Тема 7. Інтегрування раціональних функцій.

1. Основні відомості про раціональну функцію.

Многочленом (цілою раціональною функцією) називається функція $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$, де натуральне число n – степінь многочлена; a_0, a_1, ..., a_n – його коефіцієнти (дійсні або комплексні). Розглядатимемо лише многочлени з дійсними коефіцієнтами.

Коренем многочлена називається числове значення змінної $x = x_1$ (дійсне або комплексне) , при якому маємо $P_n(x_1) = 0$. Згідно з основною теоремою алгебри, всякий многочлен степеня $n > 0$ має хоча б один корінь, дійсний або комплексний. Отже, будь-який многочлен з дійсними коефіцієнтами можна розкласти на лінійні та квадратні (з комплексними коренями) множники з дійсними коефіцієнтами.

Відношення двох многочленів $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, де $P_n(x)$, $Q_m(x)$ не тотожні нулі, називається *раціональною функцією* або *раціональним дробом*. Раціональний дріб називається *правильним*, якщо $m < n$; і *неправильним* при $m \ge n$.

Теорема 1. Будь-який неправильний раціональний дріб можна подати у вигляді суми многочлена (цілої частини) та правильного раціонального дробу

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = W_r(x) + \frac{R_p(x)}{Q_m(x)}, \quad \text{де } p < m. \qquad (1)$$

Елементарними раціональними дробами називають такі дроби:

1) $\dfrac{A}{x-a}$, 2) $\dfrac{A}{(x-a)^k}$, 3) $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$, 4) $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$,

де A, a, M, N, p, q – дійсні числа, $p^2 - 4q < 0$, $k \ge 2$.

Теорема 2. Будь-який правильний раціональний дріб $\dfrac{R_p(x)}{Q_m(x)}$ можна подати у вигляді скінченної суми елементарних дробів, а саме:

1) якщо $Q_m(x) = (x-a)^k \cdot g_{m-k}(x)$, то

$$\frac{R_p(x)}{(x-a)^k g_{m-k}(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{r(x)}{g_{m-k}(x)},$$

2) якщо $Q_m(x)=\left(x^2+px+q\right)^k\cdot g_{m-2k}(x)$, то $\dfrac{R_p(x)}{\left(x^2+px+q\right)^k\cdot g_{m-k}(x)}=$

$$=\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+px+q\right)^2}+\ldots+\frac{M_kx+N_k}{\left(x^2+px+q\right)^k}+\frac{r(x)}{g_{m-2k}(x)},$$

3) якщо $Q_m(x)=a_0(x-a)(x-b)^k(x^2+px+q)\left(x^2+px+q\right)^l$, то

$$\frac{R_p(x)}{Q_m(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{B_1}{x-b}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\ldots+\frac{B_k}{(x-b)^k}+\frac{C_1x+D_1}{x^2+px+q}+$$

$$+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+px+q\right)^2}+\ldots+\frac{M_lx+N_l}{\left(x^2+px+q\right)^l},\qquad(2)$$

де $A_i, B_i, C_i, D_i, M_i, N_i$, $i=\overline{1,k}$ - невідомі коефіцієнти, $\dfrac{r(x)}{g_{m-k}(x)}$, $\dfrac{r(x)}{g_{m-2k}(x)}$ – правильні раціональні дроби.

Приклад 1. Розкласти правильний раціональний дріб $\dfrac{R_p(x)}{(x+1)(x+2)^2x^3\left(x^2-x+2\right)\left(x^2+1\right)^2}$ в суму елементарних дробів.

Розв'язання. За теоремою 2 дістаємо:

$$\frac{R_p(x)}{(x+1)(x+2)^2x^3\left(x^2-x+2\right)\left(x^2+1\right)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B_1}{x+2}+\frac{B_2}{(x+2)^2}+$$

$$+\frac{C_1}{x}+\frac{C_2}{x^2}+\frac{C_3}{x^3}+\frac{Dx+E}{x^2-x+2}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+1}+\frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+1\right)^2}$$

Для знаходження невідомих коефіцієнтів у розкладі (2) можна скористатись *методом невизначених коефіцієнтів*, суть якого така. Помноживши обидві частини рівності (2) на $Q_m(x)$, дістанемо два тотожно рівні многочлени: зліва – відомий многочлен $R_p(x)$, а справа – многочлен з невідомими коефіцієнтами. Прирівнюючи їх коефіцієнти при однакових степенях x, дістанемо систему лінійних рівнянь, з якої визначимо невідомі коефіцієнти.

