Схематично це можна зобразити ще й так: $\begin{matrix} f'', & f'' \\ \mathrm{V} & \Lambda \\ 0 & 0 \end{matrix}$, де знаки нерівностей суть: V – угнутість; Λ –опуклість.



На рис. 18 крива *y=f(x)* випукла на ділянках АВ і СД і угнута на ділянці ВС. Рис. 18.
Самі ж точки В та С суть точки перегину.

Означення. *Інтервалами опуклості, угнутості* кривої називаються інтервали її області визначення, в яких крива або лише опукла, або лише угнута.
Із наведеної вище ознаки ясно, що в інтервалах опуклості, угнутості кривої друга похідна зберігає знак, тобто ці інтервали є інтервалами знакосталості другої похідної.

Проводячи далі аналогію з дослідженням функції на екстремум, приходимо висновку, що абсциси точок перегину є точками екстремуму першої похідної $f'(x)$ і для знаходження цих точок можна скористатися необхідною і достатньою ознаками екстремуму.

Необхідна ознака існування точки перегину: *якщо* x_0 *– абсциса точки перегину, то* $f''(x_0)=0$ *або* $f''(x_0)=\infty$ *або* $f''(x_0)$ *не існує.*

Означення. *Критичними точками 2-го роду* функції *f(x)* називаються точки її області визначення, в яких друга похідна $f''(x)$ дорівнює нулю або дорівнює нескінченності або ж не існує.

Критичні точки 2-го роду розбивають ОВФ на інтервали опуклості та угнутості.

Сформульована вище необхідна ознака не є достатньою для існування точки перегину. Абсциси точок перегину слід шукати серед критичних точок 2-го роду. Проте не всяка критична точка 2-го роду є абсцисою точки перегину. Наприклад, крива $y=x^4$, має другу похідну $f''(x)=12x^2$, яка при $x=0$ дорівнює нулю $(f''(0)=0)$, але $x=0$ не є абсцисою точки перегину кривої. Ця крива взагалі не має точок перегину.

Достатня ознака існування точки перегину: *якщо при переході через критичну точку 2-го роду* x_0 *функції* $f(x)$ *друга похідна* $f''(x)$ *змінює знак, то точка* $(x_0; f(x_0))$ *є точкою перегину цієї кривої.*

Правило дослідження кривої y=f(x) на опуклість, угнутість, перегин:

1.	Знаходимо ОВФ.
2.	Знаходимо $f'(x)$ та $f''(x)$.
3.	Знаходимо критичні точки 2-го роду функції *f(x)*.
4.	Наносимо критичні точки 2-го роду на ОВФ. Вони розбивають область визначення на інтервали опуклості, угнутості кривої.
5.	За знаком другої похідної визначаємо, опукла чи угнута крива на кожному інтервалі.
6.	Знаходимо абсциси точок перегину згідно достатньої ознаки існування точки перегину.
7.	Знаходимо точки перегину.

Приклад. Знайти інтервали опуклості, угнутості та точки перегину кривої $f(x)=\left(x^2+7x\right)\sqrt[3]{x}-5x-8.$

Розв'язання. 1) ОВФ – вся числова вісь.

2) $f'(x)=\dfrac{7}{3}x^{\frac{4}{3}}+\dfrac{28}{3}x^{\frac{1}{3}}-5;\ f''(x)=\dfrac{28}{9}x^{\frac{1}{3}}+\dfrac{28}{9}x^{-\frac{2}{3}}=\dfrac{28}{9}\dfrac{x+1}{\sqrt[3]{x^2}}.$

3) Знаходимо критичні точки 2-го роду: $f''(x)=0\Rightarrow x+1=0;x_1=-1;$

$f''(x)=\infty\Rightarrow\sqrt[3]{x^2}=0;x_2=0.\ \ x_1=-1;x_2=0$ – критичні точки 2-го роду.

4) Відмічаємо критичні точки на ОВФ. Інтервали опуклості, угнутості: $(-\infty;-1),(-1;0),(0;+\infty).$

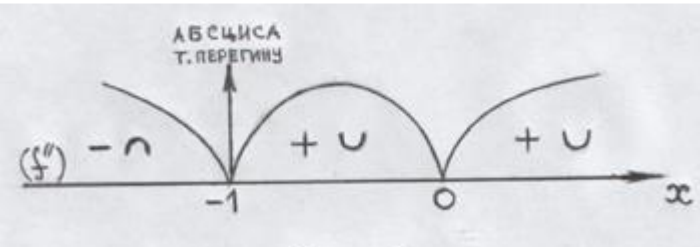


Рис. 19

5) Визначаємо знак похідної на кожному з цих інтервалів:

а) $f''(-2)=\dfrac{28}{9}\dfrac{-2+1}{\sqrt[3]{(-2)^2}}<0$ – крива опукла на інтервалі $(-\infty;-1)$;

б) $f''(-0{,}5)=\dfrac{28}{9}\dfrac{-0{,}5+1}{\sqrt[3]{(-0{,}5)^2}}>0$ – крива угнута на інтервалі (-1;0);

в) $f''(1)=\dfrac{28}{9}\dfrac{1+1}{\sqrt[3]{1^2}}>0$ – крива угнута на інтервалі $(0;+\infty)$.

6) Оскільки при переході через критичну точку $x_1=-1$ друга похідна змінює знак, то точка $x_1=-1$ є абсцисою точки перегину. При переході через критичну точку $x_2=0$ друга похідна не змінює знак, тому ця точка не є абсцисою точки перегину.

7) Знаходимо координати точки перегину:

$$f(-1)=\left((-1)^2+7(-1)\right)\sqrt[3]{-1}-5(-1)-8=6-3=3.$$

Точка перегину має координати P(-1;3).

3.4. Асимптоти кривої

При дослідженні функції і побудові її графіка важливо вияснити характер її поведінки в околі точок розриву і точок, де функція не визначена, а також вияснити її поведінку при $x\to+\infty$ та $x\to-\infty$. Інакше кажучи, важливо установити форму графіка функції при віддаленні його змінної (біжучої) точки М в нескінченність. Якщо при цьому графік функції необмежено наближається до деякої прямої, то цю пряму називають ***асимптотою кривої***, а саме

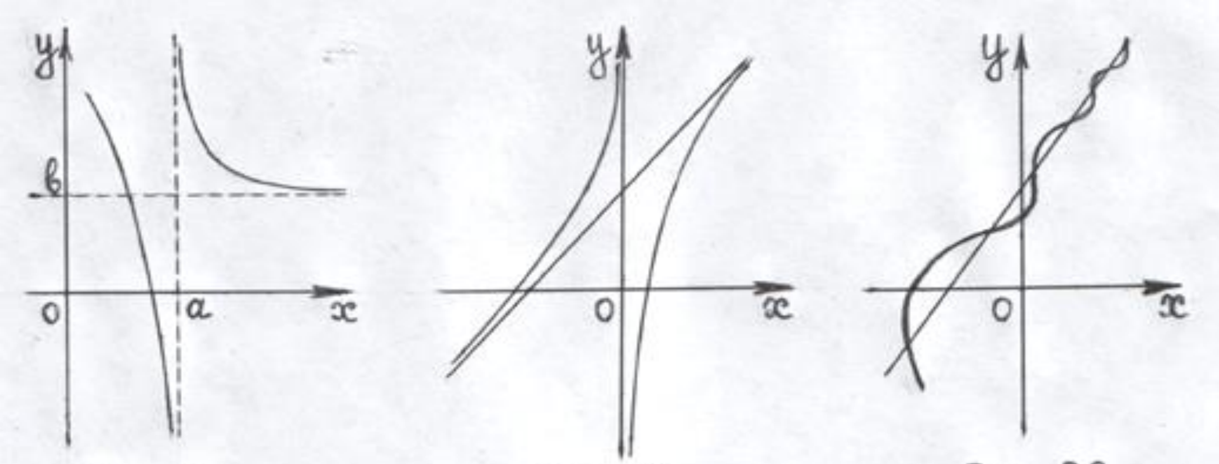


Рис. 20 Рис. 21 Рис. 22

наближення – **асимптотичним**. З поняттям асимптоти ми вперше зустрілись в курсі аналітичної геометрії при дослідженні форми гіперболи. Узагальнимо це поняття на довільні криві.

Означення. Пряма називається *асимптотою кривої*, якщо відстань від біжучої точки М кривої до цієї прямої прямує до нуля, коли точка М рухається по кривій в нескінченність.

Крива може наближатися до своєї асимптоти тими ж способами, що і змінна до своєї границі, залишаючись з однієї сторони від асимптоти або з різних сторін, нескінченне число разів перетинаючи асимптоту і переходячи з однієї її сторони на другу (дивись рис. 20, 21, 22).

Розрізняють три види асимптот: *вертикальні, горизонтальні та похилі.* Найпростіше знайти асимптоти, паралельні осям координат, – вертикальні та горизонтальні.

Вертикальна асимптота паралельна осі *Oy*. Рівняння вертикальної асимптоти кривої *y=f(x)* має вигляд *x=a*, де *a* – значення аргументу, при якому функція *f(x)* обертається на нескінченність (терпить нескінченний розрив – дивись рис. 20). Інакше кажучи, для того щоб пряма *x=a* була вертикальною асимптотою кривої *y=f(x)* , необхідно і достатньо виконання хоча б однієї із умов

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=\infty \quad \text{або} \quad \lim_{x\to a-0} f(x)=\infty \quad \text{або} \quad \lim_{x\to a} f(x)=\infty. \qquad (1)$$

Таким чином, вертикальні асимптоти можуть бути або в точках нескінченних розривів функції, або на межах ОВФ. Причому границі знаходять ліворуч та праворуч від точки розриву. Для знаходження вертикальних асимптот потрібно знайти ті скінченні значення аргументу, при яких функція необмежено зростає за абсолютною величиною.

Додаткову інформацію відносно поведінки кривої при $x \to a$ можна дістати, якщо установити до чого прямує при цьому функція $f(x)$: до $+\infty$ чи до $-\infty$. Рис. 23 ілюструє всі можливі випадки (а їх чотири) поведінки функції *f(x)* при $x \to a$, де *x=a* – точка розриву 2-го роду.

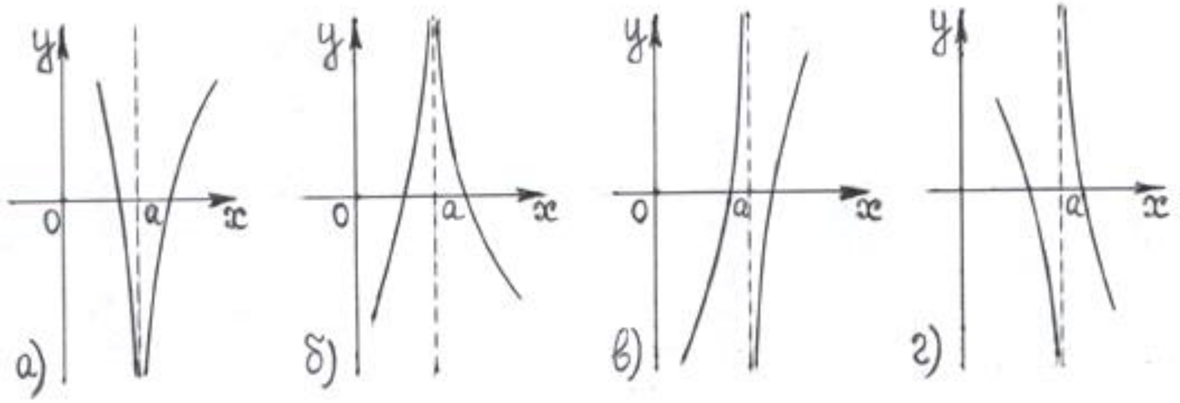


Рис.23

Горизонтальна асимптота паралельна осі *Ох*. Пряма *y=b* є горизонтальною асимптотою кривої *y=f(x)*, якщо існує границя

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b \quad \text{або} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = b . \qquad (2)$$

При $x \to +\infty$ асимптота називається правою горизонтальною, а при $x \to -\infty$ – лівою (рис. 20).

Похилі асимптоти. Питання про існування похилих асимптот вирішується за допомогою наступної теореми.

ТЕОРЕМА. *Для того щоб пряма* $y = kx + b$ *була похилою асимптотою графіка функції f(x) при* $x \to +\infty (x \to -\infty)$ *необхідно і достатньо існування границь*

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}; \quad b = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - kx], \qquad (3)$$

$$\text{(відповідно} \quad k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}; \qquad b = \lim_{x\to-\infty} [f(x) - kx] \text{)} \qquad (4)$$

При $x \to +\infty$ асимптота називається правою похилою, а при $x \to -\infty$ – лівою.

Коментарі до теореми. 1. Якщо хоча б однієї із границь у кожному випадку (3) та (4) не існує, то крива *y=f(x)* похилих асимптот не має. 2. Горизонтальну асимптоту можна розглядати як частинний випадок похилої асимптоти при $k = 0, b \neq \infty$.

Цілком можливо, що одна із віток графіка функції має похилу асимптоту, а друга – ні, або ж кожна із віток має свою похилу асимптоту. Коли крива монотонно наближається до асимптоти, то слід постаратися виявснити (якщо це не важко), з якого боку від цієї асимптоти знаходиться крива. Для дослідження розміщення кривої відносно асимптоти потрібно окремо розглядати випадки, коли $x \to +\infty$ та $x \to -\infty$ і в кожному із цих випадків визначати знак різниці $\delta = f(x) - (kx + b)$. Якщо він буде додатним, то крива розміщена над асимптотою, а якщо від'ємним, то під асимптотою. Коли ж ця різниця не буде знакосталою, то крива буде коливатися біля своєї асимптоти.

Знання асимптот значно полегшує побудову графіка функції і дає повне уявлення про його поводження в нескінченності. Більше того, знаючи асимптоти (особливо коли є вертикальні і похилі), можна зробити ескіз графіка функції.

Приклад 1. Знайти асимптоти графіка функції $y = \dfrac{x}{x-1}$.

Розв'язання. 1) ОВФ: $(-\infty;1) \cup (1;+\infty)$ – вся числова вісь, крім точки розриву x=1. 2) Вертикальною асимптотою може бути лише пряма x=1, так як точка x=1 є точкою розриву 2-го роду. Знайдемо границі $\lim\limits_{x \to 1-0} \dfrac{x}{x-1}$ та $\lim\limits_{x \to 1+0} \dfrac{x}{x-1}$.

При $x \to 1-0$ (x наближається до 1 зліва) чисельник прямує до 1 , а знаменник, пряму до нуля, залишається весь час від'ємним і тому значення функції прямують до $-\infty$. Символічно запишемо це так: $\lim\limits_{x \to 1-0} \dfrac{x}{x-1} = \dfrac{1}{-0} = -\infty$.

При $x \to 1+0$ (x наближається до 1 справа) чисельник прямує до 1, а знаменник, прямуючи до нуля, залишається весь час додатним. В свою чергу, значення функції прямують до $+\infty$:

$$\lim_{x \to 1+0} \frac{x}{x-1} = \frac{1}{+0} = +\infty.$$

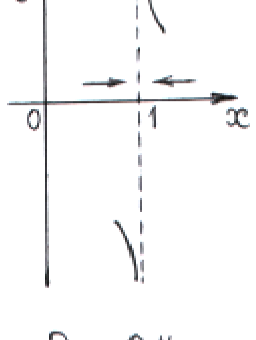


Рис. 24

Отже, пряма x=1 є вертикальною асимптотою графіка функції.

Знаючи поведінку функції в околі точки розриву x=1, можна уже побудувати «кусок» графіка функції (дивись рис. 24)

3) Горизонтальні асимптоти. Оскільки існує границя

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x}{x-1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x'}{(x-1)'}=\dfrac{1}{1}=1,$ то пряма $y=1$ є горизонтальною асимптотою графіка функції.

4) Залишилось з’ясувати питання про існування похилих асимптот $y=kx+b.$ Для цього обчислимо

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{(x-1)x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x-1}=0;\quad k=0.$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x-1}=1;\quad b=1.$$

Знову дістали рівняння горизонтальної асимптоти $y=1$ (як частинний випадок похилої при $k=0$).

Визначимо знак різниці $\delta=f(x)-(kx+b)$ при $x\to+\infty$ та $x\to-\infty.$

$$\delta=f(x)-(kx+b)=\frac{x}{x-1}-1=\frac{x-x+1}{x-1}=\frac{1}{x-1}.$$

$\delta=\dfrac{1}{x-1}>0$ при $x\to+\infty$ – крива розміщена над асимптотою;

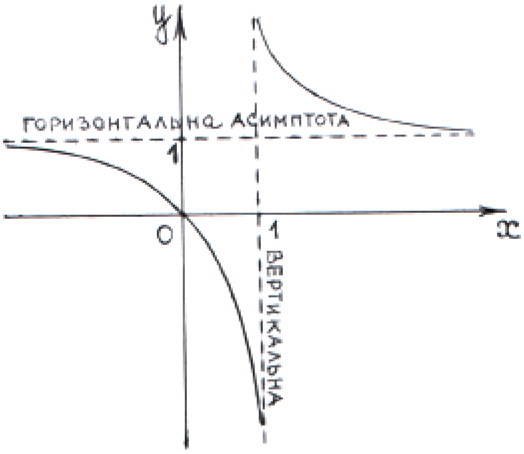


Рис. 25

$\delta=\dfrac{1}{x-1}<0$ при $x\to-\infty$ – крива розміщена під асимптотою.

Здобута інформація дає змогу, доповнивши рис. 24, побудувати ескіз графіка даної функції (рис. 25).

