

Практичне заняття №19-20.

Тема: Обчислення невластних інтегралів. Застосування визначеного інтеграла.

Мета: Навчитись обчислювати невластні інтеграли та застосовувати визначені інтеграли до задач геометрії.

Короткі теоретичні відомості

Означення. Невласним інтегралом I роду (з нескінченною верхньою межею) від функції $f(x)$ називається границя від інтеграла $\int_a^b f(x)dx$ при

$$b \rightarrow +\infty \text{ і позначається так: } \int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx. \quad (1)$$

Означення. Невласним інтегралом II роду (від необмеженої функції $f(x)$). називається $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$ і позначається

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx \quad (2)$$

Розглянемо геометричні застосування визначеного інтеграла.

I. Обчислення площі плоскої фігури.

1. Фігура обмежена лініями $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$ (рис.1). Функція $f(x)$ — неперервна та $f(x) \geq 0$. Площа S такої криволінійної трапеції за геометричним змістом визначеного інтеграла така:

$$S = \int_a^b f(x)dx. \quad (3)$$

Якщо ж $f(x) \leq 0$ (рис. 2), то площу фігури обчислюють так:

$$S = \left| \int_a^b f(x)dx \right|.$$

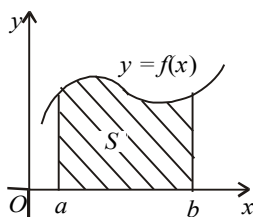


Рис. 1

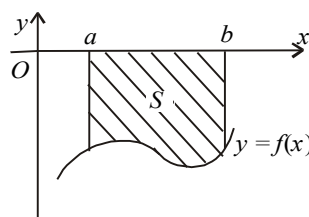


Рис. 2

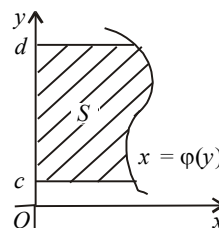


Рис. 3

2. Фігура обмежена лініями $x = \varphi(y)$, $x = 0$, $y = c$, $y = d$ (рис. 3). Функція $x = \varphi(y)$ — неперервна та $\varphi(y) \geq 0$. Площа S такої фігури $S = \int_c^d \varphi(y) dy$.

Якщо $\varphi(y) \leq 0$ (рис.4), то
$$S = \left| \int_c^d \varphi(y) dy \right|.$$

3. Фігура обмежена лініями $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$, $x = b$. Функції $f(x)$ та $g(x)$ — неперервні та $f(x) \geq g(x)$ для $x \in [a; b]$ (рис. 5). Площа S такої фігури визначається як різниця площ фігур aA_2B_1b та aA_1B_1b , тобто

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx. \quad (4)$$

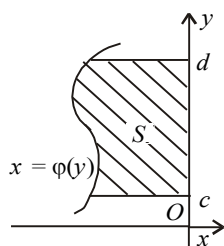


Рис. 4

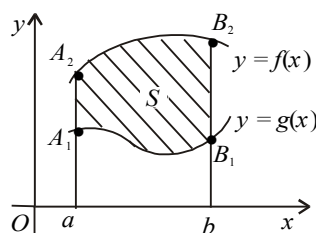


Рис. 5

Якщо фігура обмежена параметрично заданою кривою

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta, \end{cases}$$

прямими $x = a$, $x = b$ і віссю Ox , то її площа обчислюється за формулою

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} y(t) x'(t) dt, \quad (5)$$

де $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$ і $y(t) \geq 0$ на відрізку $[a; b]$.

II. Обчислення об'єму тіла.

Об'єм тіла V_x , утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $y = f(x) \geq 0$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$ (рис. 8), обчислюють за формулою:

$$V_x = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx \quad (6)$$

Аналогічно об'єм тіла V_y , утвореного обертанням навколо осі Oy фігури, обмеженої лініями $x = 0$, $x = \varphi(y) \geq 0$, $y = c$, $y = d$, знаходять так

$$V_y = \pi \int_c^d (\varphi(y))^2 dy \quad (7)$$

Зразки розв'язування вправ

1. Дослідити на збіжність невластні інтеграли:

а) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$; б) $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{4+x^2}$; в) $\int_{-\infty}^{\infty} e^x dx$.

