Практичне заняття №13-14.

<u>Тема:</u> Інтегрування раціональних функцій

<u>Мета:</u> Навчитись інтегрувати вирази, які містять раціональні функції.

Короткі теоретичні відомості

Відношення двох многочленів $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, де $P_n(x)$, $Q_m(x)$ не тотожні нулі, називається *раціональною функцією* або *раціональним дробом*. Раціональний дріб називається *правильним*, якщо $m < n$; і *неправильним* при $m \ge n$.

Теорема 1. Будь-який неправильний раціональний дріб можна подати у вигляді суми многочлена (цілої частини) та правильного раціонального дробу

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = W_r(x) + \frac{R_p(x)}{Q_m(x)}, \quad \text{де } p < m. \tag{1}$$

Елементарними раціональними дробами називають такі дроби:

1) $\dfrac{A}{x-a}$, 2) $\dfrac{A}{(x-a)^k}$, 3) $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$, 4) $\dfrac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^k}$,

де A, a, M, N, p, q – дійсні числа, $p^2 - 4q < 0$, $k \ge 2$.

Теорема 2. Будь-який правильний раціональний дріб $\dfrac{R_p(x)}{Q_m(x)}$ можна подати у вигляді скінченної суми елементарних дробів, а саме:

1) якщо $Q_m(x) = (x-a)^k \cdot g_{m-k}(x)$, то

$$\frac{R_p(x)}{(x-a)^k g_{m-k}(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{r(x)}{g_{m-k}(x)},$$

2) якщо $Q_m(x) = \left(x^2+px+q\right)^k \cdot g_{m-2k}(x)$, то $\dfrac{R_p(x)}{\left(x^2+px+q\right)^k \cdot g_{m-k}(x)} =$

$$= \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+px+q\right)^2} + \ldots + \frac{M_kx+N_k}{\left(x^2+px+q\right)^k} + \frac{r(x)}{g_{m-2k}(x)},$$

3) якщо $Q_m(x) = a_0(x-a)(x-b)^k(x^2+px+q)\left(x^2+px+q\right)^l$, то

$$\frac{R_p(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \ldots + \frac{B_k}{(x-b)^k} + \frac{C_1x+D_1}{x^2+px+q} +$$

$$+ \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+px+q\right)^2} + \ldots + \frac{M_lx+N_l}{\left(x^2+px+q\right)^l}, \tag{2}$$

де $A_i, B_i, C_i, D_i, M_i, N_i$, $i = \overline{1,k}$ - невідомі коефіцієнти, $\frac{r(x)}{g_{m-k}(x)}$, $\frac{r(x)}{g_{m-2k}(x)}$ – правильні раціональні дроби.

Розглянемо основні етапи інтегрування довільних раціональних функцій. З рівності (1) випливає, що інтеграл від неправильного раціонального дробу зводиться до суми двох інтегралів:

$$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx = \int W_r(x)dx + \int \frac{R_p(x)}{Q_m(x)}dx.$$

Інтеграл від многочлена знаходять як суму табличних інтегралів, а інтеграл від правильного дробу за допомогою формули (2) зводять до інтегралів від елементарних дробів, які інтегруються так:

I. $\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a| + C$;

II. $\int \frac{Adx}{(x-a)^k} = A\int (x-a)^{-k} d(x-a) = \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C$;

III. $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$ обчислюється підстановкою $x = t - \frac{p}{2}$;

IV. $\int \frac{(Mx+N)dx}{(x^2+px+q)^k}$ підстановкою $x = t - \frac{p}{2}$ зводиться до суми двох інтегралів, один з яких обчислюється безпосередньо, а інший – за допомогою рекурентної формули.

Зазначимо, що інтеграл $\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}dx$ обчислюється підстановкою $x = t - \frac{b}{2a}$, оскільки $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$.

Зразки розв'язування вправ

1. Знайти інтеграл $\int \frac{xdx}{(x-1)(x+2)(x-4)}$.

<u>*Розв’язання.*</u> Розкладемо підінтегральну функцію на елементарні дроби і проінтегруємо їх:

$$\int \frac{xdx}{(x-1)(x+2)(x-4)} = \left| \begin{array}{l} \dfrac{x}{(x-1)(x+2)(x-4)} = \dfrac{A}{x-1} + \\ + \dfrac{B}{x+2} + \dfrac{C}{x-4} \Rightarrow x = A(x+2)(x-4) + \\ + B(x-1)(x-4) + C(x-1)(x+2); \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{ll} x=1 & 1=-9A \Rightarrow A=-\dfrac{1}{9}; \\ x=2 & -2=18B \Rightarrow B=-\dfrac{1}{9}; \\ x=4 & 4=18C \Rightarrow C=\dfrac{2}{9}. \end{array} \right| = -\frac{1}{9}\int\frac{dx}{x-1} - \frac{1}{9}\int\frac{dx}{x+2} + \frac{2}{9}\int\frac{dx}{x+4} =$$

$$= -\frac{1}{9}\ln\frac{(x-1)(x+2)}{(x+4)} + C.$$

2. Обчислити інтеграл $\int \frac{x}{x^4-16}dx$.

