Практичне заняття №17-18.

Тема: Обчислення визначених інтегралів.

Мета: Навчитись застосовувати на практиці основні методи і прийоми обчислення визначених інтегралів.

Короткі теоретичні відомості

Означення. Якщо існує скінченна границя інтегральних сум S_n при $\lambda \to 0$, яка не залежить ні від способу розбиття [*a*; *b*] на частини Δx_i, ні від вибору точок ξ_i, то ця границя називається *визначеним інтегралом від функції* $f(x)$ *на проміжку* [*a*; *b*] і позначається:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i, \qquad (1)$$

Основні властивості

I. Сталий множник можна виносити за знак визначеного інтеграла:

$$\int_a^b k \cdot f(x)dx = kc \cdot \int_a^b f(x)dx.$$

II. Якщо $f_1(x)$ та $f_2(x)$ інтегровні на [*a*; *b*], то

$$\int_a^b \left(f_1(x) \pm f_2(x)\right) dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)\, dx.$$

III. Якщо у визначеному інтегралі поміняти місцями межі інтегрування, то інтеграл змінить свій знак на протилежний:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

IV. Визначений інтеграл з однаковими межами інтегрування дорівнює нулю:

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

V. Якщо $f(x)$ – інтегровна на проміжках: [*a*; *b*], [*a*; *c*], [*c*; *b*], то:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Позначивши $F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$, розглянемо формулу Ньютона-Лейбніца, яка встановлює зв'язок між визначеним та невизначеним інтегралами

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \qquad (2)$$

Отже, для обчислення визначеного інтеграла потрібно знайти первісну підінтегральної функції і підставити верхню і нижню межі інтегрування.

Метод заміни змінно.

Якщо $f(x)$ — неперервна на відрізку $[a;b]$, а функція $x=\varphi(t)$ неперервна разом зі своєю похідною $\varphi'(t)$ на $[\alpha;\beta]$, причому $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \left| \begin{array}{c} x=\varphi(t), \\ dx=\varphi'(t)dt; \\ \begin{array}{c|c|c} x & a & b \\ \hline t & \alpha & \beta \end{array} \end{array} \right| = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt. \qquad (3)$$

Метод інтегрування частинами у визначеному інтегралі

Якщо функції $u=u(x)$ і $v=v(x)$ мають неперервні похідні для $x\in[a;\ b]$, то

$$\int\limits_a^b udv = (uv)\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu. \qquad (4)$$

Зразки розв'язування вправ

1. Обчислити інтеграл $\int\limits_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2}dx.$

<u>*Розв'язання.*</u> Розкладемо даний інтеграл на два і скористаємось формулою Ньютона-Лейбніца . Маємо

$$\int\limits_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2}dx = \int\limits_1^4 \frac{dx}{x^2} + \int\limits_1^4 \frac{dx}{x^{3/2}} = \int\limits_1^4 x^{-2}dx + \int\limits_1^4 x^{-3/2}dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^4 - \frac{2}{\sqrt{x}}\Big|_1^4 = -\frac{1}{4}+1-1+2 = \frac{7}{4}.$$

2. Знайти інтеграл: $\int\limits_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx.$

<u>*Розв'язання*</u>. Виконаємо підстановку $\sqrt{x}=t,\quad x=t^2,\quad dx=2tdt.$ Тоді

$$\int\limits_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx = \int\limits_0^2 \frac{2tdt}{1+t} = 2\int\limits_0^2 \frac{t+1-1}{1+t}dt = 2\int\limits_0^2 dt - 2\int\limits_0^2 \frac{dt}{1+t} = 2t\Big|_0^2 - 2\ln|1+t|\Big|_0^2 = 4-2\ln 3.$$

3. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^5 \sqrt{25-x^2}\,dx$.

<u>*Розв'язання.*</u> Застосуємо метод заміни змінної, дістанемо:

$$\int_0^5 \sqrt{25-x^2}\,dx = \left| \begin{array}{l} x = 5\sin t \qquad t \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right), \\ dx = 5\cos t dt, \\ \sqrt{25-(5\sin t)^2} = \\ = \sqrt{25-25\sin^2 t} = \\ = \sqrt{25(1-\sin^2 t)} = \sqrt{25\cos^2 t} = 5|\cos t|, \\ \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 5 \\ \hline t & 0 & \dfrac{\pi}{2} \end{array} \\ \text{Коли } t \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right), \cos t \text{ набуває} \\ \text{додатних значень, тому } |\cos t| = \cos t. \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^{\pi/2} 5\cos t \cdot 5\cos t dt = 25\int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{25}{2}\int_0^{\pi/2} (1+\cos 2t)dt = \frac{25}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{\pi \cdot 25}{4}.$$

4. Обчислити визначений інтеграл: $\int_0^{\ln 2} xe^{-x}dx.$

<u>*Розв'язання*</u>. Застосуємо формулу інтегрування частинами. Одержимо

$$\int_0^{\ln 2} xe^{-x}dx = \left| u = x,\ du = dx,\ dv = e^{-x}dx,\ v = -e^{-x} \right| = -xe^{-x}\Big|_0^{\ln 2} + \int_0^{\ln 2} e^{-x}dx = -\ln 2\, e^{-\ln 2} - e^{-x}\Big|_0^{\ln 2} =$$

$$= -\frac{\ln 2}{2} - e^{-\ln 2} + 1 = \frac{1}{2}(1-\ln 2).$$

5. Обчислити інтеграл $\int_0^1 x \operatorname{arctg} x dx$.