Розв'язання. За означенням невластного інтеграла I роду маємо:

а) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{x} \Big|_1^b \right) = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{b} + 1 \right) = 1.$

Отже, інтеграл збіжний і дорівнює одиниці.

б) $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{4+x^2} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{dx}{4+x^2} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} \arctg \frac{x}{2} \Big|_a^0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$

Таким чином, невластний інтеграл збіжний і дорівнює $\frac{\pi}{4}$.

в) $\int_{-\infty}^{\infty} e^x dx = \int_{-\infty}^0 e^x dx + \int_0^{+\infty} e^x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(\int_a^0 e^x dx \right) + \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\int_0^b e^x dx \right) = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(e^x \Big|_a^0 \right) +$
 $+ \lim_{b \rightarrow \infty} \left(e^x \Big|_0^b \right) = \lim_{a \rightarrow -\infty} (e^0 - e^a) + \lim_{b \rightarrow \infty} (e^b - e^0) = 1 - 0 + \infty - 1 = \infty.$

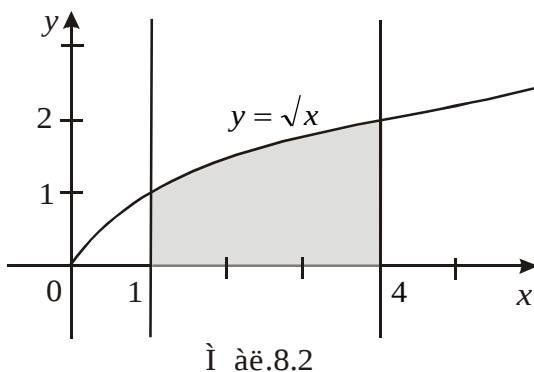
Отже, невластний інтеграл розбіжний.

2. Дослідити на збіжність інтеграли: а) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$; б) $\int_0^1 \frac{dx}{x}$.

Розв'язання. За означенням невластного інтеграла II роду дістаємо:

а) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 x^{-\frac{1}{2}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(2x^{\frac{1}{2}} \Big|_{\varepsilon}^1 \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2(1 - \sqrt{\varepsilon}) = 2.$

Отже, невластний інтеграл збіжний і дорівнює 2.



б)

$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\ln x \Big|_{\varepsilon}^1 \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\ln 1 - \ln \varepsilon) = \infty$,

тобто невластний інтеграл розбіжний.

3. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями: $y=\sqrt{x}$, $y=0$, $x=1$, $x=4$.

Розв'язання. Побудуємо фігуру, обмежену заданими лініями (рис.1).

Оскільки функція $y=\sqrt{x}$ неперервна і невід'ємна на відрізку $[1;4]$, то, за формулою (3) маємо:

$$S = \int_1^4 \sqrt{x} dx = \int_1^4 x^{\frac{1}{2}} dx = \left. \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right|_1^4 = \left. \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right|_1^4 = \left. \frac{2\sqrt{x^3}}{3} \right|_1^4 = \frac{2\sqrt{4^3}}{3} - \frac{2\sqrt{1^3}}{3} = \frac{16}{3} - \frac{2}{3} = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}.$$

4. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями: $y=x^2-2x$, $y=4-x^2$.

Розв'язання. Насамперед зобразимо фігуру, обмежену заданими лініями. Графіком функції $y=x^2-2x$ є парабола, гілки якої направлені вгору (бо коефіцієнти при x^2 є додатним). Щоб побудувати параболу, достатньо знайти вершину параболи та точки перетину з осями координат.

Абсцису вершини параболи знайдемо за формулою $x = -\frac{b}{2a}$, де b – коефіцієнт при x , a – коефіцієнти при x^2 . Отже, $x = -\frac{-2}{2 \cdot 1} = 1$. Підставивши $x=1$ у функцію $y=x^2-2x$, знайдемо ординату вершини параболи: $y=1^2-2 \cdot 1 = -1$. Отже, $A(1;-1)$ – вершина параболи $y=x^2-2x$.

Знайдемо точки перетину параболи $y=x^2-2x$ з осями координат.