Приклад 2. Знайти асимптоти графіка функції $y=\ln x.$

Розв’язання. 1) ОВФ: $(0;+\infty).$ 2) Вертикальні асимптоти. При підході до граничної точки $x=0$ функція необмежено спадає: $\lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty.$ Отже, пряма $x=0$ (вісь ординат) є вертикальною асимптотою графіка цієї функції. 3) Горизонтальні асимптоти. Оскільки $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty,$ то горизонтальних асимптот графік функції не має. 4) Похилі асимптоти $y=kx+b$ шукаємо тільки при $x\to+\infty$.

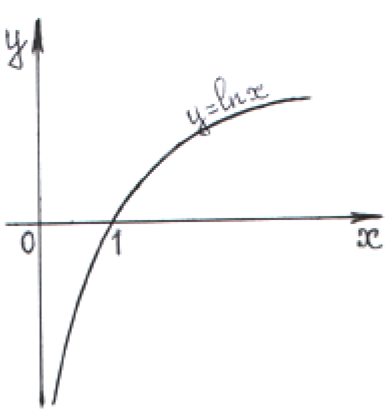


Рис.26

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{x'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0;$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln x-0\cdot x\right]=\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty.$$

А це означає, що графік функції $y=\ln x$ не має похилих асимптот (рис. 26).

Приклад 3. Знайти асимптоти кривої $y=x\cdot e^{\frac{1}{x}}$.

Розв'язання. 1) ОВФ : $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$. Функція визначена на всій числовій осі *Ox*, крім точки *x*=0, де вона розривна.

2) Вертикальні асимптоти. Крива має вертикальну асимптоту *x=0*, так як *x=0* – це точка розриву 2-го роду. Дійсно, знайдемо границі:

$$\lim_{x\to+0}x\cdot e^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+0}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}=\left|\begin{array}{l}\text{Заміна } t=\dfrac{1}{x};\\ \text{коли } x\to+0,\\ \text{то} \quad t\to+\infty.\end{array}\right|=\lim_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{\left(e^t\right)'}{t'}=\lim_{t\to+\infty}e^t=+\infty;$$

$$\lim_{x\to-0}x\cdot e^{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to-\infty}\frac{e^t}{t}=\lim_{t\to-\infty}e^t=\lim_{t\to-\infty}\frac{1}{e^{-t}}=0.$$

Пряма $x=0$ – вертикальна асимптота даної кривої.

3) Горизонтальних асимптот крива не має, оскільки

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}x\cdot e^{\frac{1}{x}}=+\infty;\ \lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}x\cdot e^{\frac{1}{x}}=-\infty.$$

4) Похилі асимптоти $y=kx+b,$ де $k=\lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}e^{\frac{1}{x}}=1;\ k=1;$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[xe^{\frac{1}{x}}-x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=\left|\begin{array}{l}\text{Заміна } t=\dfrac{1}{x};\\ \text{коли } t\to\pm\infty,\\ \text{то} \quad t\to 0.\end{array}\right|=\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=$$

$$=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{\left(e^t-1\right)'}{t'}=\lim_{t\to 0}\frac{e^t}{1}=1;\quad b=1.$$

Пряма $y=x+1$ – похила асимптота даної кривої.

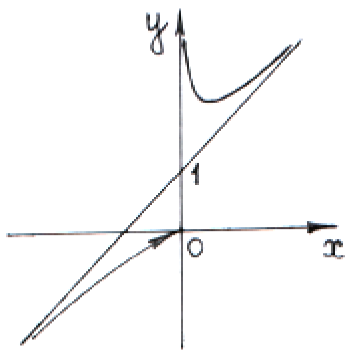


Рис. 27

Графік функції $y=x\cdot e^{\frac{1}{x}}$ схематично показаний на рис. 27.

3.5. Загальна схема дослідження функції та побудова її графіка

I. ***Елементарне дослідження функції.***

1. Знайти ОВФ.
2. З'ясувати, чи не є функція парною, непарною або періодичною.
3. Знайти (якщо це не важко) точки перетину графіка з координатними осями.
4. Знайти точки розриву (якщо вони існують) та вияснити характер розривів.
5. Знайти асимптоти графіка функції або довести, що їх немає.

II. ***Дослідження функції на монотонність та екстремум.***

1. Знайти першу похідну функції та критичні точки 1-го роду.
2. На ОВФ допоміжного рисунка відмітити критичні точки, установити інтервали монотонності функції і на кожному із них методом пробних точок за знаком першої похідної з'ясувати зростає чи спадає функція.
3. Знайти точки екстремуму за зміною знака першої похідної при переході через критичну точку 1-го роду.
4. Обчислити екстремальні значення функції.
5. У випадку дослідження функції на екстремум за допомогою другої похідної, знайти другу похідну і скористатися другою достатньою ознакою екстремуму.

III. ***Дослідження графіка функції на опуклість, угнутість та перегин.***

1. Знайти другу похідну функції та критичні точки 2-го роду.
2. Нанести критичні точки 2-го роду на ОВФ допоміжного рисунка і установити інтервали опуклості, угнутості кривої.
3. Методом пробних точок за знаком другої похідної визначити опукла чи угнута крива на кожному із цих інтервалів.
4. Знайти абсциси точок перегину за зміною знака другої похідної при переході через критичну точку 2-го роду.
5. Знайти точки перегину.

IV. ***Побудова графіка функції.***

1. Побудувати графік функції, враховуючи результати проведених досліджень в розділах I-III.

Зауваження. В процесі дослідження функції не обов'язково точно притримуватися наведеної схеми; інколи порядок дослідження зручно вибирати, виходячи із особливостей заданої функції. Більше того, при розв'язанні конкретної задачі окремі етапи цієї схеми можуть бути розширені, інші ж виявитися зайвими.

Приклад 1. Дослідити функцію $y=\frac{5-x^2}{x+3}$ та побудувати її графік.

Розв'язання. 1) Це дробово-раціональна функція, яка визначена і неперервна на всій осі *Ox* за винятком точки *x*=-3. Отже, ОВФ : $(-\infty;-3)\cup(-3;+\infty)$. 2) Так як ОВФ не симетрична відносно початку координат, то досліджувана функція ні парна, ні непарна; крім того, вона неперіодична. 3) Знайдемо точки перетину графіка функції з осями координат : а) з віссю *Ox:*

$y=0\Rightarrow 5-x^2=0; x=\pm\sqrt{5};$

$x_1=-\sqrt{5}; x_2=\sqrt{5}$ – нулі функції; $A\left(-\sqrt{5};0\right), B\left(\sqrt{5};0\right)$ – точки перетину графіка функції з віссю *Ox*; б) з віссю *Oy*: $x=0\Rightarrow y=\frac{5-0}{0+3}=\frac{5}{3};\quad C\left(0;\frac{5}{3}\right)$ – точка перетину графіка функції з віссю *Oy*.

4) Дослідимо поведінку функції поблизу точки розриву $x=-3$. Знайдемо односторонні границі функції в точці $x=-3$:

$$\lim_{x\to-3-0}\frac{5-x^2}{x+3}=\frac{-4}{-0}=+\infty;\quad \lim_{x\to-3+0}\frac{5-x^2}{x+3}=\frac{-4}{+0}=-\infty.$$

Отже, $x=-3$ є точка розриву 2-го роду, тому пряма $x=-3$ є вертикальною асимптотою.

Залишається дослідити, як веде себе функція , коли $x\to+\infty$ та $x\to-\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5-x^2}{x+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(5-x^2\right)'}{(x+3)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x}{1}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5-x^2}{x+3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(5-x^2\right)'}{\left(x+3\right)'}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x}{1}=+\infty.$$

Так як при $x\to\pm\infty$ функція не має скінчених границь, то горизонтальних асимптот у даної кривої немає.

5) Шукаємо похилі асимптоти. Для того щоб вияснити, чи має графік функції похилі асимптоти, згадаємо, що коефіцієнти k та b рівняння $y=kx+b$ знаходяться із співвідношень

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x};\qquad b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-kx\right].$$

Маємо (границі при $x\to+\infty$ та $x\to-\infty$ співпадають)

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{5-x^2}{x(x+3)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\left(5-x^2\right)'}{\left(x^2+3x\right)'}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(-2x)'}{(2x+3)'}=\frac{-2}{2}=-1;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{5-x^2}{x+3}+x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{5-x^2+x^2+3x}{x+3}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(5+3x)'}{(x+3)'}=\frac{3}{1}=3.$$

Отже, $k=-1; b=3$. Рівняння похилої асимптоти: $y=-x+3$.

З'ясуємо питання про взаємне розташування графіка функції і похилої асимптоти відносно один одного. Складемо різницю

$$\delta=f(x)-(kx+b)=\frac{5-x^2}{x+3}-(-x+3)=\frac{5-x^2}{x+3}+x-3=-\frac{4}{x+3}.$$

Знайдемо знак δ при $x\to-\infty$ та $x\to+\infty$.

$\delta=-\dfrac{4}{x+3}<0$ при $x\to+\infty$ – крива розміщена під асимптотою.

$\delta=-\dfrac{4}{x+3}>0$ при $x\to-\infty$ – крива розміщена над асимптотою.

6) Знаходимо першу похідну даної функції:

$$y'=\frac{-2x(x+3)-\left(5-x^2\right)}{(x+3)^2}=-\frac{x^2+6x+5}{(x+3)^2}=-\frac{(x+5)(x+1)}{(x+3)^2}.$$

7) Знаходимо критичні точки 1-го роду:

$y'=0\Rightarrow x_1=-5; x_2=-1$ – критичні (стаціонарні) точки 1-го роду. Похідна терпить розрив при x=-3, але ця точка не входить в ОВФ.

8) Відмічаємо критичні точки на ОВФ (дивись допоміжний рис. 28).Цими точками та точкою розриву ОВФ ділиться на чотири інтервали монотонності:

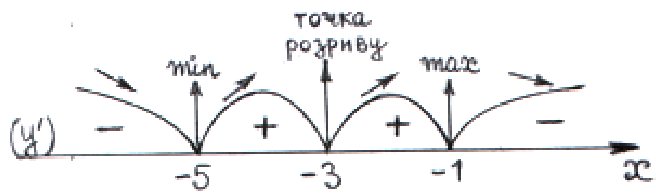


Рис. 28

$(-\infty;-5),(-5;-3),(-3;-1),(-1;+\infty).$

9) Методом пробних точок визначимо, зростає чи спадає функція на кожному з цих інтервалів:

$y'(-6)<0$ – функція спадає на інтервалі $(-\infty;-5)$;

$y'(-4)>0$ – функція зростає на інтервалі $(-5;-3)$;

$y'(-2)>0$ – функція зростає на інтервалі (–3;–1);

$y'(0) < 0$ – функція спадає на інтервалі $(-1;+\infty)$.

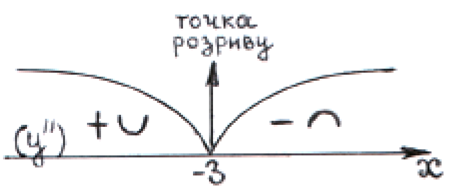
10) Дослідимо функцію на екстремум. При переході через точку $x = -5$ перша похідна змінює свій знак з «–» на «+», тому $x = -5$ – це точка мінімуму. При переході через точку $x = -1$ перша похідна змінює знак з «+» на «–», тому $x = -1$ – це точка максимуму.

11) Обчислимо екстремальні значення функції:

$$y_{\min} = y(-5) = \frac{5-(-5)^2}{-5+3} = \frac{5-25}{-2} = 10; \; y_{\max} = y(-1) = \frac{5-(-1)^2}{-1+3} = \frac{5-1}{2} = 2$$

12) Знаходимо другу похідну функції: $y'' = -\frac{8}{(x+3)^3}$. Друга похідна в нуль ніде не перетворюється і зазнає розриву при $x = -3$, але ця точка не входить в ОВФ. Критичних точок 2-го роду функція не має, тому друга похідна може змінювати знак тільки при переході через точку розриву $x = -3$. Інтервали опуклості, угнутості (рис. 29): $(-\infty;-3), (-3;+\infty)$.

13) Визначимо, опукла чи угнута крива па кожному інтервалі:



$y''(-4) > 0$ – крива угнута на інтервалі $(-\infty;-3)$; $y''(0) < 0$ – крива опукла на інтервалі $(-3;+\infty)$. Точок перегину функція не має.

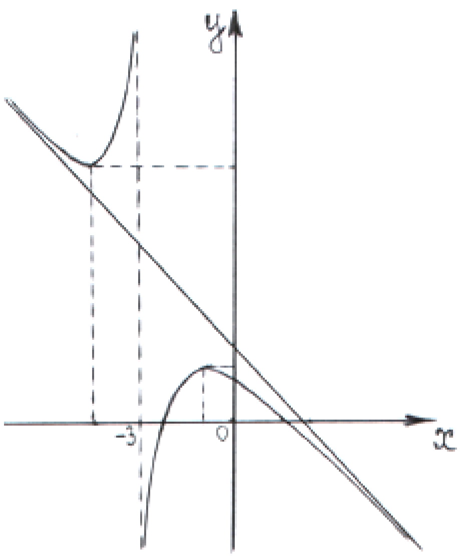


Рис.30

14) На основі знайдених даних побудуємо графік функції в такій послідовності: насамперед відмітимо на осі *Ox* характерні точки (точку розриву, нулі функції, точки екстремуму). На площині *Oxy* відмітимо точки графіка, які відповідають виділеним значенням аргументу; проведемо вертикальну та похилу асимптоти. Характер точки розриву визначає вигляд кривої поблизу цієї точки. Знання інтервалів зростання та спадання функції, інтервалів опуклості, угнутості допоможе нам точніше побудувати графік даної функції (дивись рис. 30).

Приклад 2. Дослідити функцію $y = \frac{\ln x}{x}$ і побудувати її графік.

Розв'язання. 1) Функція визначена і неперервна на інтервалі $(0;+\infty)$.

2) Функція ні парна, ні непарна; неперіодична. 3) Знаходимо точки перетину графіка з координатними осями: а) з віссю *Ox*: $y = 0 \Rightarrow \frac{\ln x}{x} = 0; \ln x = 0;$

$x=1$ – нуль функції; A(1;0) – точка перетину з віссю *Ox;* б) з віссю *Oy* точок перетину графік не має, бо *x*=0 не належить ОВФ. 4) Досліджуємо поведінку функції на границі її області визначення. Якщо $x \to 0$, залишаючись додатним, то

$\lim\limits_{x\to+0} f(x) = \lim\limits_{x\to+0} \frac{\ln x}{x} = -\infty.$ Це випливає з того, що $\lim\limits_{x\to+0} \ln x = -\infty; \lim\limits_{x\to+0} \frac{1}{x} = +\infty.$

Таким чином, пряма *x*=0 (вісь ординат) є вертикальна асимптота.

Через те, що $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)'}{x'} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0,$ то пряма *y*=0 (вісь *Ox*) є горизонтальна асимптота. 5) Шукаємо похилі асимптоти *y*=*kx*+*b*. Ліва похила асимптота відсутня, так як неможливо, щоб $x \to -\infty$. Маємо

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)'}{\left(x^2\right)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x^2} = 0;$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{\ln x}{x} - 0 \cdot x\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

Оскільки *k*=*b*=0, то пряма *y*=0 (вісь *Ox*) є горизонтальна асимптота. Відмітимо, що цей результат ми вже отримали раніше у **п.4.**

6) Знаходимо першу похідну даної функції

$y' = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ та критичні точки 1-го роду з умови $y' = 0 \Rightarrow \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0; 1 - \ln x = 0; \ln x = 1;$ *x*=*e* – стаціонарна точка.

Інших критичних точок функція не має, так як існує в усіх точках ОВФ.

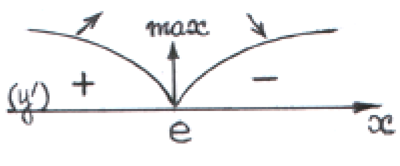


Рис.31

7)Відмічаємо цю єдину критичну точку на ОВФ (рис. 31). Вона розбиває область визначення на два інтервали монотонності: $(0;e),(e;+\infty); \quad e \approx 2{,}72.$ Методом пробних точок дослідимо знак похідної y' на кожному з цих інтервалів:

а) $y'(1) = \frac{1 - \ln 1}{1^2} = 1 > 0$ – функція зростає на інтервалі (0;*e*);

б) $y'\left(e^2\right) = \frac{1 - \ln e^2}{e^4} = \frac{1 - 2\ln e}{e^4} = \frac{1-2}{e^4} = -\frac{1}{e^4} < 0$ – функція спадає на інтервалі $(e;+\infty)$. 8) Перевіряємо достатні умови екстремуму. Перша похідна

y', як неперервна функція на ОВФ, змінює знак з «+» на «-», коли x переходить через стаціонарну точку $x=e$. А це означає, що точка $x=e$ є точкою максимуму функції. Легко пересвідчитись, що

$y_{\max} = y(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e} \approx 0{,}37.$ 9)Щоб дослідити графік функції на опуклість, угнутість, знайдемо другу похідну:

$$y'' = \left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right)' = \frac{-\frac{1}{x}\cdot x^2 - (1-\ln x)\cdot 2x}{x^4} = \frac{2\ln x - 3}{x^3}.$$

Вона неперервна на ОВФ. Прирівнюючи y'' до нуля, знаходимо критичні точки 2-го роду функції: $y''=0 \Rightarrow \frac{2\ln x - 3}{x^3} = 0; 2\ln x - 3 = 0; \ln x = \frac{3}{2}; \ x = e^{\frac{3}{2}} \approx 4{,}49$ – критична точка 2-го роду. Ця точка розбиває ОВФ на два інтервали опуклості, угнутості (дивись рис. 32): $(-\infty; e^{\frac{3}{2}}), (e^{\frac{3}{2}}; +\infty).$ У кожному із них друга похідна зберігає певний знак. Щоб з'ясувати, який саме, скористаємося методом пробних точок:

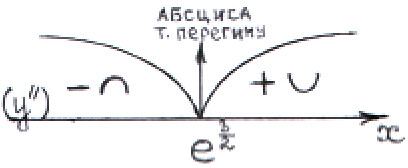


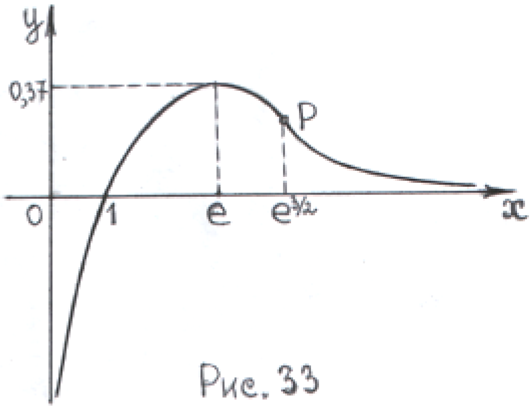
Рис.32

а) $y''(e) = \frac{2\ln e - 3}{e^3} = \frac{2-3}{e^3} = -\frac{1}{e^3} < 0$ – функція опукла на інтервалі $(0; e^{\frac{3}{2}})$;

б) $y''(e^2) = \frac{2\ln e^2 - 3}{e^6} = \frac{4-3}{e^6} = \frac{1}{e^6} > 0$ – функція угнута на інтервалі $(e^{\frac{3}{2}}; +\infty)$.