Крім вказаного методу, застосовують ще *метод окремих значень аргументу*, за яким, після отримання двох тотожно рівних многочленів, надають змінній конкретних значень стільки разів, скільки невідомих коефіцієнтів (доцільно розглядати значення дійсних коренів знаменника $Q_m(x)$) і дістають систему лінійних рівнянь, з якої визначають невідомі коефіцієнти. Іноді користуються *комбінованим методом*, який поєднує обидва метода.

2. Інтегрування елементарних раціональних дробів.

Розглянемо основні етапи інтегрування довільних раціональних функцій. З рівності (1) випливає, що інтеграл від неправильного раціонального дробу зводиться до суми двох інтегралів:

$$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx = \int W_r(x)dx + \int \frac{R_p(x)}{Q_m(x)}dx.$$

Інтеграл від многочлена знаходять як суму табличних інтегралів, а інтеграл від правильного дробу за допомогою формули (2) зводять до інтегралів від елементарних дробів, які інтегруються так:

I. $\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a| + C$;

II. $\int \frac{Adx}{(x-a)^k} = A\int (x-a)^{-k}d(x-a) = \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C$;

III. $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$ обчислюється підстановкою $x = t - \frac{p}{2}$;

IV. $\int \frac{(Mx+N)dx}{(x^2+px+q)^k}$ підстановкою $x = t - \frac{p}{2}$ зводиться до суми двох інтегралів, один з яких обчислюється безпосередньо, а інший – за допомогою рекурентної формули.

Зазначимо, що інтеграл $\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}dx$ обчислюється підстановкою $x = t - \frac{b}{2a}$, оскільки $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$.

Приклад 2. Знайти інтеграл $\int \frac{x+2}{x^3 - 2x^2}dx$.

<u>*Розв'язання.*</u> Розкладемо підінтегральну функцію на елементарні дроби, дістанемо:

$$\frac{x+2}{x^3-2x^2} \frac{x+2}{x^2(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-2} =$$

$$= \frac{Ax(x-2) + B(x-2) + Cx^2}{x^2(x-2)} \Rightarrow x + 2 = x^2(A+C) + x(B-2A) - 2B,$$

$$\begin{array}{l|l} x^2 & 0 = A + C \\ x^1 & 1 = B - 2A \\ x^0 & 2 = -2B \end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{l}0\\1\\2\end{array}}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} B = -1 \\ A = -1 \\ C = 1 \end{cases} \qquad \frac{x+2}{x^3-2x^2} = \frac{-1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x-2}, \text{ тоді}$$

$$\int \frac{x+2}{x^3-2x^2}dx = \int\left(-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x-2}\right)dx = -\ln|x| + \frac{1}{x} + \ln|x-2| + C.$$

Приклад 3. Обчислити інтеграл $\int \frac{dx}{x^3+x}$.

Розв'язання. Оскільки під знаком інтеграла маємо правильний дріб, то його можна розкласти на елементарні дроби.

$$\frac{1}{x^3+x} = \frac{1}{x\left(x^2+1\right)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+c}{x^2+1} = \frac{A\left(x^2+1\right)+\left(Bx+c\right)x}{x\left(x^2+1\right)} = \frac{\left(A+B\right)x^2+Cx+A}{x^3+x},$$

$$1 = (A+B)x^2 + Cx + A.$$

Скористаємось комбінованим методом знаходження невідомих коефіцієнтів A, B, C. Якщо $x=0$, то $1=(A+B)\cdot 0^2 + C\cdot 0 + A$, звідки $A=1$. Оскільки $0\cdot x^2 + 0\cdot x + 1 = (A+B)\cdot x^2 + C\cdot x + A$, то маємо $A+B=0$ і $C=0$, звідки $B=-1$ і $C=0$.