З віссю абсцис: $y=0 \Leftrightarrow x^2-2x=0 \Leftrightarrow x(x-2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0; \\ x=2. \end{cases}$ Отже, $B(0;0)$ і $C(2;0)$ –

точки перетину параболи $y=x^2-2x$ з віссю абсцис.

З віссю ординат: $x=0 \Rightarrow y=0^2-2 \cdot 0=0$. Отже, $B(0;0)$ – точки перетину параболи $y=x^2-2x$ з віссю ординат.

Позначимо точки $A(1;-1)$, $B(0;0)$, $C(2;0)$ на площині XOY і побудуємо параболу $y=x^2-2x$, враховуючи при цьому, що її вітки спрямовані вгору.

Графіком функції $y=4-x^2$ також є парабола. Її вітки спрямовані вниз, бо коефіцієнти при x^2 є від'ємним.

Знайдемо вершину параболи $y=4-x^2$: $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2 \cdot (-1)} = 0$, $y=4-0^2=4$.

Отже, $D(0;4)$ – вершина параболи $y=4-x^2$.

Знайдемо точки перетину параболи $y=4-x^2$ з осями координат.

З віссю абсцис: $y=0 \Leftrightarrow 4-x^2=0 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2; \\ x=2. \end{cases}$ Отже, $K(-2;0)$ і $C(2;0)$ –

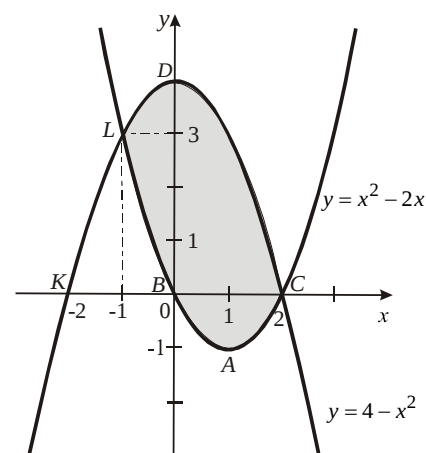
точки перетину параболи $y=4-x^2$ з віссю абсцис. Вершина $D(0;4)$ є точкою перетину параболи $y=4-x^2$ з віссю ординат.

Позначимо точки $D(0;4)$ і $K(-2;0)$ на площині XOY і побудуємо параболу $y=4-x^2$, враховуючи при цьому, що її гілки направлені вниз.

Знайдемо точки перетину заданих ліній. Це дозволить, по-перше, точніше побудувати ці лінії і, по-друге, абсциси точок перетину потрібні для подальшого розв'язування. Для цього розв'яжемо відповідну систему рівнянь.

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x; \\ y = 4 - x^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - x^2 = x^2 - 2x; \\ y = 4 - x^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 2x - 4 = 0; \\ y = 4 - x^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 = 0; \\ y = 4 - x^2; \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1; \\ x = 2; \\ y = 4 - x^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = -1; \\ y = 4 - (-1)^2; \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2; \\ y = 4 - 2^2; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = -1; \\ y = 3; \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2; \\ y = 0. \end{cases} \end{cases}$$



Іл. 8.3

Отже, $L(-1;3)$ і $C(2;0)$ – точки перетину заданих ліній. Позначимо точку $L(-1;3)$ на площині XOY (точка C вже позначена).

$ACDLB$ – фігура, обмежена заданими лініями: $y=x^2-2x$, $y=4-x^2$ (рис. 2). Знайдемо її площу S .

Оскільки функції $y=4-x^2$ і $y=x^2-2x$ неперервні на відрізку $[-1;2]$ і $(4-x^2) \geq (x^2-2x)$ для всіх $x \in [-1;2]$, то для знаходження площі фігури $ACDLB$ використаємо формулу (4).