10) Знаходимо точки перегину. Оскільки при переході через критичну точку 2-го роду $x = e^{\frac{3}{2}}$ відбувається зміна знака другої похідної (з «-» на «+»), то точка $x = e^{\frac{3}{2}}$ – абсциса точки перегину.

$$y\left(e^{\frac{3}{2}}\right)=\frac{\ln e^{\frac{3}{2}}}{e^{\frac{3}{2}}}=\frac{\frac{3}{2}\ln e}{e^{\frac{3}{2}}}=\frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}}\approx 0{,}33.$$ P(4,49;0,33) – точка перегину даної функції. 11) Враховуючи всі отримані результати дослідження, будуємо графік функції $y=\frac{\ln x}{x}$ (рис.33).



3.6. Найбільше та найменше значення функції на проміжку

Якщо функція *y=f(x)* неперервна на відрізку на $[a;b]$, то згідно з теоремою Вейєрштрасса [ ] на цьому відрізку вона досягає найбільшого і найменшого значень, які позначають так: $M=\max\limits_{[a;b]} f(x)$; $m=\min\limits_{[a;b]} f(x)$ і називають абсолютними екстремумами.

Студент повинен чітко розрізняти поняття максимуму (мінімуму) функції в точці і її найбільшого (найменшого) значення на заданому відрізку. Поняття екстремуму носить локальний характер і завжди зв'язане з поведінкою функції тільки в деякому околі точки із ОВФ, а не з усією ОВФ, тоді як найбільше (найменше) значення функції на відрізку більше (менше) всіх інших значень функції на цьому відрізку.

Неперервна на відрізку $[a;b]$ функція $f(x)$ набуває своїх найбільшого і найменшого значень, або в критичних точках, що належать інтервалу $(a;b)$, або на кінцях відрізка $[a;b]$. Якщо функція досягає найбільшого (найменшого) значення всередині відрізка, то це найбільше (найменше) значення є одночасно локальним максимумом (мінімумом) заданої функції.

Правило знаходження найбільшого та найменшого значень функції f(x) на відрізку [a;b], де вона неперервна:

1. *Знайти критичні точки 1-го роду функції f(x) і серед них вибрати ті, що належать (a;b).*
2. *Обчислити значення функції f(x) у вибраних критичних точках та на кінцях відрізка [a;b] (не досліджуючи її на екстремум).*
3. *Із отриманих значень вибрати найбільше і найменше. Вони є відповідно найбільшим і найменшим значенням функції f(x) на відрізку [a;b].*

Коментарі до правила знаходження найбільшого та найменшого значень функції.

1) Наведене правило застосовне тільки для тих функцій, у яких похідна існує в усіх точках відрізка *[a;b]* за виключенням скінченого числа точок. Крім того, припускаємо, що число стаціонарних точок на *[a;b]* також скінчене. Такі

обмеження не є надто жорсткими, оскільки в практичних задачах ці умови виконуються.
2) Слід мати на увазі, що функція *f(x)*, неперервна тільки на інтервалі *(a;b)* (зокрема на нескінченному інтервалі), може і не досягати свого найбільшого або найменшого значень. Наприклад, в інтервалі (0;1) функція $f(x)=x^2$ не має ні найбільшого, ні найменшого значень і набуває значень, як завгодно близьких до 0, на лівому кінці інтервалу і близьких до 1 – на правому його кінці. Функція $f(x)=7x^2$ на проміжку (0;1] не має найменшого значення, але має найбільше значення M=7. Ще один приклад: функція $f(x)=\frac{1}{x}$ неперервна в проміжку $(0;+\infty)$, в кожній точці цього проміжку має певне значення, але серед них немає найбільшого і найменшого значень.
3) Якщо на деякому інтервалі неперервна функція *f(x)* має єдину критичну точку $x_0 \in (a;b)$ і x_0 – точка максимуму (мінімуму), то $f(x_0)$ буде найбільшим (найменшим) значенням функції на цьому інтервалі. Тоді не має потреби користуватися наведеним вище правилом. Простіше дослідити функцію на екстремум в критичній точці x_0.

Приклад 1. Знайти найбільше і найменше значення функції $f(x)=2x^3-3x^2-36x$ на відрізку [–1;4].

Розв'язання. Задана функція неперервна на відрізку [–1;4], а тому має на ньому найбільше та найменше значення.
1) Знаходимо критичні точки, які належать інтервалу (–1;4).

$$f'(x)=6x^2-6x-36=6(x^2-x-6)=6(x+2)(x-3).$$

$f'(x)=0 \Rightarrow x_1=-2; x_2=3$ – стаціонарні точки. Точка $x_1=-2\notin(-1;4)$. Залишається тільки критична точка $x_2=3\in(-1;4)$. 2) Обчислюємо значення функції в критичній точці $x_2=3$ та на кінцях відрізка [-1;4], маємо $f(-1)=31;\quad f(3)=-81;\quad f(4)=-64.$ 3)Із цих трьох значень функції вибираємо найбільше і найменше:

$$M=\max_{[-1;4]} f(x)=f(-1)=31; \qquad m=\min_{[-1;4]} f(x)=f(3)=-81.$$

Приклад 2. Знайти найбільше та найменше значення функції $y=x^2\ln x$ на відрізку [1;e].

Розв'язання. 1) Знаходимо критичні точки 1-го роду:

$$y'=2x\ln x+x^2\cdot\frac{1}{x}=x(2\ln x+1);\ y'=0\Rightarrow x(2\ln x+1)=0.$$

Враховуючи, що $x>0$, маємо $2\ln x+1=0;$ $\ln x=-\frac{1}{2},$ звідки $x=e^{-\frac{1}{2}};\ x=\frac{1}{\sqrt{e}}\notin[1;e].$ Отже, критичних точок на заданому відрізку немає. 2) Обчислимо значення функції на кінцях відрізка [1;e]: $y(1)=1^2\cdot\ln 1=1\cdot 0=0;$ $y(e)=e^2\cdot\ln e=e^2.$ 3)Таким чином, найбільше значення розглядуваної функції на відрізку [1;e] дорівнює e^2, а найменше – нулю: $M=y(e)=e^2;\ \ m=y(1)=0.$

Приклад 3. Знайти найбільше та найменше значення функції $f(x)=\frac{1}{\sin x}$ на відрізку $[0;\pi].$

Розв'язання. Функція терпить розрив на кінцях даного відрізка. Дослідимо її поведінку в околах точок розриву:

$$\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}\frac{1}{\sin x}=+\infty;\ \lim_{x\to\pi-0}f(x)=\lim_{x\to\pi-0}\frac{1}{\sin x}=+\infty.$$

Оскільки поблизу точок $x=0$ і $x=\pi$ (поблизу кінців відрізка) функція досягає як завгодно великих додатних значень, то найбільшого значення на відрізку $[0;\pi]$ вона не має.

Знайдемо критичні точки, які належать інтервалу $(0;\pi)$:

$$f'(x)=-\frac{\cos x}{\sin^2 x};\ f'(x)=0\Rightarrow-\frac{\cos x}{\sin^2 x}=0;\cos x=0;x=\frac{\pi}{2}$$ –

стаціонарна точка; вона належить інтервалу $(0;\pi)$. В точці $x=\frac{\pi}{2}$ функція приймає найменше значення $m=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1.$

3.7. Практичні задачі на знаходження найбільшого (найменшого) значення

Задачі на знаходження найбільшого (найменшого) значення деякої величини відіграють значну роль у природничих, технічних та економічних дослідженнях. Часто ці задачі зв'язані з доцільним і одночасно економним витрачанням тих чи інших матеріалів.

Розв'язання практичних (текстових) задач на екстремум рекомендуємо проводити згідно **такої схеми**:

1.Визначити, для якої величини вимагається знайти найбільше (найменше) значення. Ця величина і буде досліджуваною функцією.

2.Скласти аналітичний вираз для досліджуваної функції.

3.Серед величин, від зміни яких залежить зміна функції, вибрати одну за незалежну змінну (за аргумент). Виразити досліджувану функцію через аргумент (для цього умови задачі повинні дати достатнє число співвідношень між змінними).
4.Із самої суті прикладної задачі встановити область визначення функції (проміжок зміни аргументу).
5.Розв'язати задачу на знаходження найбільшого (найменшого) значення функції на цьому проміжку (він може бути і необмеженим).

Доповнення до схеми : 1) При розв'язанні текстових задач (особливо задач геометричного змісту) бажано зробити рисунок, який допоможе виразити змінні, що входять в умову задачі, через одну із них. 2) В прикладних задачах частіше всього трапляється випадок, коли всередині проміжку маємо тільки одну критичну точку. Якщо в цій точці неперервна функція має локальний максимум (мінімум), то він і є найбільше (найменше) значення. 3) Інколи міркування чисто фізичного або геометричного характеру дають можливість легко судити про те, яка критична точка дає максимум, а яка мінімум. Це звільняє від необхідності подальшого аналітичного дослідження на екстремум.

Задача 1. Сума двох додатних чисел дорівнює ***a.*** Які мають бути ці числа, щоб їхній добуток був найменшим?

Розв'язання. Позначимо через ***x*** один із доданків. Тоді другий доданок дорівнює ***a–x*** . Якщо через ***f*** позначимо добуток цих доданків, то маємо $f = x(a - x) = ax - x^2$. Задача звелась до знаходження найбільшого значення функції $f(x) = ax - x^2$ на проміжку (0;*a*). Знаходимо критичні точки функції *f(x):* $f'(x) = a - 2x;\ f'(x) = 0 \Rightarrow a - 2x = 0;\ x_0 = \dfrac{a}{2}$ – єдина критична (стаціонарна) точка, причому $x_0 \in (0;a)$. Покажемо, що при $x_0 = \dfrac{a}{2}$ функція *f(x)* набуває максимального значення. Використаємо другу достатню ознаку екстремуму: $f''(x) = -2 < 0$ всюди (а значить і при $x_0 = \dfrac{a}{2}$). Тому при $x_0 = \dfrac{a}{2}$ функція досягає максимуму, який і буде найменшим значення функції *f(x)* на проміжку (0;*a*).

Отже, добуток двох додатних чисел, сума яких дорівнює ***a***, буде найбільшим, коли ці числа однакові (обидва доданки дорівнюють $\dfrac{a}{2}$).

Задача 2. Знайти максимальну площу рівнобедреного трикутника, бічна сторона якого дорівнює ***l***.

Розв'язання. Нехай **x** – висота трикутника (рис. 34). Площа трикутника $S = \frac{1}{2} OC \cdot AB.$ Оскільки $AB = 2AO = 2\sqrt{l^2 - x^2}$, то площа трикутника $S = S(x) = x\sqrt{l^2 - x^2}.$ Таким чином, площа трикутника виражена як функція його висоти. Потрібно знайти найбільше значення функції $S(x)$ на відрізку [0;*l*].

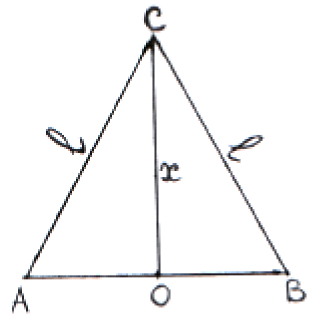


Рис. 34

Обчислимо значення функції на кінцях відрізка: $S(x) = 0; S(l) = 0$. Так як площа – величина невід'ємна, то функція *S(x)* досягає максимуму на інтервалі (0;*l*). Знайдемо критичні точки, які належать цьому інтервалу. Якщо ця точка єдина (а це дійсно так), то вона і буде точкою максимуму функції *S(x)* на інтервалі (0;*l*).

$$S'(x) = \sqrt{l^2 - x^2} - x \cdot \frac{2x}{2\sqrt{l^2 - x^2}} = \frac{l^2 - 2x^2}{\sqrt{l^2 - x^2}};$$

$S'(x) = 0 \Rightarrow l^2 - 2x^2 = 0; x = \pm\frac{l}{\sqrt{2}}\cdot$ Нас цікавить тільки критична (стаціонарна) точка $x_0 = \frac{l}{\sqrt{2}}$, бо точка

$$x = -\frac{l}{\sqrt{2}} \notin (0;l). \quad S'(x) = \infty \Rightarrow \sqrt{l^2 - x^2} = 0; \quad x = \pm l \notin (0;l).$$

Отже, на інтервалі (0;*l*) знаходиться єдина критична (стаціонарна) точка, яка і буде точкою максимуму і одночасно точкою найбільшого значення функції. Обчислимо максимальну площу трикутника:

$$S_{\max} = S\left(\frac{l}{\sqrt{2}}\right) = \frac{l}{\sqrt{2}}\sqrt{l^2 - \frac{l^2}{2}} = \frac{l^2}{2}(\text{кв.од}).$$

Максимальну площу буде мати прямокутний трикутник.

Задача 3. Залізнична колія проходить по прямій ***AB=r.*** В стороні на відстані ***l*** від залізниці знаходиться завод ***C*** , із якого перевозять вантаж в місто ***A.*** Завод потрібно з'єднати шосейною дорогою із залізницею. Вартість перевезень автотранспортом в 3 рази дорожча вартості перевезень залізницею. Виникає запитання: як провести шосе ***CP*** до залізниці, щоб вартість перевезень від заводу ***C*** до міста ***A*** була найменшою?

Розв'язання. Припустимо, що ми перевозимо вантаж від заводу ***C*** спочатку автотранспортом до деякого пункту ***P*** на залізниці, а потім залізницею до міста ***A.*** Ясно, що шосейна дорога повинна бути прямолінійною, а пункт ***P*** не може лежати ліворуч точки ***B*** або праворуч точки ***A*** (рис. 35).

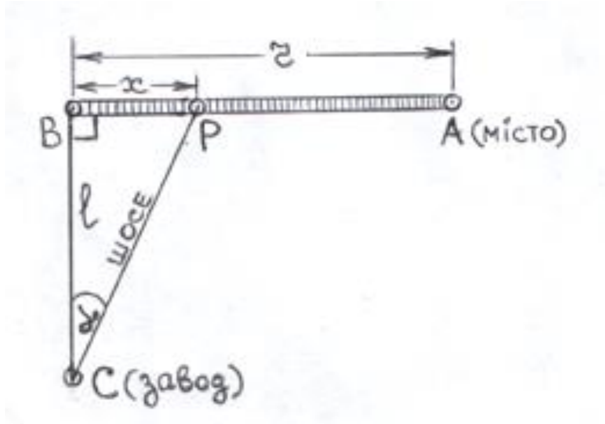


Рис. 35

Введемо позначення ***BP=x,*** тоді ***x*** змінюється в межах $0 \le x \le r$**,** а шлях перевезення вантажу залізницею ***PA=r–x***.

Нехай ***k*** – вартість перевезень залізницею (вартість тонно-кілометра); тоді ***3k*** – вартість перевезень автотранспортом. Оскільки $CP = \sqrt{l^2 + x^2}$**,** то загальна вартість перевезень вантажу ***W*** від заводу ***C*** до міста буде такою: $W(x) = k(r - x) + 3k\sqrt{l^2 + x^2}$**.** Так як ***k=const,*** то задача зводиться до знаходження найменшого значення функції $f(x) = r - x + 3\sqrt{l^2 + x^2}$ на відрізку [0;*l*]. Знайдемо критичні точки функції ***f(x)*** , які належать інтервалу (0;*l*).

$$f'(x) = -1 + \frac{3x}{\sqrt{l^2 + x^2}} = \frac{3x - \sqrt{l^2 + x^2}}{\sqrt{l^2 + x^2}};$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x - \sqrt{l^2 + x^2} = 0; 3x = \sqrt{l^2 + x^2};$$

$$9x^2 = l^2 + x^2; 8x^2 = l^2; x = \pm\frac{l}{\sqrt{8}}; x_1 = \frac{l}{\sqrt{8}}$$ – єдина критична (стаціонарна) точка, яка належить інтервалу (0;*l*), бо $x_2 = -\frac{l}{\sqrt{8}} \notin (0; l).$

Переконаємося, що це точка мінімуму функції ***f(x)*** . Знайдемо другу похідну функції ***f(x)***: $f''(x) = \frac{3l^2}{(l^2 + x^2)\sqrt{l^2 + x^2}}$**.** Очевидно, що $f''(x) > 0$ для всіх ***x***, в тому числі і для стаціонарної точки x_1. Тому згідно з другою достатньою ознакою екстремуму точка $x_1 = \frac{l}{\sqrt{8}}$ є точкою мінімуму функції $f(x)$**.** А оскільки ця стаціонарна точка єдина на [0;*l*], то вона одночасно є точкою, де функція ***f(x)*** досягає найменшого значення на відрізку [0;*l*].