Підставивши знайдені коефіцієнти в розклад, дістанемо :

$$\int \frac{dx}{x^3+x} = \int\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right)dx = \int\frac{dx}{x} - \int\frac{xdx}{x^2+1} = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + C.$$

Приклад 4. Знайти інтеграл $\int \frac{3x-1}{4x^2-4x+17}dx$

Розв'язання. Виділивши повний квадрат у знаменнику дробу і зробивши заміну, дістанемо суму двох табличних інтегралів:

$$\int \frac{3x-1}{4x^2-4x+17}dx = \int \frac{3x-1}{4\left(x^2-x+\frac{17}{4}\right)}dx = \frac{1}{4}\int \frac{(3x-1)dx}{x^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{17}{4}}$$

$$\frac{1}{4}\int\frac{(3x-1)dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+4} = \left|\begin{array}{l} x-\frac{1}{2}=t; dx=dt \\ x=t+\frac{1}{2}; \end{array}\right| = \frac{1}{4}\int\frac{3t+\frac{3}{2}-1}{t^2+4}dt = \frac{3}{4}\int\frac{tdt}{t^2+4} + \frac{1}{8}\int\frac{dt}{t^2+4} =$$

$$= \frac{3}{8}\ln\left(t^2+4\right) + \frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + C = \frac{3}{8}\ln\left(x^2-x+\frac{17}{4}\right) + \frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{1}{2}}{2} + C =$$

$$= \frac{3}{8}\ln\left(4x^2-4x+17\right) + \frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{4} + C.$$

3. Алгоритм інтегрування раціональних функцій.

1. Якщо підінтегральна функція — неправильний раціональний дріб, то за допомогою ділення його подають у вигляді суми многочлена та правильного раціонального дробу.

2. Знаменник правильного раціонального дробу розкладають на множники. За виглядом знаменника правильний раціональний дріб записують у вигляді суми елементарних дробів, використовуючи метод невизначених коефіцієнтів.

3. Інтегрують многочлен та елементарні дроби.

Приклад 5. Знайти інтеграл $\int \frac{x^4+2x}{x^3+8}dx$.

Розв'язання. Оскільки підінтегральна функція є неправильним раціональним дробом, то ділимо многочлен в чисельнику на многочлен в знаменнику. Дістаємо $\frac{x^4+2x}{x^3+8} = x - \frac{6x}{x^3+8}$. Розкладемо одержаний правильний дріб на елементарні дроби і визначимо невідомі коефіцієнти комбінованим методом:

$$\frac{6x}{x^3+8} = \frac{6x}{(x+2)(x^2-2x+4)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+4} =$$

$$= \frac{A(x^2-2x+4)+(Bx+C)(x+2)}{x^3+8} \quad \Rightarrow \quad 6x = A(x^2-2x+4)+(Bx+C)(x+2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 6x = x^2(A+B) + x(-2A+2B+C) + 4A + 2C,$$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l|l} x^2 & 0 = A+B \\ x^1 & 6 = -2A+2B+C \\ x^0 & 0 = 4A+2C \end{array}\right\} \\ x = -2 \Rightarrow -12 = 12A \end{array}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad A=-1, \quad B=1, \quad C=2.$$

Тоді заданий інтеграл дорівнює:

$$\int \frac{x^4+2x}{x^3+8}dx = \int\left(x - \frac{6x}{x^3+8}\right)dx = \int\left(x + \frac{1}{x+2} - \frac{x+2}{x^2-2x+4}\right)dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \ln|x+2| - \int\frac{(x+2)dx}{(x-1)^2+3} = \left|\begin{array}{l} x-1=t \\ dx=dt \\ x=t+1 \end{array}\right| = \frac{x^2}{2} + \ln|x+2| - \int\frac{t+3}{t^2+3}dt =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \ln|x+2| - \int\frac{tdt}{t^2+3} - 3\int\frac{dt}{t^2+3} = \frac{x^2}{2} + \ln|x+2| - \frac{1}{2}\ln(t^2+3) -$$

$$- \frac{3}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} + C = \frac{x^2}{2} + \ln|x+2| - \ln\sqrt{x^2-2x+4} - \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}} + C.$$