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^2 (4 - x^2 - (x^2 - 2x)) dx = \int_{-1}^2 (4 - x^2 - x^2 + 2x) dx = \int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx = \\ &= \left(-2 \cdot \frac{x^3}{3} + 2 \cdot \frac{x^2}{2} + 4x \right) \Big|_{-1}^2 = \left(-\frac{2x^3}{3} + x^2 + 4x \right) \Big|_{-1}^2 = \\ &= -\frac{2 \cdot 2^3}{3} + 2^2 + 4 \cdot 2 - \left(-\frac{2 \cdot (-1)^3}{3} + (-1)^2 + 4 \cdot (-1) \right) = \\ &= -\frac{16}{3} + 4 + 8 - \frac{2}{3} - 1 + 4 = -\frac{16}{3} - \frac{2}{3} + 15 = -6 + 15 = 9. \end{aligned}$$

5. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $x = y^2 + 2y + 6$, $x - 3y - 26 = 0$, $y = 0$, при $y > 0$.

Розв'язання. Будуємо задані лінії на координатній площині і штрихуванням визначаємо ту фігуру, яка за умовою задачі обертається навколо осі Ox . Це буде фігура $M_2M_3M_5$ (рис.3).

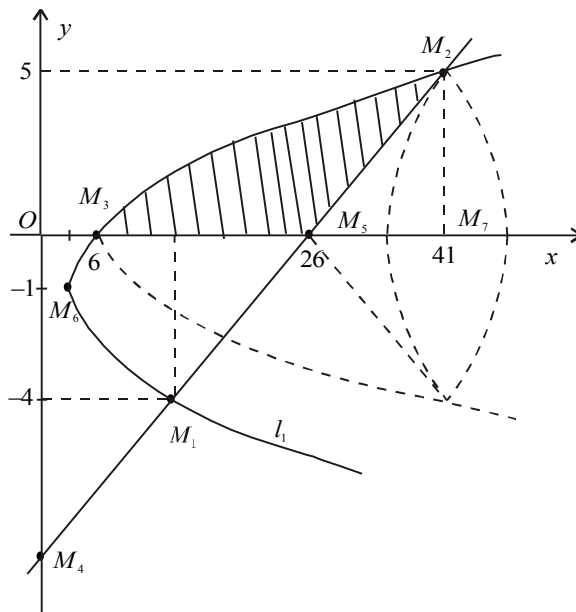


Рис. 3

Об'єм тіла, утвореного обертанням фігури навколо осі Ox , обчислюється за формулою (7).

Для знаходження функції $y = f(x)$ виконаємо такі перетворення:

$$\begin{cases} x = y^2 + 2y + 6 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 5 = (y + 1)^2 \\ y > 0 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow y = \sqrt{x - 5} - 1 \Rightarrow f(x) = \sqrt{x - 5} - 1.$$

Обчислимо об'єми тіла обертання та конуса:

$$\begin{aligned} V_{M_3M_2M_7} &= \pi \int_6^{41} (\sqrt{x - 5} - 1)^2 dx = \pi \int_6^{41} (x - 2\sqrt{x - 5} - 4) dx = \\ &= \pi \left(\frac{x^2}{2} - \frac{4(\sqrt{x - 5})^3}{3} - 4x \right) \Big|_6^{41} = 395,8\pi; \end{aligned}$$

$$V_{M_2M_5M_8} = \frac{1}{3} \pi (M_2M_7)^2 \cdot M_5M_7 = \frac{\pi}{3} 25 \cdot 15 = 125\pi.$$

Отже, об'єм тіла обертання $V_{M_2M_3M_5}$ дорівнює:

$$V_{M_2M_3M_5} = (395,8 - 125)\pi = 270,8\pi.$$

6. Обчислити довжину півкубічної параболи $y = (x + 1)^{3/2}$, $-1 \leq x \leq 4$.

Розв'язання. За формулою (9) маємо:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-1}^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}(x+1)^{\frac{1}{2}}\right)^2} dx = \int_{-1}^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}(x+1)} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^4 \sqrt{9x+13} dx = \\
 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} (9x+13)^{\frac{3}{2}} \Big|_{-1}^4 = \frac{1}{27} (9 \cdot 4 + 13)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{27} (-9 + 13)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{27} \cdot (49)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{27} (4)^{\frac{3}{2}} = \\
 &= \frac{1}{27} \cdot 7^3 - \frac{1}{27} \cdot 8 = \frac{343}{27} - \frac{8}{27} = \frac{335}{27}.
 \end{aligned}$$

Завдання для самостійної роботи

№ 1. Обчислити інтеграли або встановити їх розбіжність:

$$\begin{aligned}
 1) \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 + x}; \quad & 2) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}; \quad & 3) \int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx; \\
 4) \int_0^{\infty} \frac{\arctg x}{x^2 + 1} dx; \quad & 5) \int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx; \quad & 6) \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^3 + 7}.
 \end{aligned}$$

(Відповідь: 1) $\ln 2$; 2) π ; 3) 0,5; 4) $\frac{\pi^2}{8}$;
 5) розбіжний; 6) розбіжний.)