Таким чином, транспортні витрати мінімальні, якщо вантаж перевозять шосейною дорогою до пункту ***P***, який знаходиться на відстані $\dfrac{l}{\sqrt{8}}$ від точки ***B.***

Зауваження. В процесі розв'язання ніде не використовувалась величина ***r*** – відстань між точками ***B*** та ***A.*** Це означає, що завжди вигідно везти вантаж до залізниці під певним кутом α, незалежно від того, на яку відстань він перевозиться. Цей кут залежить лише від співвідношення між вартостями перевезень залізницею і автотранспортом: $tg\alpha = \dfrac{x}{l} = \dfrac{l}{\sqrt{8}\cdot l} = \dfrac{1}{\sqrt{8}}$.

Задача 4. Нехай витрати виробництва ***K(x)*** визначає функція $K(x) = x^3 - 8x^2 + 25x,$ де x – обсяг продукції $(0 < x < \infty)$. При якому значенні x середні витрати виробництва мінімальні ?

Розв'язання. Середні витрати виробництва розраховуємо згідно з формулою $\Pi(x) = \dfrac{K(x)}{x} = x^2 - 8x + 25,$ де $0 < x < \infty$. Потрібно знайти найменше значення функції $\Pi(x)$ на заданому проміжку.

Знаходимо першу похідну: $\Pi'(x) = 2x - 8.$ Знаходимо критичні точки функції $\Pi(x)$: $\Pi'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 8; x = 4$ – єдина критична (стаціонарна) точка. Покажемо, що в цій точці функція $\Pi(x)$ досягає мінімуму. Знайдемо другу похідну: $\Pi''(x) = 2 > 0$ для всіх x, а значить і для стаціонарної точки $x=4$. На підставі другої достатньої ознаки екстремуму ця точка є точкою мінімуму і одночасно точкою, в якій функція $\Pi(x)$ набуває найменшого значення.

Таким чином, мінімальні середні витрати виробництва складають:

$$\Pi_{\min} = \Pi(4) = 4^2 - 8\cdot 4 + 25 = 9.$$

Індивідуальні завдання

ВАРІАНТ 1

1. Знайти похідні функцій:

$$a)\, y=\frac{x+e^{-2x}}{x-e^{-2x}}; \qquad b)\, y=\ln\frac{tg\frac{x}{3}}{5+\sin^2 2x};$$

$$c)\, y=\cos^3(\log_2 5x)+5^{\frac{\pi}{2}}; \qquad d)\, y\ln y=x^2+\sqrt{x+y};$$

$$e)\, y=\sqrt{\frac{x^2(x+1)}{(1-x)^2}}.$$

2. Знайти границі функцій:

$$a)\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi-2arctgx}{e^{\frac{3}{x}}-1}; \qquad b)\lim_{x\to 0}\left[\frac{\pi}{4x}-\frac{\pi}{2x\left(e^{\pi x}+1\right)}\right].$$

3. Знайти найбільше та найменше значення функції $y=x+\dfrac{4}{x+2}$ на відрізку [-1;3].

4. Серед усіх циліндрів, які можуть бути вписані в конус з радіусом основи r=12 см і висотою h=36 см , знайти циліндр найбільшого об'єму.

5. Дослідити функцію і побудувати її графік: $y=\dfrac{x^3-x^2}{(x+1)^2}$.

ВАРІАНТ 2

1. Знайти похідні функцій:

$$a)\, y=\frac{\arcsin 2x}{1-8x^2}; \qquad b)\, y=\left(6x^2-\frac{2}{x^4}+10\right)^3;$$

$$c)\, y=e^{-\cos^4 5x}; \qquad d)\, x^2=arctg(x+y)+\sqrt{y};$$

$$e)\, y=(x+\ln x)^{\frac{1}{x}}.$$

2. Знайти границі функцій:

$$a)\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-3x-1}{\sin^2 5x}; \qquad b)\lim_{x\to 0}x\cdot\ln\left(\frac{2}{\pi}arctgx\right).$$

3. Знайти найбільше та найменше значення функції $x+\sqrt{x}$ на відрізку [0;4].

4. Які розміри повинен мати циліндр найбільшої повної поверхні, вписаний в кулю радіуса R=5 см?

5. Дослідити функцію та побудувати графік: $y=\dfrac{x^2+8x}{1-x}$.

ВАРІАНТ 3

1. Знайти похідні :

$$a)\ y=\frac{5x}{\sqrt{x^3+4x^2-2}}+12^{\frac{\pi}{2}};\qquad b)\ y=\left(3^{\sin 2x}-\cos 2x\right)^3;$$

$$c)\ y=\arcsin^2\ln 2x;\qquad d)\ xtgy-x^2+2y^2=5;$$

$$e)\ y=(x+1)^3\cdot\sqrt[5]{(x-2)^3\cdot(3-x)^{-2}};$$

2. Знайти границі функцій:

$$a)\ \lim_{x\to+0}\frac{3+\ln x}{2-3\ln\sin x};\qquad b)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)tgx.$$

3. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=x^3+2x^2-4x-3$ в точці (-1;2).

4. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 48 см. Знайти значення довжини його основи , при якому площа трикутника найбільша.

5. Дослідити функцію та побудувати її графік: $y=\dfrac{x^2-1}{x^4}$.

ВАРІАНТ 4

1. Знайти похідні функцій:

$$a)\ y=\frac{\sqrt{1+3x^2}}{2+3x^2};\qquad b)\ y=arctg\left(x^3\right)+3^{x\cos^2 x};$$

$$c)\ y=\ln\arcsin\sqrt{3x};\qquad d)\ x\cdot\sin 2y+y\cdot\cos 2y=0$$

$$e)\ y=(ctgx)^{x^3}.$$

2. Знайти границі функцій :

$$a)\ \lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a};\qquad b)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\arcsin x}\right).$$

3. Знайти найбільше та найменше значення функції

$$y=\frac{2x+1}{(x+1)^2}\quad \text{на відрізку } [-2;2].$$

4. Поверхня прямокутного паралелепіпеда з квадратною основою дорівнює $S = 600$ см^2. Які розміри його ребер, коли його об'єм V найбільший?

5. Дослідити функцію та побудувати її графік: $y = \dfrac{2x^4}{(1-x)^3}$.

ВАРІАНТ 5

1. Знайти похідні функцій:

$$a)\, y = \frac{2^{x^3-1}}{e^{3\sin x}} + 4; \qquad b)\, y = \left(5x^3 + 3\sqrt[4]{x} - 4\right)^5;$$

$$c)\, y = \arcsin\sqrt{1-4x^2}; \qquad d)\, x^2 + y^2 = \ln y;$$

$$e)\, y = (ctgx)^{\frac{x-7}{5}}.$$

2. Знайти границі функцій:

$$a)\lim_{x\to 0}\frac{x - \arcsin x}{\sin^3 x}; \qquad b)\lim_{x\to 0} x\cdot ctg\pi x.$$

3. Знайти найбільше та найменше значення функції

$$y = \frac{x-2}{x^2+5} \quad \text{на відрізку } [-3;5].$$

4. З куска дроту 50 см завдовжки зігнути прямокутник, який має найбільшу площу.

5. Дослідити функцію і побудувати її графік: $y = \dfrac{2x^2+5x-3}{x^2}$.

ВАРІАНТ 6

1. Знайти похідні функцій:

$$a)\, y = \frac{4x+5}{\sqrt[3]{x^3-5x-2}}; \qquad b)\, y = \sqrt[7]{2^{3x} - \sec^5 3x};$$

$$c)\, y = \ln ctg\sqrt[3]{x}; \qquad d)\, x\cos y - \sin 2y = 3$$

$$e)\, y = (\arcsin x)^{\sqrt{1-x^2}}.$$

2. Знайти границі функцій:

$$a)\lim_{x\to 0}\frac{tgx + \sec x - 1}{tgx - \sec x + 1}; \qquad b)\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}\right).$$

3. Знайти точки, в яких дотичні до кривої $y = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 20$ паралельні осі абсцис.

4. Бічні сторони і менша основа трапеції дорівнюють по 10 см. Визначити її більшу основу так, щоб площа трапеції була найбільшою.

5. Дослідити функцію та побудувати її графік : $y=\dfrac{x^2+4x+1}{x+4}$.

ВАРІАНТ 7

1. Знайти похідні функцій :

$$a)\, y=2^{x^3+1}\cdot \mathrm{cosec}\,3x; \qquad b)\, y=\frac{1}{5}\ln\frac{x+1}{\sqrt{x^2-3x}};$$

$$c)\, y=\ln\arcsin\frac{5}{\sqrt{x}}; \qquad d)\, \sin(x-y)-4x+2y=0$$

$$e)\, y=\frac{x^2(x+1)^5}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2. Знайти границі функцій :

$$a)\, \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2 x-2tgx}{1+\cos 4x}; \qquad b)\, \lim_{x\to 0}\left(e^x+e^{-x}-2\right)\cdot ctgx$$

3. Знайти найбільше та найменше значення функції $y=x-2\ln x$ на відрізку [1;e].
4. Довести, що з усіх рівнобедрених трикутників з заданим периметром найбільшу площу має рівносторонній трикутник.

5. Дослідити функцію та побудувати її графік : $y=\dfrac{x^3}{3\left(x^2-3\right)}$.

ВАРІАНТ 8

1. Знайти похідні функцій :

$$a)\, y=\frac{tg\,\frac{x}{2}}{arctg\,2x}; \qquad b)\, y=\sqrt[3]{1+x\sqrt{x+3}};$$

$$c)\, y=\arcsin\ln\cos x; \qquad d)\, 2y\cdot\ln x-x\ln y=x+y$$

$$e)\, y=(ctgx)^{\sin^2 x}.$$

2. Знайти границі функцій :

$$a)\, \lim_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{\sin^3 x}; \qquad b)\, \lim_{x\to o}=\left(\frac{1}{xarctgx}-\frac{1}{x^2}\right).$$

3. Знайти найбільше та найменше значення функції $y=\frac{1}{2}x-\sin x$ на відрізку $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$.

4. Відкритий кузов вантажного автомобіля має форму прямокутного паралелепіпеда з площею поверхні 2*S*. Якими повинні бути довжина і ширина кузова, щоб його об'єм був найбільшим, а відношення довжини до ширини дорівнювало $\frac{5}{2}$?

5. Дослідити функцію та побудувати її графік: $y=\frac{2x^2+4x-4}{x+3}$.

ВАРІАНТ 9

1. Знайти похідні функцій:

$$a)\,y=2^{\sqrt{3x}}\cdot ctg^5\frac{x}{3};\qquad b)\,y=\left(2^{\arcsin x}+\arccos x\right)^2;$$

$$c)\,y=\ln tg\frac{e^{3\cos x}}{4};\qquad d)\,(x+y)^2+(x-2y)^3=0$$

$$e)\,y=(x+\sin x)^{x^2}.$$

2. Знайти границі функцій:

$$a)\,\lim_{x\to+0}\frac{\ln\sin x}{ctgx};\qquad b)\,\lim_{x\to1}(1-x)^{\cos\frac{\pi x}{2}}.$$

3. До кривої $y=2x^2-8x+5$ проведена дотична, паралельна осі Ox. Знайти координати точки дотику.

4. В прямокутний трикутник з катетами, що дорівнюють 2 см і 4 см, впишіть прямокутник найбільшої площі зі сторонами, паралельними катетам трикутника.

5. Дослідити функцію та побудувати її графік: $y=\frac{3-x^2}{x+2}$

ВАРІАНТ 10

1. Знайти похідні функцій :

$$a) y = \sqrt[7]{\sin^3 2x} \cdot 2^{-\frac{3}{7}x}; \qquad b) y = \ln\left(\frac{x - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}}\right);$$

$$c) y = e^{\arccos\sqrt{1-2x}}; \qquad d) y = 2x + arcctg\,\frac{x}{y};$$

$$e) y = (x+5)^{\arcsin\frac{x}{5}}.$$

2. Знайти границі функцій :

$$a) \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln\sin x}{(\pi - 2x)^2}; \qquad b) \lim_{x\to 0}(1 + \sin x)^{ctgx}$$

3. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = x\ln\frac{x}{5}$ на відрізку [1;5].

4. В конус радіуса 4 дм і висотою 6 дм вписано циліндр найбільшого об'єму. Знайти цей об'єм.

5. Дослідити функцію та побудувати її графік : $y = \dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$.

ВАРІАНТ 11

1. Знайти похідні функцій :

$$a) y = 2^{\sin 3x} \cdot \arcsin 2x; \qquad b) y = \left(x^5 + \sqrt[7]{x} + 2\right)^5;$$

$$c) y = arctg^3 \cos 5x; \qquad d) \frac{x}{y} + \ln y - 2\ln x = 10;$$

$$e) y = \left(x^2 + 4\right)^{\sqrt{x}}.$$

2. Знайти границі функцій :

$$a) \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{ctgx - 1}{\sin 4x}; \qquad b) \lim_{x\to\infty}\left(x + 2^x\right)^{\frac{1}{x}}.$$

3. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = x - 2\cos x$ на відрізку $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

4. Задане додатне число a розкласти на два доданки так, щоб їхній добуток був найбільшим.

5. Дослідити функцію та побудувати графік : $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$.

ВАРІАНТ 12

1. Знайти похідні функцій :

$$a) y = 3^{-5x} \cdot \sqrt[3]{\sin 5x}; \qquad b) y = \ln \sqrt[3]{\left(\frac{2 + x^3}{2 - x^3}\right)^5};$$

$$c) y = e^{arctg^2 \sqrt{x}} + \lg e; \qquad d) e^{3y} - e^{-2x} + 5 \cdot \frac{y}{x} = 3$$

$$e) y = \left(\cos\frac{x}{3}\right)^{ctgx}.$$

2. Знайти границі функцій :

$$a) \lim_{x \to 1+0} \frac{\ln(x-1) - x}{tg\frac{\pi}{2x}}; \qquad b) \lim_{x \to +0} [\ln(x+e)]^{\frac{1}{x}}.$$

3. Скласти рівняння нормалі до графіка функції $y = -\sqrt{x} + 2$ в точці перетину з бісектрисою першого координатного кута.

4. Знайти на параболі $y = x^2$ точку, найближчу до точки $A\left(2; \frac{1}{2}\right)$.

5. Дослідити функцію та побудувати її графік : $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$.

ВАРІАНТ 13

1. Знайти похідні функцій :

$$a) y = e^{\sqrt[7]{x^3}} \cdot 7^{-3x}; \qquad b) y = \left(3^{tg\,2x} - ctg 3x\right)^4;$$

$$c) y = \arccos e^{x^2}; \qquad d) y \ln x - x \ln y = \ln(xy);$$

$$e) y = (arctg\,2x)^{\sin 3x}.$$

2. Знайти границі функцій :

$$a) \lim_{x \to 0} \frac{e^x + \sin x - 1}{\ln(1+x)}; \qquad b) \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\pi}{2} - arctgx\right)^{\frac{1}{x}}.$$

3. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = 2xe^{x+1}$ на відрізку [-3;0].

4. У прямокутний трикутник з гіпотенузою 8 см і кутом $60°$ вписано прямокутник, основа якого розміщена на гіпотенузі. Які повинні бути розміри прямокутника, щоб його площа була максимальною?

5. Дослідити функцію та побудувати її графік: $y = \dfrac{x}{x^2 - 4}$.

ВАРІАНТ 14

1. Знайти похідні функцій:

$$a)\, y = e^{\arcsin 5x} \cdot ctg3x; \qquad b)\, y = \left(x^3 - \frac{5}{x^2} + 4 \right)^2;$$

$$c)\, y = \ln\cos 7x + \ln^3 2x \qquad d)\, y - x^2 = arctgy;$$

$$e)\, y = (\sin 3x)^{\sqrt{x}}.$$

2. Знайти границі функцій:

$$a)\lim_{x\to 1} \frac{\ln\cos(x-1)}{1 - \sin\dfrac{\pi x}{2}}; \qquad b)\lim_{x\to 0} (ctgx)^x.$$

3. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ в точці з абсцисою 2.

4. Сума катетів прямокутного трикутника стала і дорівнює $a>0$. Для якого трикутника гіпотенуза має найменшу довжину?

5. Дослідити функцію та побудувати її графік: $y = \dfrac{(x-5)(x+3)}{(x+2)^2}$.

ВАРІАНТ 15

1. Знайти похідні функцій:

$$a)\, y = \frac{5x}{\sqrt{x^3 + 4x^2 - 2}} + 12^{\frac{\pi}{2}}; \qquad b)\, y = \left(3^{\sin 2x} - \cos 2x\right)^3;$$

$$c)\, y = \arcsin^2 \ln 2x; \qquad d)\, xtgy - x^2 + 2y^2 = 5;$$

$$e)\, y = (x+1)^3 \cdot \sqrt[5]{(x-2)^3 \cdot (3-x)^{-2}}.$$

2. Знайти границі функцій:

$$a)\lim_{x\to+0}\frac{3+\ln x}{2-3\ln\sin x}; \qquad b)\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)tgx.$$

3. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=x^3+2x^2-4x-3$ в точці (-1;2).
4. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 48 см. Знайти значення довжини його основи , при якому площа трикутника найбільша.

5. Дослідити функцію та побудувати її графік : $y=\dfrac{x^2-1}{x^4}$.

ВАРІАНТ 16.