<u>*Розв'язання.*</u> Використаємо метод інтегрування частинами:

$$\int_0^1 x \operatorname{arctg} x dx = \left| \begin{array}{ll} u = \operatorname{arctg} x & du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = xdx & v = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx =$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}x\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

6. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$.

<u>*Розв'язання.*</u> Застосуємо універсальну тригонометричну підстановку:

$$\int\limits_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+\sin x+\cos x}=\left|\begin{array}{lll} \mathrm{tg}\frac{x}{2}=t & \sin x=\frac{2t}{1+t^2} & \begin{array}{c|c} x & t \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \frac{\pi}{2} & 1 \end{array} \\ dx=\frac{2dt}{1+t^2} & \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2} & \end{array}\right|=$$

$$=\int\limits_0^1\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int\limits_0^1\frac{dt}{t+1}=\ln|t+1|\Big|_0^1=\ln 2.$$

7. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

<u>*Розв'язання*</u>. Застосуємо спочатку метод заміни змінної, а потім – метод інтегрування частинами, дістанемо:

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\left|\begin{array}{l} \arcsin x=t, \\ x=\sin t, \\ dx=\cos t dt, \\ \begin{array}{c|c|c} x & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline t & 0 & \frac{\pi}{6} \end{array} \end{array}\right|=\int\limits_0^{\pi/6}\frac{\sin t\cdot t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}\cdot\cos t dt=\int\limits_0^{\pi/6}t\sin t dt=$$

$$=\left\|\begin{array}{c} \text{За формулою} \\ \text{інтегрування частинами} \\ \int\limits_a^b u dv=uv\Big|_a^b-\int\limits_a^b v du. \end{array}\right\|=\left|\begin{array}{l} u=t, \\ \sin t dt=dv, \\ v=\int\sin t dt=-\cos t, \\ du=dt. \end{array}\right|=$$

$$=-t\cos t\Big|_0^{\pi/6}+\int\limits_0^{\pi/6}\cos t dt=-\frac{\pi}{6}\cdot\cos\frac{\pi}{6}+\sin t\Big|_0^{\pi/6}=$$

$$=-\frac{\pi}{6}\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(\sin\frac{\pi}{6}-\sin 0\right)=\frac{1}{2}-\frac{\pi\sqrt{3}}{12}=\frac{6-\pi\sqrt{3}}{12}.$$

Завдання для самостійної роботи

№ 1. Обчислити інтеграли:

1) $\int_1^2\left(x^2+\frac{1}{x^4}\right)dx$; 2) $\int_2^3(1+2x+3x^2)dx$; 3) $\int_0^3 e^{\frac{x}{3}}dx$;

4) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 4x dx$; 5) $\int_1^e\frac{1+\ln x}{x}dx$; 6) $\int_0^1\frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$.

(Відповідь: 1) $2\frac{5}{8}$; 2) 25; 3) $3(e-1)$; 4) 0,5;

5) $\frac{3}{2}$; 6) $arctge-\frac{\pi}{4}$.)

№ 2. Знайти інтеграли:

1) $\int_1^2\frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$; 2) $\int_1^5\frac{dx}{x+\sqrt{2x-1}}$; 3) $\int_{-1}^0\frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$;

4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{3+2\cos x}$; 5) $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}dx$; 6) $\int_0^3 x^2\sqrt{9-x^2}dx$.

(*Відповідь*: 1) $\frac{1}{6}$; 2) $2\left(\ln 2-\frac{1}{4}\right)$; 3) $3\ln 2-\frac{3}{2}$;

4) $\frac{2}{\sqrt{5}}arctg\frac{1}{\sqrt{5}}$; 5) $\sqrt{2}-\frac{2}{\sqrt{3}}+\ln\frac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}$; 6) $\frac{81\pi}{16}$.)

№ 3. Обчислити інтеграли:

1) $\int_e^{e^2}x^2\ln x dx$; 2) $\int_0^1 xe^{3x}dx$; 3) $\int_0^{\pi}x\sin\frac{x}{2}dx$;

4) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{xdx}{\cos^2 x}dx$; 5) $\int_1^{\sqrt{3}}arctgxdx$; 6) $\int_0^1 x\arcsin x dx$.

(*Відповідь*: 1) $\frac{e^3}{9}(5e^3-2)$; 2) $\frac{2e^3+1}{9}$; 3) 4;

4) $\frac{1}{18}(5\pi\sqrt{3}-9\ln 3)$; 5) $\frac{\pi}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{2}\right)+\frac{\ln 2}{2}$; 6) $\frac{\pi}{8}$.)