Практичне заняття №15-16.

<u>Тема:</u> Інтегрування тригонометричних та ірраціональних функцій.

<u>Мета:</u> Навчитись інтегрувати вирази, які містять тригонометричні та ірраціональні вирази.

Короткі теоретичні відомості

Розглянемо підстановки, які використовують для обчислення інтегралів вигляду $\int R(\sin x, \cos x)dx$, де R – деяка раціональна функція від функцій $\sin x$ і $\cos x$

I. *Універсальна тригонометрична підстановка* $t = tg\frac{x}{2}$.

Використовуючи тригонометричні формули, маємо: $\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $x = 2arctgt$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

Отже, $\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt = \int R_1(t)dt$, де R_1 – раціональна функція від t.

У багатьох випадках доцільно застосовувати інші підстановки. Наведемо деякі з них.

II. Якщо підінтегральна функція $R(\sin x, \cos x)$ непарна відносно $\sin x$, то роблять підстановку $t = \cos x$.

III. Якщо підінтегральна функція непарна відносно $\cos x$, використовують підстановку $t = \sin x$.

IV. Якщо підінтегральна функція — парна відносно $\sin x$ і $\cos x$, тобто $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то в цьому випадку застосовують підстановку $t = tgx$. Зокрема, для обчислення інтеграла $\int R(tgx)dx$ теж роблять підстановку $t = tgx$.

Зауважимо, що в інтегралах $\int \sin^{2n} x \cdot \cos^{2m} xdx$ доцільно скористатись формулами пониження степеня:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \quad \sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}.$$

V. При інтегруванні інтегралів $\int \sin ax \cdot \cos bxdx$, $\int \cos ax \cdot \cos bxdx$, $\int \sin ax \cdot \sin bxdx$ треба скористатися тригонометричними формулами:

$$\sin ax \cdot \cos bx = \frac{1}{2}(\sin(a+b)x + \sin(a-b)x),$$

$$\cos ax\cos bx = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b)x + \cos(a-b)x\right),$$

$$\sin ax \cdot \sin bx = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b)x - \cos(a+b)x\right).$$

Розглянемо підстановки для інтегрування деяких типів ірраціональних функцій.

I. Інтеграли виду $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ за допомогою підстановки $x+\frac{b}{2a}=t$ можна звести до табличних інтегралів (виділивши повний квадрат в підкореневому виразі).

II. Інтеграл вигляду $\int R\left(x, \sqrt[n]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^m}\right)dx$ обчислюють за допомогою підстановки $\frac{ax+b}{cx+d}=t^n$. Зокрема, інтеграл вигляду $\int R\left(x, \sqrt[n]{(ax+b)^m}\right)dx$ підстановкою $ax+b=t^n$ зводять до інтеграла $\int R\left(\frac{t^n-b}{a}, t^m\right)\frac{nt^{n-1}dt}{a} = \int R_1(t)dt.$

III. Інтеграл вигляду $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}}\right)dx$ обчислюють за допомогою підстановки $\frac{ax+b}{cx+d}=t^s$, де s – найменше спільне кратне чисел $n_1, n_2 \ldots, n_k$. Зокрема, для обчислення інтеграла $\int R\left(x,\ x^{\frac{m_1}{n_1}}, x^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots, x^{\frac{m_k}{n_k}}\right)dx$ використовують підстановку $x=t^s$, де $s = НСК(n_1, n_2 \ldots, n_k)$.

Зразки розв'язування вправ

1. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{\sin x + 1}$.

<u>*Розв’язання.*</u> Застосуємо універсальну тригонометричну підстановку:

$$\int\frac{dx}{\sin x+1}=\left|\begin{array}{l} t=tg\,\dfrac{x}{2}\\ \sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}\\ dx=\dfrac{2dt}{1+t^2}\end{array}\right|=\int\frac{2dt}{\left(1+t^2\right)\left(\dfrac{2t}{1+t^2}+1\right)}=2\int\frac{dt}{(t+1)^2}=$$

$$=-\frac{2}{t+1}+C=C-\frac{2}{1+tg\,\dfrac{x}{2}}.$$

2. $$\int\frac{dx}{\sin x}=\left|\begin{array}{l}\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}=t,\,x=2\,\mathrm{arctg}t,\\ dx=\dfrac{2dt}{1+t^2};\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}\end{array}\right|=\int\frac{\left(1+t^2\right)2dt}{2t\left(1+t^2\right)}=$$

$$=\int\frac{dt}{t}=\ln|\,t\,|+C=\ln\left|\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