1. Знайти похідні функцій :

$$a)y=\frac{3x-2}{\sqrt{x^2+3x+2}}; \qquad b)y=\sqrt{e^{2x}+\operatorname{cosec}5x};$$

$$c)y=\ln arcctg\frac{1}{x}; \qquad d)3^{x+y}-xy\ln 5=12;$$

$$e)y=\left(1+x^2\right)^{\sin 2x}.$$

2. Знайти границі функцій :

$$a)\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}; \qquad b)\lim_{x\to+\infty}\left(\pi-2arctg\sqrt{x}\right)\sqrt{x}.$$

3. На кривій $y=x^3$ задано дві точки *A*(-1;-1) і *B*(2;8). В якій точці кривої дотична до неї буде паралельна проведеній січній *AB*?
4. При якому значенні довжини висоти прямокутна трапеція з гострим кутом 45° і периметром 4 см має найбільшу площу ?

5. Дослідити функцію та побудувати її графік : $y=\dfrac{-x^2+3x-1}{x}$.

ВАРІАНТ 17

1. Знайти похідні функцій :

$$a)y=e^{tgx}\cdot\ln 2x; \qquad b)y=\sqrt[7]{\left(1+\sin^3 3x\right)^2};$$

$$c)y=\cos e^{2\sqrt{3x}}; \qquad d)arctg\left(\frac{y}{x}\right)=\ln\left(x^2+y^2\right);$$

$$e)y=\left(3-e^{\sqrt{x}}\right)^{tg^2x}.$$

2. Знайти границі функцій :

$$a)\lim_{x\to+0}\frac{\ln(1-\cos x)}{\ln tgx}; \qquad b)\lim_{x\to0}(ctgx)^{\sin x}.$$

3. Знайти найбільше та найменше значення функції $y=2\sqrt[3]{x^2}-x$ на відрізку [-1;3].

4. Серед усіх прямокутників з даною площею S знайти прямокутник з найменшим периметром.

5. Дослідити функцію та побудувати її графік : $y=\dfrac{x^3}{x-1}$

ВАРІАНТ 18

1. Знайти похідні функцій :

$$a)y=e^{\frac{x}{\sqrt{5}}}\cdot arctg^3 3x; \qquad b)y=\sqrt[8]{\sec 5x-e^{5x}};$$

$$c)y=\log_3\left(2x^2+\sqrt{x^4+1}\right)+\sqrt{3}; \quad d)\cos(x+y)=2+x^3\cdot e^y;$$

$$e)y=\left(\arccos\sqrt{x}\right)^{tgx}.$$

2. Знайти границі функцій :

$$a)\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{\arcsin 3x}; \qquad b)\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\pi-2x)^{\cos x}.$$

3. В яких точках кривої $y=2+x-x^3$ дотична до неї паралельна прямій $11x+y+1=0$.

4. Серед усіх прямокутників з даним периметром $2p$ знайти той, у якого діагональ найменша.

5. Дослідити функцію та побудувати її графік : $y=\dfrac{1-x}{(x-2)^3}.$

ВАРІАНТ 19

1. Знайти похідні функцій :

$$a)y=\frac{e^{\arccos 2x}}{\sqrt{1-4x^2}}; \qquad b)y=\left(3^{tg3x}-\sec 3x\right)^2;$$

$$c)y=\ln arctg\sqrt{x-2}; \qquad d)x^2y-y^2x+(x-y)^3=0;$$

$$e)y=\frac{x^2\left(x^2+1\right)^3}{\sqrt{x(1-x)}}.$$

2. Знайти границі функцій :

$$a)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\frac{\ln\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{tgx};\qquad b)\lim_{x\to 0}x^2\cdot e^{\frac{1}{x^2}}.$$

3. Знайти найбільше та найменше значення функції $y=x+2\sin x$ на відрізку $[0;\pi]$.

4. Знайти на гіперболі $\frac{x^2}{2}-y^2=1$ точку, найближчу до точки (3;0).

4. Дослідити функцію та побудувати її графік : $y=\frac{20x^2}{(x-1)^3}$.

ВАРІАНТ 20

1. Знайти похідні функцій :

$$a)y=\sin^2 3x\cdot\cos^3 2x;\qquad b)y=\ln\sqrt[3]{\frac{10}{e^{3x}-e^{-3x}}};$$

$$c)y=\arccos\left(\sin\frac{x}{2}\right);\qquad d)e^{xy}-x^2+y^2=0$$

$$c)y=\left(x^3+5\right)^{\sin x}.$$

2. Знайти границі функцій :

$$a)\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{5}}{\sqrt{x}-\sqrt{5}};\qquad b)\lim_{x\to+0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}.$$

3. Знайти найбільшу та найменше значення функції $y=x\ln x-x$ на відрізку $\left[e^{-1};e\right]$.

4. Гіпотенуза прямокутного трикутника $c=9\sqrt{2}$. Якими повинні бути катети a і b, щоб периметр трикутника був найбільшим ?

5. Дослідити функцію та побудувати її графік : $y=\frac{1-x^3}{x^2}$.

ВАРІАНТ 21

1. Знайти похідні функцій :

$$a)\, y = tg^2 5x \cdot \cos^3(3-x); \qquad b)\, y = \sqrt[3]{x^2 - \frac{1}{x^5} + 5\sqrt{x}};$$

$$c)\, y = 2^{\frac{1-x}{1+x}} + tg8; \qquad d)\, arctgx - \ln\sqrt{3y+2} = 5;$$

$$e)\, y = (\arccos x)^{\ln^2 x}.$$

2. Знайти границі функцій :

$$a)\, \lim_{x\to 3+0} \frac{\cos x \cdot \ln(x-3)}{\ln\left(e^x - e^3\right)}; \qquad b)\, \lim_{x\to 0} (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}.$$

3. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = e^{-x}\left(x^2 + x - 5\right)$ на відрізку [-4;4].

4. Сума двох чисел дорівнює *a*. Якими мають бути ці числа, щоб сума їхніх квадратів була найменшою ?

5. Дослідити функцію та побудувати її графік : $y = \dfrac{(x+1)^2}{x-2}$.

ВАРІАНТ 22

1. Знайти похідні функцій :

$$a)\, y = \frac{x^4 + tg2x}{\sqrt{8x^2+9}}; \qquad b)\, y = \ln\sqrt[3]{\frac{0{,}1 - 5x^3}{x^2 + 8x + 15}};$$

$$c)\, y = \sin^2 \ln 5x + ctg5; \qquad d)\, x - y = \arccos x - \arccos y$$

$$e)\, y = (\cos 5x)^{x^3+4}.$$

2. Знайти границі функцій :

$$a)\, \lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos x}{\ln\cos 3x}; \qquad b)\, \lim_{\alpha\to 0}\left[\frac{2}{\sec^2\alpha} - \frac{1}{1-\cos\alpha}\right].$$

3. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = \dfrac{4-x^2}{4+x^2}$ на відрізку [-2;3].

4. Основа трикутника дорівнює 12 см , а сума бічних сторін – 20см. Знайти таке значення висоти трикутника , щоб його площа була найбільшою.

5. Дослідити функцію та побудувати її графік : $y = x - 3 + \dfrac{2}{x}$.

ВАРІАНТ 23

1. Знайти похідні функцій :

$$a)\, y=\frac{5x+7\ln x^2}{\sqrt{1+9x^2}}; \qquad b)\, y=\sin^2\left(x^2-3x+\frac{x}{3}\right);$$

$$c)\, y=arcctg\left(tg\sqrt{x}\right)+2\ln\frac{\pi}{2}; \qquad d)\, x^3+y^3+3xy=5;$$

$$e)\, y=(\cos 2x)^{tg\,2x}.$$

2. Знайти границі функцій :

$$a)\lim_{x\to 1}\frac{tg\frac{\pi x}{2}}{\ln(1-x)}; \qquad b)\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}}(\sec\alpha-tg\alpha).$$

3. Знайти найбільше та найменше значення функції $y=x^5-5x^4+5x^3+1$ на відрізку [-1;2].

4. Довести , що якщо добуток двох додатних чисел є стале число , то їхня сума буде найменшою , коли ці числа рівні між собою.

5. Дослідити функцію та побудувати її графік : $y=\dfrac{x+\sqrt{2}}{x^2-1}$.

ВАРІАНТ 24

1. Знайти похідні функцій :

$$a)\, y=e^{ctg\,2x}\cdot\sqrt[3]{\sin 5x}; \qquad b)\, y=\sqrt[3]{x+x\sqrt[5]{x}};$$

$$c)\, y=\ln\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}+\sin 3; \qquad d)\, x\cos y=\sin x+\sin 2y;$$

$$e)\, y=x^{\arcsin x}.$$

2. Знайти границі функцій :

$$a)\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x^2+7x-5}{x^3+2x^2-9x+6}; \qquad b)\lim_{x\to+0}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^x.$$

3. Знайти найбільше та найменше значення функції $y=\dfrac{1}{2}x+\cos x$ на відрізку $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

4. Якою повинна бути основа рівнобедреного трикутника з заданою площею *S*, щоб його периметр був найбільшим ?

5. Дослідити функцію та побудувати її графік : $y = \dfrac{x^3}{2(x-1)^2}$.

ВАРІАНТ 25

1. Знайти похідні функцій :

$$a) y = \frac{\arcsin 2x}{arctg\,\frac{2}{x}}; \qquad b) y = \left(x^3 + 5\sqrt[5]{x^3} + 2\right)^3;$$

$$c) y = \ln\sin\left(3^{x^2}\right) + 7^{\frac{\pi}{3}}; \qquad d) e^y \cdot \sin x = e^{-x} \cdot \cos y;$$

$$e) y = \left(x^2 + arctg\,2x\right)^{\sin 3x}.$$

2. Знайти границі функцій :

$$a) \lim_{x \to 0} \frac{\ln\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)}{\ln(1+x)}; \qquad b) \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} (1 - tgx) \cdot \sec 2x.$$

3. Скласти рівняння такої дотичної до параболи $y = x^2 + 5x + 3$, яка паралельна до прямої $5x - y + 12 = 0$.

4. Ділянка землі має форму паралелограма з гострим кутом $\alpha = 60°$. При яких розмірах її сторін дротом довжиною l=24 м можна огородити найбільшу площу ?

5. Дослідити функцію та побудувати її графік : $y = \dfrac{x^4}{(1+x)^3}$.

ВАРІАНТ 26

1. Знайти похідні функцій :

$$a) y = \sin(\ln 5x) \cdot \cos(\ln\frac{x}{5}); \qquad b) y = \frac{3}{\sqrt{2}} arctg^5 \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$c) y = e^{\arcsin\frac{1}{x}} + 5^{\ln 2}; \qquad d) xy^2 = \cos\frac{x}{y};$$

$$e) y = (ctg\,4x)^{\sin 4x}.$$

2. Знайти границі функцій :

$$a)\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{tgx-x}; \qquad b)\lim_{x\to+\infty}(\ln 2x)^{\frac{1}{\ln x}}.$$

3. Знайти найбільше значення функції $y=\frac{x}{8}+\frac{2}{x}$ на відрізку [1;6].

4. Периметр осьового перерізу циліндра дорівнює 12 см. Знайти найбільший об'єм такого циліндра.

5. Дослідити функцію та побудувати її графік : $y=\frac{x^2-x+1}{x-1}$.

ВАРІАНТ 27

1. Знайти похідні функцій :

$$a)y=\frac{\sqrt[3]{3-5x^2}}{e^x-ctgx}; \qquad b)y=\sqrt{x+\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x^3}};$$

$$c)y=\sin\left(\cos^2(tgx)\right)+3; \qquad d)=\ln\left(x^2+y^2\right)+arctg\frac{x}{y}=x\cdot y$$

$$e)y=(tg3x)^{\frac{x}{2}}.$$

2. Знайти границі функцій :

$$a)\lim_{x\to 3}\frac{\ln\left(x^2-8\right)}{2x^2-5x-3}; \qquad b)\lim_{x\to 1}\left[\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right].$$

3. Який кут утворює з віссю Ox отична до параболи $y=x^2-3x+5$, що проведена в точці $P(2;3)$? Написати рівняння цієї дотичної.
4.Знайти найбільшу площу прямокутника, вписаного в круг радіуса R.

5. Дослідити функцію та побудувати її графік : $y=\frac{1-x^2}{4-x^2}$.

ВАРІАНТ 28

1. Знайти похідні функцій :

$$a)y=e^{-3x^2}\cdot\cos^3(5x+3); \qquad b)y=\ln\frac{3+\sqrt{9-x^2}}{x^3};$$

$$c)y=arctg\frac{2\sqrt{x}}{1-x}+\cos 8\pi; \qquad d)(x+y)^2=(x-2y)^4;$$

$$e)y=(arctg3x)^{\sin x^3}.$$

2. Знайти границі функцій :

$$a)\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{1+2\ln\sin x}; \qquad b)\lim_{x\to0}\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}}.$$

3.Знайти найбільше та найменше значення функції $y=x^2\ln x$ на відрізку $\left[e^{-2};1\right]$.

4. Знайти найбільший об'єм конуса, твірна якого дорівнює l.

5. Дослідити функцію та побудувати її графік : $y=x+\dfrac{x}{3x-1}$.

ВАРІАНТ 29

1. Знайти похідні функцій :

$$a)y=\frac{\sin 5x}{\cos 5^x}; \qquad b)y=\sqrt{x^2-2\sqrt[5]{x}+4};$$

$$c)y=\arcsin\log_9\frac{1}{x}-7tg\frac{\pi}{3}; \qquad d)tgx-\sqrt{5y+4}+y=0$$

$$e)y=\sqrt[3]{\frac{x\left(1+x^2\right)}{\sin^5 x}}.$$

2. Знайти границі функцій :

$$a)\lim_{x\to0}\frac{e^x\sin x-x}{3x^2+x^5}; \qquad b)\lim_{x\to0}\sin x\cdot\ln ctgx.$$

3. Знайти найбільше та найменше значення функції $y=x-2\sqrt{x}$ на відрізку [0;5].

4. Яке додатне число, будучи складеним з оберненим йому числом, дає найменшу суму ?

5. Дослідити функцію та побудувати її графік : $y=\dfrac{(x-3)^2}{2(x-1)}$.

ВАРІАНТ 30

1. Знайти похідні функцій :

$$a)\, y = 5^{tg\,2x} \cdot \arcsin\left(x^2\right); \qquad b)\, y = \left(3x^2 - \frac{4}{\sqrt{x}} + 5\right)^3;$$

$$c)\, y = \ln\left(arctg\,\frac{x}{3} + \cos^2 6x\right) + \ln 5; \qquad d)\, e^y + 5x^2 e^{-y} = 4x;$$

$$e)\, y = \left(\cos\sqrt[3]{x}\right)^{-x}.$$

2. Знайти границі функцій :

$$a)\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x\right)-x}{tg^2 x}; \qquad b)\lim_{x\to +0}\left(\arcsin x\right)^{tgx}.$$

3. Скласти рівняння такої нормалі до параболи $y = x^2 - 3x + 12$, яка перпендикулярна до прямої $x - y - 16 = 0$.

4. Який із прямокутних трикутників даного периметра $2p$ має найбільшу площу ?

5. Дослідити функцію та побудувати її графік : $y = \dfrac{x^2 + 16}{4x}$.

ВАРІАНТ 1*

1.Знайти похідні функцій:

$$a)\,y=\frac{\mathrm{tg}\,\frac{x}{3}}{\mathrm{arctg}\,4x}; \qquad b)\,y=\sqrt[4]{2+x\sqrt{x+1}};$$

$$c)\,y=\arccos\ln\sin x; \qquad d)\,3y\ln x-x\ln y=2x-3y;$$

$$e)\,y=(\mathrm{ctg}\,x)^{\sin^2 x}.$$

2. Знайти границі функцій:

$$a)\,\lim_{x\to 1}\frac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\frac{\pi x}{2}}; \qquad b)\,\lim_{x\to 0}(\mathrm{ctg}\,x)^{x}.$$

3. Знайти найбільше та найменше значення функції $y=\frac{1}{2}x-\sin x$ на відрізку $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$.

4. Сума катетів прямокутного трикутника стала і дорівнює $a>0$.Для якого трикутника гіпотенуза має найменшу довжину?

5. Дослідити функцію та побудувати її графік: $y=\frac{2x^2+4x-4}{x+3}$.

ВАРІАНТ 2*

1. Знайти похідні функцій:

$$a)\,y=e^{\arcsin 3x}\cdot ctg\,2x; \qquad b)\,y=\left(x^4-\frac{3}{x^3}+2\right)^3;$$

$$c)\,y=\ln\cos 5x+\ln^5 4x; \qquad d)\,y-x^3=\mathrm{arctg}\,y;$$

$$e)\,y=(\sin 2x)^{\sqrt{x}}.$$

2. Знайти границі функцій:

$$a)\,\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}\,x-\sin x}{\sin^3 x}; \qquad b)\,\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\,\mathrm{arctg}\,x}-\frac{1}{x^2}\right).$$

3. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої $y=\frac{1}{x^2+4}$ в точці з абсцисою 2.

4. Відкритий кузов вантажного автомобіля має форму прямокутного паралелепіпеда з площею поверхні 2S. Якими повинні бути довжина і ширина

кузова, щоб його об’єм був найбільшим, а відношення довжини до ширини дорівнювало $\frac{5}{2}$?

5. Дослідити функцію та побудувати її графік: $y = \frac{(x-3)(x+2)}{(x+1)^2}$.