<u>*Розв’язання.*</u> Розкладемо підінтегральну функцію на елементарні дроби:

$$\frac{x}{x^4-16} = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{x+2} + \frac{Mx+N}{x^2+4}.$$

Зведемо дроби до спільного знаменника і прирівняємо чисельники першого і останнього дробів, дістанемо:

$$x = A_1(x+2)(x^2+4) + A_2(x-2)(x^2+4) + (Mx+N)(x^2-4).$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x. Тоді

$$\begin{array}{ll} x^3: & A_1 + A_2 + M = 0, \\ x^2: & 2A_1 - 2A_2 + N = 0, \\ x\ : & 4A_1 + 4A_2 - 4M = 1, \\ x^0: & 8A_1 - 8A_2 - 4N = 0. \end{array}$$

Розв’язавши цю систему, знаходимо невідомі коефіцієнти. Але визначити невідомі коефіцієнти простіше комбінованим методом.

У рівності $x = A_1(x+2)(x^2+4) + A_2(x-2)(x^2+4) + (Mx+N)(x^2-4)$ вибираємо такі значення x, при яких деякі множники перетворюються в нулі. Так, при $x=2$ маємо $2 = A_1(2+2)(4+4)$, звідки $A_1 = 1/16$. При $x=-2$: $-2 = A_1(-2-2)(4+4)$, звідки $A_2 = 1/16$. Тоді із системи знаходимо $M = -1/8, \quad N = 0.$ Отже,

$$\frac{x}{x^4-16} = \frac{1/16}{x-2} + \frac{1/16}{x+2} + \frac{-x/8}{x^2+4}.$$

Проінтегруємо одержані елементарні дроби:

$$\int \frac{x}{x^4-16}dx = \frac{1}{16}\int\frac{dx}{x-2}+\frac{1}{16}\int\frac{dx}{x+2}-\frac{1}{8}\int\frac{xdx}{x^2+4} = \frac{1}{16}\int\frac{d(x-2)}{x-2}+\frac{1}{16}\int\frac{d(x+2)}{x+2}-$$

$$-\int\frac{d(x^2+4)}{x^2+4} = \frac{1}{16}\ln|x-2|+\frac{1}{16}\ln|x+2|-\frac{1}{16}\ln|x^2+4|+C = \frac{1}{16}\ln\frac{|x^2-4|}{x^2+4}+C.$$

3. Знайти інтеграл $\int\frac{5x-3}{x^2-8x+17}dx.$

<u>Розв'язання</u>. Виділимо повний квадрат, зробимо заміну змінної і зведемо інтеграл до двох табличних інтегралів:

$$\int\frac{5x-3}{x^2-8x+17}dx = \int\frac{(5x-3)dx}{x^2-2\cdot x\cdot 4+16-16+17} = \int\frac{(5x-3)dx}{(x-4)^2+1} = \left|\begin{array}{l} x-4=t \\ x=t+4 \\ dx=dt \end{array}\right| =$$

$$= \int\frac{5t+20-3}{t^2+1}dt = 5\int\frac{tdt}{t^2+1}+17\int\frac{dt}{t^2+1} = \frac{5}{2}\ln\left(t^2+1\right)+17\,\mathrm{arctg}\,t+C =$$

$$= \frac{5}{2}\ln\left(x^2-8x+17\right)+17\,\mathrm{arctg}(x-4)+C.$$

4. Знайти інтеграл $\int\frac{x^2+1}{(x+1)^2\left(x^2+x+1\right)}dx.$

<u>Розв'язання.</u> Розкладемо підінтегральну функцію на елементарні дроби:

$$\left|\;\frac{x^2+1}{(x+1)^2\left(x^2+x+1\right)} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}\right.$$

$$x^2+1 == A(x+1)\left(x^2+x+1\right)+B\left(x^2+x+1\right)+(Cx+D)(x+1)^2\Big|.$$

