Практична робота 11-12.

Тема: Методи інтегрування в невизначеному інтегралі.

Мета: Навчитись застосовувати основні методи знаходження невизначених інтегралів.

Короткі теоретичні відомості

Означення. Функція $F(x)$ називається *первісною* для функції $f(x)$ на проміжку X, якщо на цьому проміжку $F'(x)=f(x)$. З означення випливає, що первісна $F(x)$ — диференційовна, а значить неперервна функція на проміжку X.

Теорема 1. Якщо $F(x)$ — первісна для функції $f(x)$ на проміжку X, то будь-яка первісна $\Phi(x)$ для $f(x)$ може бути подана у вигляді $\Phi(x) = F(x) + C$ на цьому проміжку, де C=const – довільна стала.

Означення. Невизначеним інтегралом від функції $f(x)$ на проміжку X називається сукупність всіх первісних $F(x) + C$ для функції $f(x)$ на проміжку X, тобто

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \qquad (1)$$

Основні властивості невизначеного інтеграла.

1). Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції: $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.

2). Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу: $d\int f(x)dx = f(x)dx$.

3). Невизначений інтеграл від диференціала функції дорівнює цій функції з точністю до сталої: $\int dF(x) = F(x) + C$.

4). Сталий множник можна виносити за знак інтеграла, тобто

$$\int k\cdot f(x)dx = k\cdot\int f(x)dx, \quad k\neq 0.$$

5). Невизначений інтеграл від суми двох функцій дорівнює сумі невизначених інтегралів від цих функцій, якщо вони існують, тобто

$$\int \left(f_1(x) + f_2(x)\right)dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx.$$

Таблиця основних інтегралів

1. $\int 0\cdot dx = C$; 2. $\int dx = x + C$; 3. $\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha\neq -1$;

4. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$; 5. $\int e^x dx = e^x + C$; 6. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a \neq 1$;

7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$; 8. $\int \cos x dx = \sin x + C$;

9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$; 10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$;

11. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C$; 12. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C$;

13. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$; 14. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$;

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C$;

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + C$;

17. $\int \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C$;

18. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + C$;

19. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x - a}{x + a}\right| + C$;

20. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C$.

Зразки розв'язування вправ

1. Знайти інтеграл $\int \left(3 - x^2\right)^2 dx$.

Розв'язання. Перетворимо підінтегральну функцію, використаємо властивості невизначеного інтеграла і табличні інтеграли, дістанемо:

$$\int \left(3 - x^2\right)^2 dx = \int \left(9 - 6x^2 + x^4\right) dx = 9x - 6 \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + C = 9x - 2x^3 + \frac{1}{5}x^5 + C.$$

2. Обчислити інтеграл $\int (2x + \sqrt{x} - \sqrt[3]{x^2} + \frac{5}{x^2})dx$.

Розв'язання. Використовуючи властивості інтеграла і табличний інтеграл від степеневої функції дістанемо

$$\int (2x + \sqrt{x} - \sqrt[3]{x^2} + \frac{5}{x^2})dx = \int 2x dx + \int x^{\frac{1}{2}} dx - \int x^{\frac{2}{3}} dx + 5\int x^{-2} dx =$$

$$=x^2+\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3/2}-\frac{x^{\frac{5}{3}}}{5/3}-5x^{-1}+C=x^2+\frac{2\sqrt{x^3}}{3}-\frac{3\sqrt[3]{x^5}}{5}+\frac{5}{x}+C$$

3. Обчислити інтеграл $\int\frac{1\cdot dx}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}$.

<u>*Розв'язання*</u>. Скориставшись тригонометричною формулою і табличними інтегралами, дістанемо

$$\int\frac{1\cdot dx}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx=\int\left(\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx=$$

$$=\int\frac{dx}{\sin^2 x}+\int\frac{dx}{\cos^2 x}=-\operatorname{ctg}x+\operatorname{tg}x+C.$$

4. Знайти інтеграл $I=\int\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx.$

<u>*Розв'язання*</u>. Застосуємо метод заміни змінної. Оскільки

$d\left(\sqrt{x}\right)=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx,$ то $\quad I=2\int\cos\sqrt{x}d\left(\sqrt{x}\right)=2\sin\sqrt{x}+C.$

5. Знайти інтеграл $I=\int e^{\sin 2x}\cos 2xdx.$

<u>*Розв'язання*</u>. Застосуємо підстановку $t=\sin 2x,$ тоді

$$dt=2\cos 2xdx, \cos 2x=\frac{dt}{2}.$$

Після заміни змінної в інтегралі маємо:

$$I=\frac{1}{2}\int e^t dt=\frac{1}{2}e^t+C=\frac{1}{2}e^{\sin 2x}+C.$$

6. Знайти $\int\frac{(2\ln x+3)^3 dx}{x}$.