№ 2. Обчислити інтеграли або встановити їх розбіжність:

$$\begin{aligned}
 1) \int_2^4 \frac{dx}{\sqrt[5]{(4-x)^2}}; \quad & 2) \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2}; \quad & 3) \int_0^2 \frac{dx}{x^2 - 4x + 3}; \\
 4) \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}; \quad & 5) \int_1^e \frac{dx}{x \ln x}; \quad & 6) \int_0^1 x \ln x dx.
 \end{aligned}$$

(Відповідь: 1) $\frac{5}{3} 2^{\frac{3}{5}}$; 2) розбіжний; 3) розбіжний;
 4) 6; 5) розбіжний; 6) -0,25.)

№3. Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями:

- 1) $y = x^2 + 2x$, $y = x + 2$; 2) $y = 2x - x^2$, $y = -x$;
- 3) $xy = 4$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$; 4) $y = \sqrt{x}$, $y = -x + 2$, $y = 0$;
- 5) Астроїдою $x = 2\cos^3 t$, $y = 2\sin^3 t$;
- 6) Однією аркою циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ і віссю Ox ;

7) Кардіоїдою $\rho = a(1 - \cos \varphi)$;

8) Кривою $\rho = 5 \sin 3\varphi$.

(Відповідь: 1) 4,5;

2) 4,5;

3) $8 \ln 2$;

4) $\frac{7}{6}$;

5) $\frac{3\pi}{2}$;

6) $3\pi a^2$;

7) $\frac{3\pi}{2} a^2$;

8) $\frac{25\pi}{4}$.)

№ 4. Обчислити довжину дуги кривої:

1) $y = 2\sqrt{x}$ від точки $O(0; 0)$ до $A(1; 2)$;

2) $y = \ln x$ від $x = \sqrt{3}$ до $x = \sqrt{8}$;

3) Астроїди $x = 5 \cos^3 t, y = 5 \sin^3 t$;

4) Однієї арки циклоїди $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$;

5) Кардіоїдою $\rho = a(1 - \cos \varphi)$;

6) Кривої $\rho = 2 \sin^3 \frac{\varphi}{3}$.

(Відповідь: 1) $\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})$;

2) $1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$;

3) 30;

4) $8a$;

5) $8a$;

6) 3π .)

№ 5. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями:

1) $xy = 4, x = 1, x = 4, y = 0$ навколо осі Ox ;

2) $2y = x^2, 2x + 2y - 3 = 0$ навколо осі Ox ;

3) $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 2, y = 2$ навколо осі Oy ;

4) $y^2 = 4 - x, x = 0$ навколо осі Oy ;

5) Астроїдою $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$ навколо осі Oy ;

6) Однією аркою циклоїди $x = 4(t - \sin t), y = 4(1 - \cos t)$ навколо осі Ox .

(Відповідь: 1) 12π ;

2) $\frac{272\pi}{15}$;

3) $\frac{64\pi}{3}$;

4) $\frac{512\pi}{15}$;

5) $\frac{32}{105}\pi a^3$;

6) $320\pi^2$.)

№ 6. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням кривої:

1) $y = \frac{x^3}{3}$ від $x = -2$ до $x = 2$ навколо осі Ox ;

2) $y^2 = 4 + x$, що відтинається прямою $x = 2$ навколо осі Ox ;

3) Однієї арки циклоїди $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ навколо осі Ox ;

4) Астроїди $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$ навколо осі Ox .

(Відповідь: 1) $\frac{34\sqrt{17}-2}{9}\pi$; 2) $\frac{62\pi}{3}$; 3) $\frac{64\pi}{3}a^2$; 4) $\frac{12\pi}{5}a^2$.)