3. $$\int\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{\sin^3 x\cdot\sin x}{\cos^2 x\cdot\sin x}dx=\int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\sin x dx=$$

$$=\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\sin x dx=\left|\begin{array}{l}\cos x=t\\ \sin x dx=-dt\end{array}\right|=\int\frac{1-t^2}{t^2}(-dt)=$$

$$=\int\left(1-\frac{1}{t^2}\right)dt=t+\frac{1}{t}+C=\cos x+\frac{1}{\cos x}+C.$$

4. $$\int\cos^3 x\sin^2 x dx=\int\cos^3 x\sin^2 x\frac{\cos x}{\cos x}dx=$$

$$=\int\cos^2 x\cdot\sin^2 x\cdot\cos x dx=\int\left(1-\sin^2 x\right)\sin^2 x\cos x dx=\left|\begin{array}{l}\sin x=t\\ dt=\cos x dx\end{array}\right|=$$

$$=\int\left(1-t^2\right)t^2dt=\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}+C=\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{1}{5}\sin^5 x+C.$$

5. $$\int\frac{dx}{\sin^4 x\cos^2 x}=\left|\begin{array}{l}\mathrm{tg}x=t,\ \ x=\mathrm{arctg}t,\ \ dx=\dfrac{dt}{1+t^2};\\ \sin^2 x=\dfrac{\mathrm{tg}^2x}{1+\mathrm{tg}^2x}=\dfrac{t^2}{1+t^2};\\ \cos^2 x=\dfrac{1}{1+\mathrm{tg}^2x}=\dfrac{1}{1+t^2}\end{array}\right|=$$

$$=\int\frac{\left(1+t^2\right)^2\left(1+t^2\right)dt}{t^4\left(1+t^2\right)}=\int\frac{1+2t^2+t^4}{t^4}dt=\int\left(\frac{1}{t^4}+\frac{2}{t^2}+1\right)dt=$$

$$=\frac{1}{3t^3}-\frac{2}{t}+t+C=\mathrm{tg}x-\frac{1}{3\mathrm{tg}^3x}-2\mathrm{ctg}x+C.$$

6. $$\int\mathrm{tg}^3 x dx=\left|\begin{array}{l}\mathrm{tg}x=t\\ x=\mathrm{arctg}t\\ dx=\dfrac{dt}{1+t^2}\end{array}\right|=\int\frac{t^3dt}{t^2+1}=\left|\begin{array}{l|l} t^3 & t^2+1\\ \cline{2-2} - & t\\ \underline{t^3+t} & \\ -t & \end{array}\right|=$$

$$=\int\left(t-\frac{t}{t^2+1}\right)dt=\frac{t^2}{2}-\frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right)+C=\frac{1}{2}\mathrm{tg}^2x-\ln\sqrt{\mathrm{tg}^2x+1}+C.$$

7. $\int\sin^2 x\cos^2 x dx=\frac{1}{4}\int\sin^2 2x\,dx=\frac{1}{4}\int\frac{1-\cos4x}{2}dx=\frac{1}{8}\left(x-\frac{1}{4}\sin 4x\right)+C$.

8. $\int\cos2x\cdot\sin 5x\cdot dx=\frac{1}{2}\int(\sin 7x+\sin 3x)dx=-\frac{1}{14}\cos7x-\frac{1}{6}\cos3x+C$.

9. Обчислити інтеграл $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}$..

<u>*Розв'язання.*</u> Зробимо підстановку $x=2\sin t$, тоді

$$\sqrt{4-x^2}=\sqrt{4-4\sin^2 t}=2\cos t,\ dx=2\cos tdt.$$

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}=\int\frac{4\sin^2 t\cdot 2\cos tdt}{2\cos t}=4\int\sin^2 tdt=2\int(1-\cos 2t)dt=2\int dt-2\int\cos 2tdt=$$

$$=2t-\sin 2t+C.$$

Із рівності $x=2\sin t$ знаходимо $t=\arcsin\frac{x}{2}$, звідки

$$\sin 2t=2\sin t\cos t=2\frac{x}{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}=\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}.$$

Отже, $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}.=2\arcsin\frac{x}{2}-\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+C.$