<u>*Розв'язання*</u>. Оскільки під інтегралом є функція та її похідна, то зробимо заміну змінної:

$$\int\frac{(2\ln x+3)^3 dx}{x}=\left|\begin{array}{l} t=2\ln x+3 \\ dt=\frac{2dx}{x} \\ \frac{dt}{2}=\frac{dx}{x}\end{array}\right|=\frac{1}{2}\int t^3 du=\frac{1}{8}t^4+C=\frac{1}{8}(2\ln x+3)^4+C.$$

7. Обчислити $\int(x+2)\sin xdx.$

<u>*Розв'язання*</u>. Так як під інтегралом є добуток різних функцій, то треба використовувати метод інтегрування частинами. Покладемо $u=x+2, dv=\sin xdx.$ Тоді $du=dx, v=\int\sin xdx=-\cos x.$ Отже,

$$\int (x+2)\sin xdx = -(x+2)\cos x + \int \cos xdx = -(x+2)\cos x + \sin x + C.$$

8. Знайти інтеграл $\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2}}dx$.

Розв'язання. Оскільки під інтегралом є добуток степеневої на логарифмічну функцію, то застосуємо метод інтегрування частинами.

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2}}dx = \int x^{-\frac{2}{3}}\ln xdx = \left| \begin{matrix} u = \ln x & dv = x^{-\frac{2}{3}}dx \\ du = \frac{dx}{x} & v = \int x^{-\frac{2}{3}}dx = \frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} = 3x^{\frac{1}{3}} \end{matrix} \right| =$$

$$= 3x^{\frac{1}{3}}\ln x - \int 3x^{\frac{1}{3}}\frac{dx}{x} = 3x^{\frac{1}{3}}\ln x - 3\int x^{-\frac{2}{3}}dx = 3x^{\frac{1}{3}}\ln x - 3\cdot 3x^{\frac{1}{3}} + C = 3\sqrt[3]{x}(\ln x - 3) + C \cdot$$

9. Обчислити $\int \mathrm{arctg}5xdx$.

Розв'язання. Використавши метод інтегрування частинами, дістанемо:

$$\int \mathrm{arcctg}5xdx = \left| \begin{matrix} u = \mathrm{arcctg}5x & dv = dx \\ du = -\frac{5dx}{1+25x^2} & v = x \end{matrix} \right| = x\mathrm{arcctg}5x - \int\left(-\frac{5x}{1+25x^2}\right)dx =$$

$$= x\mathrm{arcctg}5x + \frac{1}{10}\int \frac{50xdx}{1+25x^2} = \left| \begin{matrix} t = 1+25x^2 \\ dt = 50xdx \end{matrix} \right| = x\mathrm{arcctg}5x + \frac{1}{10}\int \frac{dt}{t} =$$

$$= x\mathrm{arcctg}5x + \frac{1}{10}\ln|t| + C = x\mathrm{arcctg}5x + \frac{1}{10}\ln\left|1+25x^2\right| + C.$$

10. Знайти інтеграл $\int e^x \cos xdx$.

Розв'язання. а) Застосовуючи інтегрування частинами двічі, дістаємо рівняння відносно заданого інтеграла:

$$I = \int e^x \cos xdx = \left| \begin{matrix} \cos x = u,\ du = -\sin xdx; \\ e^x dx = dv \Rightarrow v = e^x \end{matrix} \right| =$$

$$= e^x \cos x - \int -\sin x \cdot e^x dx = \left| \begin{matrix} \sin x = u,\ du = \cos xdx; \\ e^x dx = dv \Rightarrow v = e^x \end{matrix} \right| =$$

$$= e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos xdx = e^x(\cos x + \sin x) - I.$$

Отже, маємо рівняння $I = e^x(\cos x + \sin x) - I$, звідки знаходимо

$$I = \int e^x \cos xdx = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + C.$$

Завдання для самостійної роботи

№ 1. Знайти інтеграли:

1) $\int(9x^2-4x+5)dx$; 2) $\int\frac{x-3}{\sqrt{x}}dx$;

3) $\int\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$; 4) $\int\frac{(2x-7)^2}{\sqrt{x}}dx$;

5) $\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx$; 6) $\int\frac{5-3tg^2 x}{\sin^2 x}dx$;

7) $\int\frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}dx$; 8) $\int\frac{dx}{\cos^2 x\sin^2 x}$;

9) $\int\frac{5-4ctg^2 x}{\cos^2 x}dx$; 10) $\int\frac{\sqrt{3+x^2}-\sqrt{3-x^2}}{\sqrt{9-x^4}}dx$.