ВАРІАНТ 3*

1. Знайти похідні функцій:

$$a)\, y = \frac{3x+4}{\sqrt[4]{x^4-4x-2}}; \qquad b)\, y = \sqrt[5]{3^{2x} - \sec^4 3x};$$

$$c)\, y = \ln \operatorname{tg} \sqrt{x}; \qquad d)\, 2x\cos y - \sin 3y = 1;$$

$$e)\, y = (\arcsin x)^{\sqrt{1-x^2}}.$$

2. Знайти границі функцій:

$$a)\, \lim_{x\to+0} \frac{\ln x}{\operatorname{cosec} x}; \qquad b)\, \lim_{x\to 0}\left(1+\sin^2 x\right)^{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}}.$$

3. Знайти точки, в яких дотичні до кривої $y = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 2$ паралельні осі абсцис.

4. Бічні сторони і менша основа трапеції дорівнюють по 10 см. Визначити її більшу основу так, щоб площа трапеції була найбільшою.

5. Дослідити функцію та побудувати її графік: $y = \frac{4x}{x^2-4}$.

ВАРІАНТ 4*

1. Знайти похідні функцій:

$$a)\, y = \arccos\frac{x}{3} \operatorname{arcctg}\frac{3}{x}; \qquad b)\, y = \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}};$$

$$c)\, y = \ln \sin \sqrt[5]{e^{2x}}; \qquad d)\, 2^x + 2^y = 2^{x+y};$$

$$e)\, y = (\operatorname{tg} 3x)^{\cos 2x}.$$

2. Знайти границі функцій:

$$a)\, \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x + \sec x - 1}{\operatorname{tg} x - \sec x + 1}; \qquad b)\, \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}\right).$$

3. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = \dfrac{x+1}{x^2+3}$ на відрізку $[0;3]$.

4. Які розміри повинна мати прямокутна ділянка землі площею $36 м^2$, щоб огорожа мала найменший периметр?

5. Дослідити функцію та побудувати її графік: $y = \dfrac{x^2+4x+2}{x+4}$.

ВАРІАНТ 5*

1. Знайти похідні функцій:

$$a) y = 3^{x^4+1} \cdot \operatorname{cosec} 2x; \qquad b) y = \frac{1}{3} \ln \frac{x+3}{\sqrt{x^2-2x}};$$

$$c) y = \ln \arcsin \frac{2}{\sqrt{x}}; \qquad d) \cos(y-x) - 4x + 3y = 0;$$

$$e) y = \frac{x^3 (x+3)^5}{\sqrt[4]{1+x^2}}.$$

2. Знайти границі функцій:

$$a) \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x - 2 \operatorname{tg} x}{1 + \cos 4x}; \qquad b) \lim_{x \to 0} \left(e^x + e^{-x} - 2\right) \operatorname{ctg} x.$$

3. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = x - 2\ln x$ на відрізку $\left[\dfrac{1}{e}; e^2\right]$.

4. Довести, що з усіх рівнобедрених трикутників з заданим периметром найбільшу площу має рівносторонній трикутник.

5. Дослідити функцію та побудувати її графік: $y = \dfrac{x^3}{3(x^2-3)}$.

ВАРІАНТ 6*

1. Знайти похідні функцій:

$$a)\, y=\frac{3^{x^2-3}}{e^{4\sin x}}+\pi; \qquad b)\, y=\left(4x^5+3\sqrt[6]{x}-6\right)^4;$$

$$c)\, y=\arcsin\sqrt{1-9x^2}; \qquad d)\, x^3+y^3=\ln y;$$

$$e)\, y=(\operatorname{ctg} x)^{\frac{x-2}{3}}.$$

2. Знайти границі функцій:

$$a)\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\sin x-1}{\ln(1+x)}; \qquad b)\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x\right)^{\frac{1}{x}}.$$

3. Знайти найбільше та найменше значення функції $y=\dfrac{x-3}{x^2+4}$ на відрізку $[-5;7]$.

4. У прямокутник з гіпотенузою 8 см і кутом 60^0 вписано прямокутник, основа якого розміщена на гіпотенузі. Які повинні бути розміри прямокутника, щоб його площа була максимальною?

5. Дослідити функцію і побудувати її графік: $\dfrac{3x^2+6x-2}{x^2}$.

ВАРІАНТ 7*

1. Знайти похідні функцій:

$$a)\, y=5^{-3x}\cdot\sqrt[5]{\cos 4x}; \qquad b)\, y=\ln\sqrt{\left(\frac{4+x^2}{4-x^2}\right)^5};$$

$$c)\, y=3^{\operatorname{arctg}^3\sqrt{x}}+\ln 10; \qquad d)\, e^{3y}+2e^{-5x}-4\frac{x}{y}=3;$$

$$e)\, y=\left(\cos\frac{x}{5}\right)^{\operatorname{ctg} 5x}.$$

2. Знайти границі функцій:

$$a)\lim_{x\to 0}\frac{x-\arcsin x}{\sin^3 x}; \qquad b)\lim_{x\to 0} x\operatorname{ctg}\pi x$$

3. Скласти рівняння нормалі до графіка функції $y=-\sqrt{x}+2$ в точці її перетину з бісектрисою першого координатного кута.

4. З куска дроту 50 см завдовжки зігнути прямокутник, який має найбільшу площу.

5. Дослідити функцію і побудувати її графік: $y=\frac{x^2-2x+2}{x-2}$.

ВАРІАНТ 8*

1. Знайти похідні функцій:

$a)\, y=\frac{3^{x^2-2}+3}{e^{\sin 3x}}+2^{\pi};$ $\qquad b)\, y=\left(3x^4-2\sqrt[5]{x}+\frac{4}{x}\right)^5;$

$c)\, y=\arcsin\sqrt{1-4x^2};$ $\qquad d)\, x^3y+xy^2=\ln x;$

$$e)\, y=(\mathrm{ctg}\,3x)^{\frac{x-3}{5}}.$$

2. Знайти границі функцій:

$a)\, \lim\limits_{x\to 1+0}\frac{\ln(x-1)-x}{\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{2x}};$ $\qquad b)\, \lim\limits_{x\to +0}[\ln(x+e)]^{\frac{1}{x}}.$

3. Знайти найбільше та найменше значення функції

$$y=\frac{x-2}{x^2+4}$$

на відрізку $[-5;4]$.

4. Знайти на параболі $y=x^2$ точку, найближчу до точки $A\left(2;\frac{1}{2}\right)$.

5.Дослідити функцію та побудувати її графік: $y=\frac{3x^2-2x+4}{x^2}$.

ВАРІАНТ 9*

1. Знайти похідні функцій:

$a)\, y=3^{\cos 2x}\cdot\arcsin 3x;$ $\qquad b)\, y=\left(x^3-\sqrt[4]{x}+2\right)^7;$

$c)\, y=\mathrm{arctg}^4\cos 3x;$ $\qquad d)\, \frac{y}{x}-\frac{x}{y}=\ln y;$

$$e)\, y=\left(x^3+3\right)^{\sqrt{x}}.$$

2. Знайти границі функцій:

$a)\, \lim\limits_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a};$ $\qquad b)\, \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\arcsin x}\right).$

3. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = x - 2\cos x$ на відрізку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

4. Поверхня прямокутного паралелепіпеда з квадратною основою дорівнює $S = 600 см^2$. Які розміри його ребер, коли його об'єм V найбільший?

5. Дослідити функцію та побудувати її графік: $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$.

ВАРІАНТ 10*

1. Знайти похідні функцій:

$$a) y = \frac{\sqrt{2+3x^4}}{1+2x^3}; \qquad b) y = \operatorname{arctg}\left(x^4\right) + 4^{x\sin^2 x};$$

$$c) y = \ln \arccos\sqrt{2x}; \qquad d) 2x\sin 3x + 3y\cos 4x = \ln y;$$

$$e) y = (\operatorname{ctg} x)^{x^3}.$$

2. Знайти границі функцій:

$$a) \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{ctg} x - 1}{\sin 4x}; \qquad b) \lim_{x \to \infty} \left(x + 2^x\right)^{\frac{1}{x}}.$$

3. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = \frac{2x-3}{(x+2)^2}$ на відрізку $[-4;4]$.

4 Задане додатне число a розкласти на два доданки так, щоб їхній добуток був найбільшим.

5. Дослідити функцію і побудувати її графік: $y = \frac{2x^4}{(1-x)^3}$.

ВАРІАНТ 11*

1. Знайти похідні функцій:

$$a) y = \sin(\ln 5x) \cdot \ln\left(\cos\frac{x}{5}\right); \qquad b) y = \frac{5}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}^3 \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$c) y = e^{\arcsin\sqrt{x}} + 2^e; \qquad d) x^2 + xy^3 = \cos\frac{x}{y};$$

$$e) y = (\operatorname{ctg} 2x)^{\operatorname{arctg} 4x}.$$

2. Знайти границі функцій:

$$a)\lim_{x\to3}\frac{\ln\left(x^2-8\right)}{2x^2-5x-3};\qquad b)\lim_{x\to1}\left[\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right].$$

3. Знайти найбільше значення функції $y=\dfrac{x}{8}+\dfrac{2}{x}$ на відрізку $[1;6]$.

4. Знайти найбільшу площу прямокутника, вписаного в круг радіуса R.

5. Дослідити функцію та побудувати її графік: $y=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$.

ВАРІАНТ 12*

1. Знайти похідні функцій:

$$a)y=\frac{\sqrt[3]{2-4x^3}}{e^x-\operatorname{tg}x};\qquad b)y=\sqrt{x+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{5x}};$$

$$c)y=\operatorname{tg}\left(\sin^2(\cos x)\right);\qquad d)yx-\ln\left(x^2+y^2\right)=\operatorname{arctg}\frac{y}{x};$$

$$e)y=(\arcsin x)^{\frac{x}{3}}.$$

2. Знайти границі функцій:

$$a)\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{\operatorname{tg}x-x};\qquad b)\lim_{x\to+\infty}(\ln 2x)^{\frac{1}{\ln x}}.$$

3. Який кут утворює з віссю Ox дотична до параболи $y=x^2-3x+5$, що проведена в точці $P(2;3)$? Написати рівняння цієї дотичної.

4. Периметр осьового перерізу циліндра дорівнює 12 см. Знайти найбільший об’єм такого циліндра.

5. Дослідити функцію та побудувати її графік: $y=\dfrac{1-x^2}{4-x^2}$.

ВАРІАНТ 13*

1. Знайти похідні функцій:

$$a)y=\sin(\ln 5x)\cdot\cos\left(\ln\frac{x}{5}\right);\qquad b)y=\frac{3\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}^5\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x}};$$

$$c)y=e^{\arcsin\frac{1}{\sqrt{x}}}+3^{\ln 5};\qquad d)2xy^3=\cos\frac{x}{y};$$

$$e)y=\left(\sin 3x^2\right)^{\operatorname{ctg}3x}.$$

2. Знайти границі функцій:

$$a)\lim_{x\to 3}\frac{\ln\left(x^2-8\right)}{2x^2-5x-3}; \qquad b)\lim_{x\to 1}\left[\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right].$$

3. Знайти найбільше значення функції $y=\frac{x}{8}+\frac{2}{x}$ на відрізку $[1;7]$.

4. Знайти найбільшу площу прямокутника, вписаного в круг радіуса R.

5. Дослідити функцію та побудувати її графік: $y=\frac{x^2-x+1}{x-1}$.

ВАРІАНТ 14*

1. Знайти похідні функцій:

$$a)y=\frac{\sqrt[3]{5-3x^4}}{3^x-\operatorname{ctg}x}; \qquad b)y=\sqrt{3x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}};$$

$$c)y=\sin\left(\cos^2\operatorname{tg}x\right)+4; \qquad d)\ln\left(x^3+y^3\right)+\operatorname{arctg}\frac{x}{y}=xy;$$

$$e)y=\left(\operatorname{tg}5x\right)^{\sin\frac{x}{2}}.$$

2. Знайти границі функцій:

$$a)\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{\operatorname{tg}x-x}; \qquad b)\lim_{x\to+\infty}\left(\ln 2x\right)^{\frac{1}{\ln x}}.$$

3. Який кут утворює з віссю Ox дотична до параболи $y=x^2+3x-4$,що проведена в точці $P(2;6)$?

4. Периметр осьового перерізу циліндра дорівнює 12 см. Знайти найбільший об’єм такого циліндра.

5. Дослідити функцію та побудувати її графік: $y=\frac{1-x^2}{4-x^2}$.

ВАРІАНТ 15*

1. Знайти похідні функцій:

$$a)\, y = e^{-5x^3} \cdot \cos^5(3x-6); \qquad b)\, y = \ln\frac{4+\sqrt{5-x^2}}{x^4};$$

$$c)\, y = \operatorname{arctg}\frac{3\sqrt{x}}{1-x} + \cos 3\pi; \qquad d)\, (x+y)^3 = (x-4y)^2;$$

$$e)\, y = (\arcsin 2x)^{\sin x^2}.$$

2. Знайти границі функцій:

$$a)\, \lim_{x\to 0}\frac{e^x \sin x - x}{3x^2 + x^5}; \qquad b)\, \lim_{x\to 0}\sin x \ln \operatorname{ctg} x.$$

3.Знайти найбільше та найменше значення функції $y = x^2 \ln x$ на відрізку $[e^{-2};2]$.

4.Яке додатне число, будучи складеним з оберненим йому числом, дає найменшу суму?

5.Дослідити функцію та побудувати її графік: $y = x + \dfrac{x}{3x-1}$.

ВАРІАНТ 16*

1. Знайти похідні функцій:

$$a)\, y = \frac{\sin 3x}{\cos 2^x}; \qquad b)\, y = \sqrt[3]{x^3 - 2\sqrt[4]{x} + 3};$$

$$c)\, y = \arcsin \ln\frac{1}{x} + 3\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}; \qquad d)\, \operatorname{tg} x - \sqrt{2y-3} = xy;$$

$$e)\, y = \sqrt[5]{\frac{x(1+x^3)}{\sin^4 x}}.$$

2. Знайти границі функцій:

$$a)\, \lim_{x\to +0}\frac{\ln x}{1+2\ln\sin x}; \qquad b)\, \lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}}.$$

3. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = x - 2\sqrt{x}$ на відрізку $[0;6]$.

4. Знайти найбільший об’єм конуса, твірна якого дорівнює l.

5. Дослідити функцію та побудувати її графік: $y = \dfrac{(x-3)^2}{2(x-1)}$.

ВАРІАНТ 17*

1. Знайти похідні функцій:

$$a)\, y = 2^{tg\,5x} \cdot \arcsin x^3; \qquad b)\, y = \left(5x^2 - \frac{2}{\sqrt{x}} + 3\right)^4;$$

$$c)\, y = \ln arctg\,\frac{x}{3} + \sin\left(\cos^2 5x\right) + ctg\,\frac{\pi}{7}; \qquad d)\, xe^y + ye^x = \ln xy;$$

$$e)\, y = \left(\cos\sqrt[5]{x}\right)^{-5x}.$$

2.Знайти границі функцій:

$$a)\lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}{\ln(1-x)}; \qquad b)\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}}\left(\sec\alpha - \operatorname{tg}\alpha\right).$$

3.Скласти рівняння такої нормалі до параболи $y = x^2 - 3x + 6,$ яка перпендикулярна до прямої $x - y - 4 = 0.$

4. Довести, що якщо добуток двох чисел є стале число, то їхня сума буде найменшою, коли ці числа рівні між собою.

5. Дослідити функцію та побудувати її графік: $y = \dfrac{x^2 + 16}{4x}.$

ВАРІАНТ 18*

1. Знайти похідні функцій:

$$a)\, y = \frac{3x - 5\ln x^3}{\sqrt{4 + 7x^2}}; \qquad b)\, y = \cos^4\left(x^5 - 2x^2 + \frac{x}{3}\right);$$

$$c)\, y = \operatorname{arcctg}\left(2\operatorname{tg}\sqrt[3]{x}\right) + \ln\pi; \qquad d)\, x^5 - 3xy^2 + xy = 2;$$

$$c)\, y = \left(\cos\frac{x}{2}\right)^{\operatorname{tg} 2x}.$$

2. Знайти границі функцій:

$$a)\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x) - x}{\operatorname{tg}^2 x}; \qquad b)\lim_{x\to +0}\left(\arcsin x\right)^{\operatorname{tg} x}.$$

3. Знайти найбільше та найменше значення функції

$y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 3$ на відрізку $[-2;2].$

4.Який з прямокутних трикутників даного периметра $2p$ має найбільшу площу?

5. Дослідити функцію та побудувати її графік: $y=\dfrac{x+\sqrt{2}}{x^2-1}$.

ВАРІАНТ 19*

1. Знайти похідні функцій:

$$a)\, y=3^{ctg 2x}\cdot\sqrt[3]{\cos 4x}; \qquad b)\, y=\sqrt{2x+x\sqrt[3]{x}+1};$$

$$c)\, y=\ln\arccos\frac{1}{x^2}+\pi^3; \qquad d)\, x\cos y-y\sin x=x+y;$$

$$e)\, y=x^{2\arcsin 3x}.$$

2. Знайти границі функцій:

$$a)\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)}{\ln(1+x)}; \qquad b)\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(1-tgx)\sec 2x.$$

3. Знайти найбільше та найменше значення функції $y=\dfrac{1}{2}x+\cos x$ на відрізку $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

4. Ділянка землі має форму паралелограма з гострим кутом $\alpha=60^\circ$. При яких розмірах її сторін дротом довжиною $l=24$ м можна огородити найбільшу площу?

5.Дослідити функцію та побудувати графік: $y=\dfrac{x^3}{2(x-1)^2}$.

ВАРІАНТ 20*

1. Знайти похідні функцій:

$$a)\, y=\frac{\arcsin 2x}{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}; \qquad b)\, y=\left(x^4-3\sqrt[3]{x^2}+5\right)^6;$$

$$c)\, y=\ln\sin\left(e^{x^3}\right)+2\ln 5; \qquad d)\, e^{-y}\sin x=e^x\cos y;$$

$$e)\, y=e^{x^5}\cdot tg^4 x\cdot\arcsin^{-3}x.$$

2. Знайти границі функцій:

$$a)\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x^2+7x-5}{x^3+2x^2-9x+6}; \qquad b)\lim_{x\to +0}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^x.$$

3. Скласти рівняння такої дотичної до параболи $y=x^2+5x+3,$ яка паралельна до прямої $5x-y+4=0.$

4. Якою повинна бути основа рівнобедреного трикутника з заданою площею S, щоб його периметр був найбільшим?