Для визначення невідомих коефіцієнтів в розкладі застосуємо комбінований метод. Коефіцієнт B знайдемо підстановкою значення кореня $x=-1$ в рівність $x^2+1 == A(x+1)\left(x^2+x+1\right)+B\left(x^2+x+1\right)+(Cx+D)(x+1)^2$. Маємо $1+1=B(1-1+1)$, тобто $B=2$. Коефіцієнти A, C, D знайдемо методом невизначених коефіцієнтів:

$$\begin{array}{l|l} x^3 & 0=A+C; \\ x^2 & 1=2A+B+D+2C; \\ x^1 & 1=A+B+D. \end{array} \Rightarrow \begin{cases} A=-C \\ D=-1 \\ A=0 \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} B=2, \\ C=0, \\ A=0, \\ D=-1. \end{array}\right|$$

Тоді

$$\int\frac{x^2+1}{(x+1)^2\left(x^2+x+1\right)}dx = \int\frac{2}{(x+1)^2}dx-\int\frac{dx}{x^2+x+1} = -\frac{2}{x+1}-\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} =$$

$$=-\frac{2}{x+1}-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

Завдання для самостійної роботи

№ 1. Обчислити інтеграли:

1) $\int\frac{2x+7}{x^2+x-2}dx$; 2) $\int\frac{x^2+2}{x^2-1}dx$;

3) $\int\frac{x^2+1}{x(x+1)(x-1)}dx$; 4) $\int\frac{x^2-x+4}{(x+1)(x-2)(x-3)}dx$;

5) $\int\frac{x^3+2}{x^3-4x}dx$; 6) $\int\frac{2x^2-1}{x^3-5x^2+6x}dx$.

(*Відповідь*: 1) $\ln\left|\frac{(x-1)^3}{x+2}\right|+C$; 2) $x+\frac{3}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$;

3) $\ln\frac{x^2-1}{x}+C$; 4) $\ln\frac{\sqrt{(x+1)(x-3)^5}}{(x-2)^2}+C$;

5) $x-\frac{1}{2}\ln|x|-\frac{3}{4}\ln|x+2|+\frac{5}{4}\ln|x-2|+C$; 6) $-\frac{1}{6}\ln|x|-\frac{7}{2}\ln|x-2|+\frac{17}{3}\ln|x-3|+C$.)

№ 2. Обчислити інтеграли:

1) $\int\frac{x+2}{x^2(x-2)}dx$; 2) $\int\frac{3x^2+2x-1}{(x+2)(x-1)^2}dx$;

3) $\int\frac{2x^2-5x+1}{x^3-2x^2+x}dx$; 4) $\int\frac{5x-1}{x^3-3x-2}dx$;

5) $\int\frac{(x^3+1)dx}{x^3-x^2}$; 6) $\int\frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2(x+1)^2}dx$.

(*Відповідь*: 1) $\frac{1}{x}+\ln\left|\frac{x-2}{x}\right|+C$;

2) $-\frac{4}{3(x-1)}+\frac{20}{9}\ln|x-1|+\frac{7}{9}\ln|x+2|+C$;

3) $\frac{2}{x-1}+\ln x(x-1)+C$; 4) $\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|-\frac{2}{x+1}+C$;

5) $x+\frac{1}{x}+\ln\frac{(x-1)^2}{|x|}+C$; 6) $-\frac{9}{2(x-3)}-\frac{1}{2(x+1)}+C$.)

№ 3. Обчислити інтеграли:

1) $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x)}$;   2) $\int \frac{dx}{x^3+8}$;

3) $\int \frac{xdx}{x^3-1}$;   4) $\int \frac{3x^2+x+3}{(x-1)^3(x^2+1)}dx$;

5) $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}dx$;   6) $\int \frac{(3x+5)dx}{(x^2+2x+2)^2}$.

(*Відповідь*: 1) $\frac{1}{4}\ln\frac{x^4}{(x+1)^2(x^2+1)}-\frac{1}{2}arctgx+C$;

2) $\frac{1}{24}\ln\frac{(x+2)^2}{x^2-2x+4}+\frac{\sqrt{3}}{12}arctg\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C$;   3) $\frac{1}{3}\ln\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+x+1}}+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$;

4) $\frac{1}{4}\left(\ln\frac{\sqrt{x^2+1}}{|x-1|}+arctgx-\frac{7}{(x-1)^2}\right)+C$;

5) $\frac{2-x}{4(x^2+2)}+\frac{1}{2}\ln(x^2+2)-\frac{1}{4\sqrt{2}}arctg\frac{x}{\sqrt{2}}+C$;   6) $\frac{2x-1}{2(x^2+2x+2)}+\mathrm{arc}tg(x+1)+C$.)