(*Відповідь*: 1) $3x^3-2x^2+5x+C$; 2) $\frac{2}{3}x\sqrt{x}-6\sqrt{x}+C$;

3) $-\frac{1}{2x^2}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+C$; 4) $\frac{8}{5}x^2\sqrt{x}-\frac{56}{3}x\sqrt{x}+98\sqrt{x}+C$;

5) $-tgx-ctgx+C$; 6) $-5ctgx-3tgx+C$; 7) $\ln|x|+2arctgx+C$;

8) $-2ctg2x+C$; 9) $5tgx+4ctgx+C$; 10) $\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}}-\ln\left|x+\sqrt{3+x^2}\right|+C$.)

№ 2. Знайти інтеграли:

1) $\int\frac{dx}{6x-5}$; 2) $\int\frac{dx}{cos^2 4x}$; 3) $\int\sin 3xdx$;

4) $\int\sqrt[3]{(8-5x)^2}dx$; 5) $\int e^{7x}dx$; 6) $\int\frac{dx}{16x^2-1}$; 7) $\int\frac{dx}{(3x-2)^5}$;

8) $\int\cos\frac{x}{4}dx$; 9) $\int\frac{dx}{2x^2+9}$; 10) $\int\frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}$.

(*Відповідь*: 1) $\frac{1}{6}\ln|6x-5|+C$; 2) $\frac{1}{4}tg4x+C$;

3) $-\frac{1}{3}\cos 3x+C$; 4) $-\frac{3}{25}\sqrt[3]{(8-5x)^5}+C$; 5) $\frac{1}{7}e^{7x}+C$;

6) $\frac{1}{8}\ln\left|\frac{2x-1}{2x+1}\right|+C$; 7) $-\frac{1}{12(3x-2)^4}+C$; 8) $4\sin\frac{x}{4}+C$;

9) $\frac{1}{3\sqrt{2}}arctg\frac{\sqrt{2}x}{3}+C$; 10) $\frac{1}{3}\arcsin 3x+C$.)

№ 3. Знайти інтеграли:

1) $\int\frac{d(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}}$; 2) $\int cos(1-4x)d(1-4x)$; 3) $\int\sin^5 x\cos xdx$;

4) $\int \frac{xdx}{1+x^4}$; 5) $\int \frac{x^3dx}{1+x^4}$; 6) $\int \frac{dx}{x\ln x}$;

7) $\int \frac{\ln xdx}{x(2-\ln^2 x)}$; 8) $\int \frac{e^x dx}{3+e^{2x}}$; 9) $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{1+3tgx}}$;

10) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$; 11) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin^3 x}$; 12) $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}dx}{x^2}$.

(*Відповідь*: 1) $2\sqrt{x^2+1}+C$; 2) $\sin(1-4x)+C$; 3) $\frac{1}{6}\sin^6 x+C$;

4) $\frac{1}{2}arctgx^2+C$; 5) $\frac{1}{4}\ln\left|1+x^4\right|+C$; 6) $\ln\left|\ln x\right|+C$;

7) $-\frac{1}{2}\ln\left|2-\ln^2 x\right|+C$; 8) $\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{e^x}{\sqrt{3}}+C$; 9) $\frac{2}{3}\sqrt{1+3tgx}+C$;

10) $-2\cos\sqrt{x}+C$; 11) $-\frac{1}{2\arcsin^2 x}+C$; 12) $-e^{\frac{1}{x}}+C$.)

№ 4. Обчислити інтеграли:

1) $\int x\sin 2xdx$; 2) $\int x\cos 5xdx$; 3) $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$;

4) $\int \frac{xdx}{\cos^2 x}$; 5) $\int xarctgxdx$; 6) $\int xarc\sin xdx$;

7) $\int x^2e^{3x}dx$; 8) $\int x\ln xdx$; 9) $\int x^2\ln(x+1)dx$;

10) $\int e^{2x}\sin 3xdx$.

(*Відповідь*: 1) $\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{2}x\cos 2x+C$; 2) $\frac{1}{5}x\sin 5x+\frac{1}{25}\cos 5x+C$;

3) $-xctgx+\ln\left|\sin x\right|+C$; 4) $xtgx+\ln\left|\cos x\right|+C$; 5) $\frac{x^2+1}{2}arctgx-\frac{x}{2}+C$;

6) $\frac{x^2}{2}\arcsin x-\frac{1}{4}\arcsin x+\frac{x}{4}\sqrt{1-x^2}+C$; 7) $\frac{1}{27}e^{3x}(9x^2-6x+2)+C$;

8) $\frac{x^2}{4}(2\ln x-1)+C$; 9) $\frac{x^3+1}{3}\ln(1+x)-\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{6}-\frac{x}{3}+C$;

10) $\frac{e^{2x}}{13}(2\sin 3x-3\cos 3x)+C$.)