5. Дослідити функцію та побудувати її графік: $y=\dfrac{x^4}{(1+x)^3}.$

ВАРІАНТ 21*

1. Знайти похідні функцій:

$$a) y=\mathrm{ctg}^2(5-x)\cdot\sin^5 3x; \qquad b) y=\sqrt[4]{x^3-\frac{2}{x^7}+3\sqrt{x}};$$

$$c) y=3^{\frac{1-2x}{3x-1}}+\mathrm{tg}\,3; \qquad d)\arcsin 3x-\ln\sqrt[3]{2-3y}=\mathrm{ctg}1;$$

$$e) y=(\mathrm{arctg}\,2x)^{\ln^3 x}.$$

2. Знайти границі функцій:

$$a)\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\ln\cos 5x};. \qquad b)\lim_{\alpha\to 0}\left(\frac{2}{\sec^2\alpha}-\frac{1}{1-\cos\alpha}\right)$$

3. Знайти найменше та найбільше значення функції

$$y=e^{-2x}\cdot\left(x^2-2x+3\right)$$

на відрізку $[-3;3]$.

4. Основа трикутника дорівнює 12см, а сума бічних сторін – 20см. Знайти таке значення висоти трикутника, щоб його площа була найбільшою.

5. Дослідити функцію та побудувати її графік: $y=\dfrac{(x+1)^2}{x-2}$.

ВАРІАНТ 22*

1. Знайти похідні функцій:

$$a)\, y=\frac{x^3+tg3x}{\sqrt{4x^2+6}}; \qquad b)\, y=\ln\sqrt[7]{\frac{3-4x^5}{x^2-3x+6}};$$

$$c)\, y=\cos^3\ln 2x+\sin 3; \qquad d)\, 3x-2y=\arcsin 2x-\operatorname{arctg} y;$$

$$e)\, y=(\sin 3x)^{x^2-3x}.$$

2. Знайти границі функцій:

$$a)\lim_{x\to 3+0}\frac{\cos x\cdot\ln(x-3)}{\ln\left(e^x-e^3\right)}; \qquad b)\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}.$$

3. Знайти найбільше та найменше значення функції

$$y=\frac{2-x^2}{2+x^2}$$

на відрізку $[-3;3]$.

4. Сума двох чисел дорівнює a. Якими мають бути ці числа, щоб сума їхніх квадратів була найменшою?

5. Дослідити функцію та побудувати її графік: $y=x-3+\dfrac{2}{x}$.

ВАРІАНТ 23*

1. Знайти похідні функцій:

$$a)\, y=e^{\frac{x}{3}}\cdot arctg\sqrt[5]{2x}; \qquad b)\, y=\sqrt{\sec 3x-e^{2x}};$$

$$c)\, y=\lg\left(2x^3+\sqrt{x^3+5}\right)+tg2; \qquad d)\cos(2x-5y)=3+x^2y^5.$$

$$e)\, y=\left(\arcsin\sqrt[3]{x}\right)^{tg\,3x}.$$

2. Знайти границі функцій:

$$a)\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\frac{\ln\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{tgx}; \qquad b)\lim_{x\to 0}x^2\cdot e^{\frac{-1}{x^2}}.$$

3. В яких точках кривої $y=x+2-x^3$ дотична до неї паралельна прямій $y+11x+1=0$.

4. Знайти на гіперболі $\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$ точку, найближчу до точки (3;0).

5. Дослідити функцію та побудувати її графік: $y = \frac{1-x}{(x-2)^3}$.

ВАРІАНТ 24*

1. Знайти похідні функцій:

$$a) y = \frac{e^{\arcsin 4x}}{\sqrt{4-x^2}}; \qquad b) y = \left(5^{\operatorname{ctg} 3x} - \sec 2x\right)^3;$$

$$c) y = \ln \arccos\sqrt{3-x}; \qquad d) (y-x)^5 = x^3 y^2 - x^2 y;$$

$$e) y = \frac{x^5\left(3+x^2\right)^7}{\sqrt{x^3(1-x)^5}}.$$

2. Знайти границі функцій:

$$a) \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{\arcsin 3x}; \qquad b) \lim_{x\to \frac{\pi}{2}-0} (\pi - 2x)^{\cos x}.$$

3. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = x + 2\sin x$ на відрізку $[0;\pi]$.

4. Серед усіх прямокутників з даним периметром $2p$ знайти той, у якого діагональ найменша.

5. Дослідити функцію та побудувати її графік: $y = \frac{20x^2}{(x-1)^3}$.

ВАРІАНТ 25*

1. Знайти похідні функцій:

$$a)\, y = \mathrm{tg}^5 2x \cdot \cos^2 3x; \qquad b)\, y = \ln \sqrt[5]{\frac{10}{e^{5x} - e^{-5x}}};$$

$$c)\, y = \arcsin\left(\cos\frac{x}{4}\right); \qquad d)\, e^{x+y} - x^2 + y^2 = e^{xy};$$

$$e)\, y = \left(3 - 4x^4\right)^{\mathrm{tg}\, x}.$$

2. Знайти границі функцій:

$$a)\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)}; \qquad b)\lim_{x\to+\infty}\left(\pi - 2arctg\sqrt{x}\right)\sqrt{x}.$$

3. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = x\ln x - x$ на відрізку $\left[e^{-1}; e\right]$.

4. При якому значенні довжини висоти прямокутна трапеція з гострим кутом $45°$ і периметром 8см має найбільшу площу?

5. Дослідити функцію та побудувати її графік: $y = x^{-2} - x$.

ВАРІАНТ 26*

1. Знайти похідні функцій:

$$a)\, y = \frac{5x - 7}{\sqrt{x^2 - 5x + 3}}; \qquad b)\, y = \sqrt[3]{e^{-3x} + \sec 6x};$$

$$c)\, y = arctg \ln\frac{1}{x}; \qquad d)\, 2^{x+y} - 3 = xy\ln 4;$$

$$e)\, y = \left(1 + x^5\right)^{\cos 3x}.$$

2. Знайти границі функцій:

$$a)\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{3}}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}; \qquad b)\lim_{x\to+0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}.$$

3. На кривій $y = x^3$ задано дві точки A(-1;-1) і B(2;8). В якій точці кривої дотична до неї буде паралельна проведеній січній AB?

4. Гіпотенуза прямокутного трикутника $c = 4\sqrt{2}$. Якими повинні бути катети a і b, щоб периметр трикутника був найбільшим?

5. Дослідити функцію та побудувати її графік: $y = -x + 3 - x^{-1}$.

ВАРІАНТ 27*

1. Знайти похідні функцій:

$$a)\, y=\ln 3x\cdot 3^{\sin x}; \qquad b)\, y=\sqrt[5]{\left(5+\sin^3 2x\right)^4};$$

$$c)\, y=\operatorname{tg} e^{5\sqrt{3x}}; \qquad d)\, \ln\left(x^3+y^2x\right)=\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right);$$

$$e)\, y=\left(5-e^{3\sqrt{2x}}\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}.$$

2. Знайти границі функцій:

$$a)\, \lim_{x\to+\infty}\frac{2arctgx-\pi}{1-e^{\frac{4}{x}}}; \quad b)\, \lim_{x\to 0}\pi\left[\frac{1}{4x}-\frac{1}{2x\left(e^{\pi x}+1\right)}\right].$$

3. Знайти найбільше та найменше значення функції $y=4\sqrt[3]{x^2}-2x$ на відрізку $[-2;4]$.

4. Серед усіх циліндрів, які можуть бути вписані в конус з радіусом основи $r=6$см і висотою $h=18$см, знайти циліндр найбільшого об'єму.

5. Дослідити функцію та побудувати її графік: $y=\dfrac{x^3}{1-x}$.

ВАРІАНТ 28*

1. Знайти похідні функцій:

$$a)\, y=\frac{2x-e^{-2x}}{2x+e^{-2x}}; \qquad b)\, y=\ln\frac{\operatorname{ctg}\frac{x}{4}}{3+\sin^2 3x};$$

$$c)\, y=\sin^5\left(\log_2 3x\right)+\operatorname{ctg}2; \qquad d)\, x\ln y-y\ln x=\sqrt{x^2+y^2}.;$$

$$e)\, y=\sqrt[4]{\frac{x^3(3+x)}{(3-x)^5}}.$$

2. Знайти границі функцій:

$$a)\, \lim_{x\to+0}\frac{\ln(1-\cos x)}{\ln\operatorname{tg}x}; \qquad b)\, \lim_{x\to 0}(\operatorname{ctg}x)^{\sin x}.$$

3. Знайти найбільше та найменше значення функції $y=4(2+x)^{-1}+x$ на відрізку $[-1;3]$.

4. Серед усіх прямокутників з даною площею S знайти прямокутник з найменшим периметром.

5. Дослідити функцію та побудувати її графік: $y=\left(x^3-x^2\right)\cdot(x+1)^{-2}$.

ВАРІАНТ 29*

1. Знайти похідні функцій:

$$a)\, y = 5^{\sqrt{4x}} \cdot tg^3 \frac{x}{3}; \qquad b)\, y = \left(3^{\arccos x} + \arcsin 2x\right)^4$$

$$c)\, y = \ln ctg \frac{e^{2\sin x}}{4}; \qquad d) (x-y)^2 + (x+3y)^3 = xy;$$

$$e)\, y = (x + \cos x)^{x^3}.$$

2. Знайти границі функцій:

$$a) \lim_{x \to 0} \frac{3x + 1 - e^{3x}}{\sin^2 3x}; \qquad b) \lim_{x \to +\infty} x \cdot \ln\left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x\right).$$

3. До кривої $y = 3x^2 - 12x + 8$ проведена дотична, паралельна осі Ox. Знайти координати точки дотику.

4. Які розміри повинен мати циліндр найбільшої повної поверхні, вписаний в кулю радіуса r=4см?

5. Дослідити функцію та побудувати її графік: $y = (2+x)^{-1} \cdot (x^2 - 3)$.

ВАРІАНТ 30*

1. Знайти похідні функцій:

$$a)\, y = \frac{arctg\, 3x}{4 - 2x^2}; \qquad b)\, y = \left(3x^4 - \frac{5}{x^3} + 6\right)^5;$$

$$c)\, y = 3^{-\sin^2 3x}; \qquad d) \arcsin(y + x) = x^3 + yx - \sqrt{xy};$$

$$e)\, y = \left(x + \frac{1}{x}\right)^{\ln x}.$$

2 Знайти границі функцій:

$$a) \lim_{x \to +0} \frac{\ln \sin x}{ctgx}; \qquad b) \lim_{x \to 1} (1-x)^{\cos\frac{\pi x}{2}}.$$

3. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = x + \sqrt{x}$ на відрізку $[0;4]$.

4. В прямокутний трикутник з катетами, що дорівнюють 2см і 4см, впишіть прямокутник найбільшої площі зі сторонами, паралельними катетам трикутника.

5. Дослідити функцію та побудувати її графік: $y = (x^2 + 8x) \cdot (x-1)^{-1}$.

ДОДАТОК

1. Функція. Означення. Залежність змінної y від змінної x називається функцією, якщо кожному значенню x відповідає єдине значення y.

Позначення: $y = f(x)$.

Функція $y = f(x)$, яка визначена на множник D називається парною, якщо $\forall x \in D$ виконується умова: $-x \in D$ і $f(-x) = f(x)$; непарною, якщо $f(-x) = -f(x)$.

Якщо границя функції $f(x)$ у точці $x = a$ дорівнює значенню функції в цій точці, тобто

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a),$$

то функція називається неперервною у точці $x = a$.

Функція називається періодичною, якщо існує таке число $T \neq 0$, що $f(x) = f(x \pm T)$ для будь-яких x, $x \pm T$ із області визначення функції.

Точка називається точкою максимуму (мінімуму) функції $f(x)$, якщо для всіх x із околу x_0 виконується умова

$$f(x_0) > f(x) \quad (f(x_0) < f(x)).$$

2. Означення похідної функції $y = f(x)$ у точці. Нехай функція $f(x)$ визначена в деякій області точки x_0. Похідною функції $f(x)$ у точці x_0 називається границя відношення приросту функції $\Delta f(x_0)$ до приросту аргумента Δx при $\Delta x \to 0$.

Позначення: $f'(x_0)$.

За означенням $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Операція знаходження похідної функції називається її диференціюванням.

3. Геометричний зміст похідної. Похідна функції $f(x)$ у точці x_0 дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до графіка функції у точці $\mathrm{M}_0(x_0, y_0)$, тобто

$f'(x_0) = k$, де $k = tg\alpha$, (α - кут, який утворює дотична з додатним напрямом осі Ox)

4. Рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці $\mathrm{M}_0(x_0, y_0)$ має вигляд

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

5. Механічний зміст похідної. Миттєва швидкість прямолінійного руху матеріальної точки в довільний момент часу t є похідна від шляху S від часу t:

$$V(t) = S'(t).$$

6. Правила диференціювання. Нехай $u = u(x)$, $v = v(x)$. Тоді:

$(u \pm v)' = u' \pm v'$,

$(uv)' = u' \cdot v + u \cdot v'$,

$(Cu)' = Cu'$, де $C \equiv const$,

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, $v \neq 0$.

Важливо: $C' = 0, C \equiv const$.

7. Похідна складеної функції:

Якщо $y = f(u)$, де $u = \varphi(x)$, то $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

8. Таблиця похідних елементарних функцій:

$f'(x)$	$f'(u), u = u(x)$
Степенева функція	
1) $(x^k)' = k \cdot x^{k-1}$. 1а) $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$. 1б) $(\sqrt{x})' = -\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.	1) $(u^k)' = k \cdot u^{k-1} \cdot u'_x$. 1а) $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{1}{u^2} \cdot u'_x$. 1б) $(\sqrt{u})' = -\dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'_x$.
Показникова функція	
2) $(a^x)' = a^x \ln a$. 2а) $(e^x)' = e^x$.	2) $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'_x$. 2а) $(e^u)' = e^u \cdot u'_x$.
Логарифмічна функція	
3) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$. 3а) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.	3) $(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \ln a} \cdot u'_x$. 3а) $(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'_x$.
Тригонометричні функції	
4) $(\sin x)' = \cos x$. 5) $(\cos x)' = -\sin x$. 6) $(tg\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$. 7) $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.	4) $(\sin u)' = \cos u \cdot u'_x$. 5) $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'_x$. 6) $(tg\, u)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} \cdot u'_x$. 7) $(ctgu)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'_x$.

9. Важливо:

а) Якщо $y = f(x)$ на $(a;b)$ має додатну похідну $(y' > 0)$, то ця функція зростає на цьому інтервалі, якщо від'ємну $(y' < 0)$, то ця функція спадає на $(a;b)$.

б) Якщо $f(x)$ неперервна при $x = x_0$, $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ в (a, x_0) і $f'(x) < 0$ $(f'(x) > 0)$ в (x_0, b), то точка x_0 буде точкою максимуму функції $f(x)$ (точкою мінімуму $f(x)$).

в) Значення функції у точці максимуму (мінімуму) називається максимумом (мінімумом) функції. Максимум і мінімум функції називається екстремумами функції.

10. Формула Ньютона – Лейбніца

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

де $F(x)$ - первісна для $f(x)$, тобто $F'(x) = f(x)$.

ТАБЛИЦЯ ЗНАЧЕНЬ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ ДЕЯКИХ КУТІВ

Аргумент		Функція			
град.	рад.	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$
0°	0	0	1	0	не існує
30°	$\frac{\pi}{6}$	0,5	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0,5	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	не існує	0
120°	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-0,5$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
135°	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1
150°	$\frac{5\pi}{6}$	0,5	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$
180°	π	0	-1	0	не існує
270°	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	не існує	0
360°	0	0	1	0	не існує

ВЛАСТИВОСТІ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ ТА ЇХ ГРАФІКИ

1.Основні властивості функції $y = \sin x$:

а) область визначення – множина всіх дійсних чисел: $D(f) \in R$;

б) область значень – відрізок $[-1;1]$, тобто $E(f)=[-1;1]$, отже, синус – функція обмежена;
в) функція непарна: $\sin(-x)=-\sin x$ для всіх $x\in R$;
г) функція періодична з найменшим додатним періодом 2π, тобто $\sin(x+2\pi)=\sin x$ для всіх $x\in R$.
ґ) $\sin x=0$ при $x=\pi k, k\in Z$;
$\sin x>0$ при всіх $x\in(2\pi k;\pi+2\pi k), k\in Z$;
$\sin x<0$ при всіх $x\in(\pi+2\pi k;2\pi+2\pi k), k\in Z$.
д) функція зростає від -1 до 1 на проміжках
$\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\frac{\pi}{2}+2\pi k\right), k\in Z$;
функція спадає від 1 до -1 на проміжках $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k;\frac{3\pi}{2}+2\pi k\right), k\in Z$.
е) функція приймає найбільше значення, рівне 1, в точках $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z$;
функція приймає найменше значення, рівне -1, в точках $x=\frac{3\pi}{2}+2\pi k, k\in Z$.
Графік функції $y=\sin x$ будуємо, виходячи з перелічених властивостей, причому достатньо спочатку побудувати його на проміжку $[-\pi;\pi]$, тобто на проміжку довжина якого дорівнює періоду функції (рис. 28),

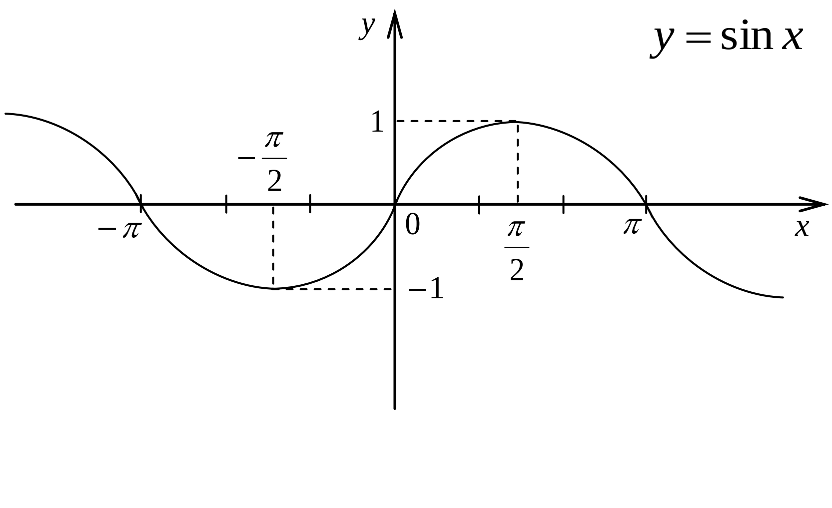


Рис.28

2. <u>Основні властивості функції</u> $y=\cos x$:
а) область визначення – множина всіх дійсних чисел $D(f)\in R$;
б) область значень – відрізок $[-1;1]$, тобто $E(f)=[-1;1]$, отже, косинус – функція обмежена;
в) функція парна: $\cos(-x)=\cos x$ для всіх $x\in R$;

г) функція періодична з найменшим додатним періодом 2π, тобто $\cos(x+2\pi)=\cos x$ для всіх $x \in R$.

ґ) $\cos x = 0$ при $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k, k \in Z$;

д) $\cos x > 0$ при всіх $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k; \dfrac{\pi}{2}+2\pi k\right), k \in Z$;

$\cos x < 0$ при всіх $x \in \left(\dfrac{\pi}{2}+2\pi k; -\dfrac{3\pi}{2}+2\pi k\right), k \in Z$.

е) функція спадає від 1 до -1 на проміжках $(2\pi k; \pi+2\pi k), k \in Z$;
функція зростає від -1 до 1 на проміжках $(-\pi+2\pi k; 2\pi k), k \in Z$.
є) функція приймає найбільше значення, рівне 1, в точках $x=2\pi k, k \in Z$;
функція приймає найменше значення, рівне -1, в точках $x=\pi+2\pi k, k \in Z$.
Графік функції $y=\cos x$ будуємо, виходячи з перелічених властивостей, причому достатньо спочатку побудувати його на проміжку $[-\pi;\pi]$, тобто на проміжку, довжина якого дорівнює періоду функції (рис. 29),

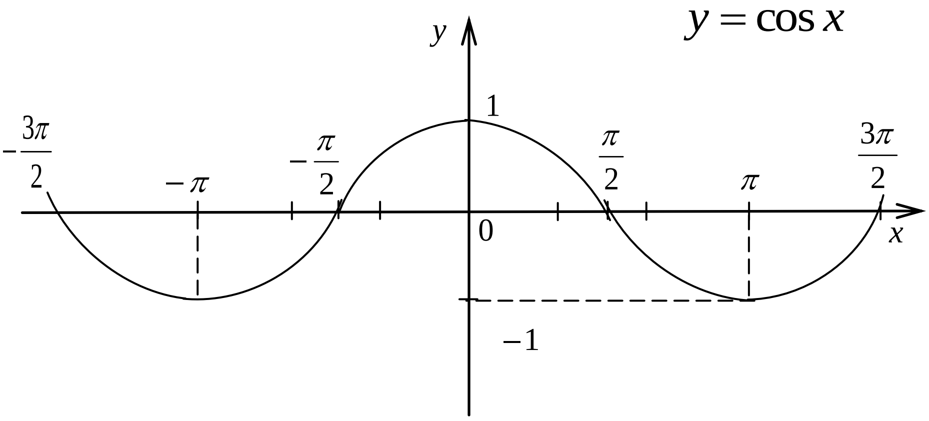


Рис. 29

3. <u>Основні властивості функції</u> $y = tgx$:
а) область визначення – множина всіх дійсних чисел, крім чисел виду $\dfrac{\pi}{2}+\pi k, k \in Z$;
б) множина значень – вся числова пряма, таким чином, тангенс – функція необмежена;
в) функція непарна: $tg(-x)=-tgx$, для всіх x із області визначення;
г) функція періодична з найменшим додатним періодом π, тобто $tg(x+\pi)=tgx$ для всіх x із області визначення;
ґ) $tgx=0$ при $x=\pi k, k \in Z$;
д) $tgx>0$ при всіх $x \in \left(\pi k; \dfrac{\pi}{2}+\pi k\right), k \in Z$;

$tgx < 0$ при всіх $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi k\right), k \in Z$.

е) функція зростає на кожному з проміжків $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right), k \in Z$.

Графік функції $y = tgx$ достатньо спочатку побудувати на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тобто на проміжку, довжина якого дорівнює періоду функції, а потім і на всій числовій осі (рис.30),

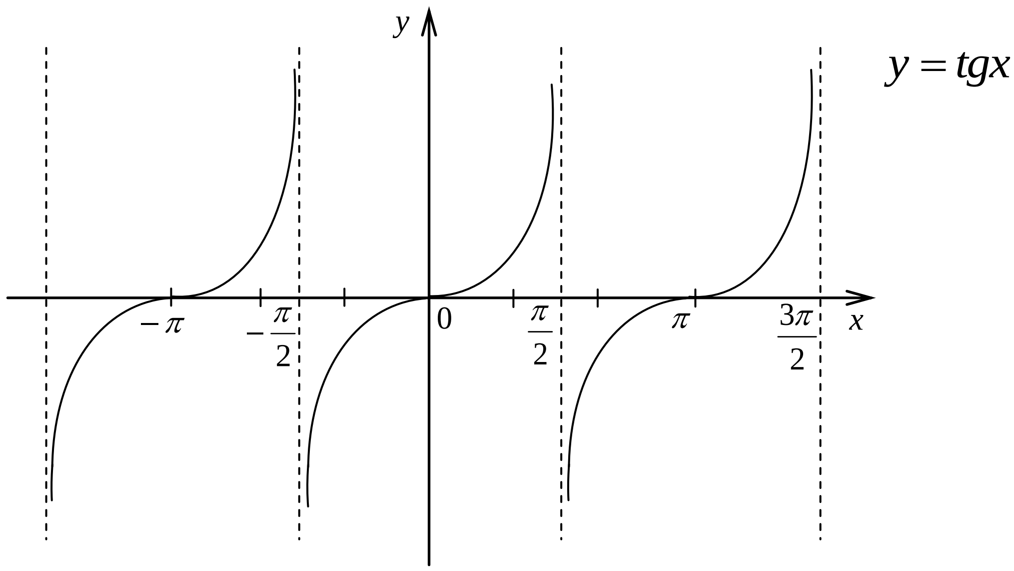


Рис. 30

4. <u>Основні властивості функції</u> $y = ctgx$:

а) область визначення – множина всіх дійсних чисел, крім чисел виду $\pi k, k \in Z$;

б) множина значень – вся числова пряма, таким чином, котангенс – функція необмежена;

в) функція непарна: $ctg(-x) = -ctgx$, для всіх x із області визначення;

г) функція періодична з найменшим додатним періодом π, тобто $ctg(x + \pi) = ctgx$ для всіх x із області визначення;

г) $ctgx = 0$ при $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$;

д) $ctgx > 0$ при всіх $x \in \left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right), k \in Z$; $x \in \left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right), k \in Z$

$ctgx < 0$ при всіх $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi k\right), k \in Z$,

е) функція спадає на проміжках $(\pi k; \pi + \pi k), k \in Z$.

Графік функції $y = ctgx$ достатньо спочатку побудувати на проміжку $(0;\pi)$, тобто на проміжку, довжина якого дорівнює періоду функції, а потім і на всій числовій осі (Рис. 31),

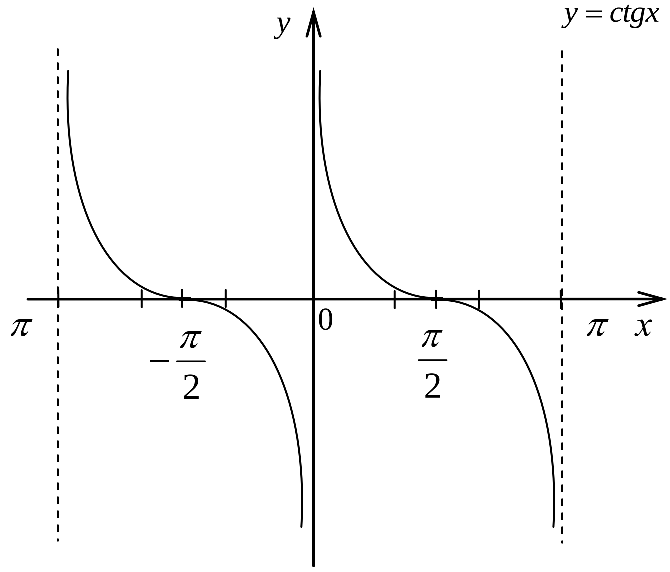


Рис. 31

ОБЕРНЕНІ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ

1. Арксинус. Означення. Нехай число m за модулем не перевищує одиницю. Арксинусом числа m називається кут $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, синус якого дорівнює m.

Позначення: $x = \arcsin m$.

2. Арккосинус. Означення. Нехай число m- число, яке за модулем не перевищує одиниці. Арккосинусом числа m називається кут $x \in [0;\pi]$, косинус якого дорівнює m.

Позначення: $x = \arccos m$.

3. Арктангенс. Означення. Арктангенсом числа m називається кут $x \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, тангенс якого дорівнює m.

Позначення: $x = arctg\ m$.

4. Арккотангенс. Означення. Арккотангенсом числа m називається кут $x \in (0;\pi)$, котангенс якого дорівнює m.

Позначення: $x = arcctg\ m$.

5. Важливо:

а) Для будь-якого $m \in [-1;1]$ маємо:

$\sin(\arcsin m) = m$, $-\frac{\pi}{2} \le \arcsin m \le \frac{\pi}{2}$.

б) Для будь-якого $m \in [-1;1]$ маємо:

$\cos(\arccos m) = m$, $0 \le \arccos m \le \pi$.

в) Для будь-якого m маємо:

$tg(arctg\, m) = m$, $-\frac{\pi}{2} < arctg\, m < \frac{\pi}{2}$.

г) Для будь-якого m маємо:

$ctg(arcctg\, m) = m$, $0 < arcctg\, m < \pi$.

6. Основні тотожності:

а) Для всіх $m \in [-1;1]$:

$\arcsin(-m) = -\arcsin m$;

$\arccos(-m) = \pi - \arccos m$;

$arctg(-m) = -arctg m$;

$arcctg(-m) = \pi - arcctg\, m$.

б) Для всіх $m \in [0;1]$:

$\arcsin m = \arccos\sqrt{1-m^2}$;

$\arccos m = \arcsin\sqrt{1-m^2}$.

в) Для всіх $m \in (0;+\infty)$:

$arctg\, m = arcctg\,\frac{1}{m}$; $arcctg\, m = arctg\,\frac{1}{m}$;

$\arcsin m = \frac{\pi}{2} - \arccos m = arctg\,\frac{m}{\sqrt{1-m^2}}$;

$\arccos m = \frac{\pi}{2} - \arcsin m = arcctg\,\frac{m}{\sqrt{1-m^2}}$;

$arctg\, m = \frac{\pi}{2} - arcctg\, m = \arcsin\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$;

$arcctg\, m = \frac{\pi}{2} - arctg\, m = \arccos\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$.

7. Властивості обернених тригонометричних функцій та їх графіки

1). Функція $y = \arcsin x$.

$$D(f): x \in [-1;1]; \quad E(f): y \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right].$$

Графік $y = \arcsin x$ (рис. 32) симетричний до графіка функції $y = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ відносно прямої $y = x$.

Основними властивостями $y = \arcsin x$ є:

а) $\arcsin(-x) = -\arcsin x$, тобто $y = \arcsin x$ - непарна функція;

б) функція $y = \arcsin x$ зростаюча;

в) $\sin(\arcsin x) = x$, якщо $x \in [-1;1]$.

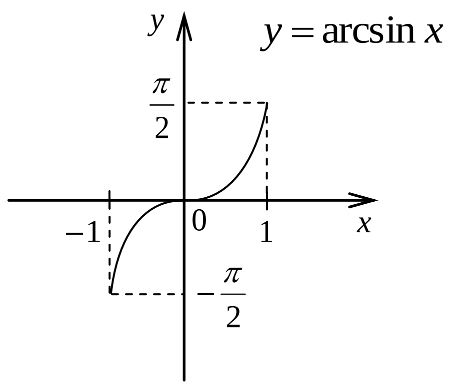


Рис. 32.

2). Функція $y = \arccos x$**.**

$$D(f): x \in [-1;1]; \quad E(f): y \in [0;\pi].$$

Графік $y = \arccos x$ (рис. 33) симетричний до графіка функції $y = \cos x$, $x \in [0;\pi]$ відносно прямої $y = x$.

Основними властивостями функції $y = \arccos x$ є:

а) $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$, тобто $y = \arccos x$ є функцією загального виду;

б) функція $y = \arccos x$ спадна;

в) $\cos(\arccos x) = x$, якщо $x \in [-1;1]$.

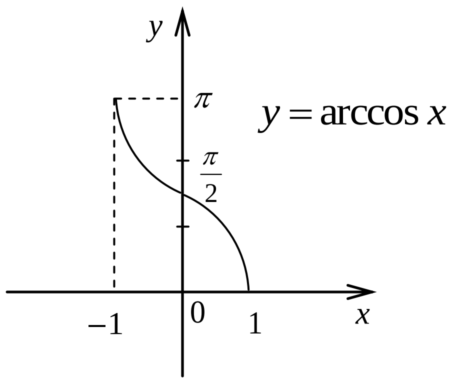


Рис. 33.

3). Функція $y = arctg\, x$**.**

$$D(f): x \in (-\infty;+\infty) \quad E(f): y \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right).$$

Графік $y = arctg\, x$ (рис. 34) симетричний до графіка функції $y = tg\, x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ відносно прямої $y = x$. Прямі $y = \pm\frac{\pi}{2}$ є горизонтальними асимптотами графіка функції $y = arctg\, x$.

Основними властивостями $y = arctg\, x$ є:

а) $arctg(-x) = -arctg\, x$, тобто $y = arctg\, x$ - непарна функція;

б) функція $y = arctgx$ зростаюча;

в) $tg(arctgx) = x$, якщо $x \in (-\infty; +\infty)$.

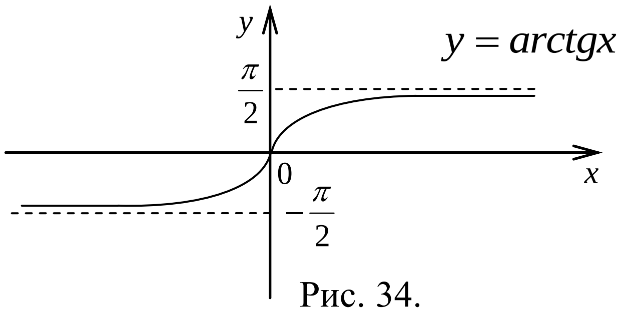


Рис. 34.

4). Функція $y = arcctg\, x$**.**

$$D(f): x \in (-\infty; +\infty) \qquad E(f): y \in (0; \pi).$$

Графік $y = arcctg\, x$ (рис. 35) симетричний до графіка функції $y = ctg\, x$, $x \in [0; \pi]$ відносно прямої $y = x$. Прямі $y = 0$ і $y = \pi$ є горизонтальними асимптотами графіка функції $y = arcctg\, x$.

Основними властивостями $y = arcctg\, x$ є:

а) $arcctg(-x) = \pi - arcctg\, x$, тобто $y = arcctg\, x$ є функцією загального виду;

б) функція $y = arcctg\, x$ спадна;

в) $ctg(arcctgx) = x$, якщо $x \in (-\infty; +\infty)$.

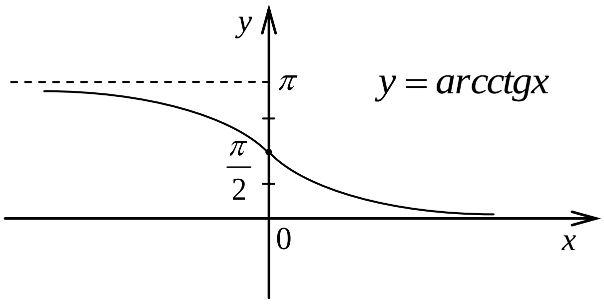


Рис. 35.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ТА РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Дубовик В.П., Юрик І.І., Вища математика. –К.: 1988 А.С.К.,2001.
2. Суліма І.М., Ковтун І.І., Радчик І.А. Вища математика. Частина друга. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. –К.:Видавничий центр НАУ,2002.
3. Суліма І.М., Ковтун І.І., Батечко Н.Г., Нікітіна І.А., Яковенко В.М., Збірник задач- К.: Видавничий центр НАУ, 2006.
4. Суліма І.М., Ковтун І.І., Батечко Н.Г., Нікітіна І.А., Яковенко В.М., Вища математика у задачах і вправах. Частина перша. –К.: Видавничий центр НАУ, 2005.
5. Данко П.Е., Попов А.Г., Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть II. –М.: В. Шк., 1974.

ЗМІСТ