Тема 8. Інтегрування тригонометричних та ірраціональних функцій

1. Інтегрування тригонометричних функцій. 1
2. Інтегрування ірраціональних функцій. 3

Інтеграли від тригонометричних та ірраціональних та функцій не завжди обчислюються в елементарних функціях. Наведемо основні типи таких інтегралів, які за допомогою певних підстановок зводяться до інтегралів від раціональних функцій (раціоналізуються).

1. Інтегрування тригонометричних функцій.

Розглянемо підстановки, які використовують для обчислення інтегралів вигляду $\int R(\sin x, \cos x)dx$, де R – деяка раціональна функція від функцій $\sin x$ і $\cos x$

I. *Універсальна тригонометрична підстановка* $t = tg\frac{x}{2}$.

Використовуючи тригонометричні формули, маємо:

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad x = 2arctgt, \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Отже, $\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt = \int R_1(t)dt$, де R_1 – раціональна функція від t.

Приклад 1. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{\sin x}$.

<u>*Розв'язання.*</u> За допомогою універсальної тригонометричної підстановки дістаємо:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \left| \begin{array}{l} \mathrm{tg}\frac{x}{2} = t,\ x = 2\,\mathrm{arctg}t, \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{(1+t^2)2dt}{2t(1+t^2)} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Зауваження. Універсальна тригонометрична підстановка завжди раціоналізує функцію $R(\sin x, \cos x)$, але на практиці її використовують, якщо під інтегралом функції $\sin x$ і $\cos x$ мають невисокий степінь, інакше розрахунки будуть дуже громіздкими.

У багатьох випадках доцільно застосовувати інші підстановки. Наведемо деякі з них.

II. Якщо підінтегральна функція $R(\sin x, \cos x)$ непарна відносно $\sin x$, то роблять підстановку $t = \cos x$.

III. Якщо підінтегральна функція непарна відносно $\cos x$, використовують підстановку $t = \sin x$.

IV. Якщо підінтегральна функція — парна відносно $\sin x$ і $\cos x$, тобто $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то в цьому випадку застосовують підстановку $t = tgx$. Зокрема, для обчислення інтеграла $\int R(tgx)dx$ теж роблять підстановку $t = tgx$.

Зауважимо, що в інтегралах $\int \sin^{2n} x \cdot \cos^{2m} xdx$ доцільно скористатись формулами пониження степеня:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \quad \sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}.$$

V. При інтегруванні інтегралів $\int \sin ax \cdot \cos bxdx$, $\int \cos ax \cdot \cos bxdx$, $\int \sin ax \cdot \sin bxdx$ треба скористатися тригонометричними формулами:

$$\sin ax \cdot \cos bx = \frac{1}{2}(\sin(a+b)x + \sin(a-b)x),$$

$$\cos ax \cos bx = \frac{1}{2}(\cos(a+b)x + \cos(a-b)x),$$

$$\sin ax \cdot \sin bx = \frac{1}{2}(\cos(a-b)x - \cos(a+b)x).$$

Приклад 2. Обчислити інтеграли:

а) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx$, б) $\int \cos^3 x \sin^2 xdx$, в) $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x}$,

г) $\int \mathrm{tg}^3 xdx$, д) $\int \sin^2 x \cos^2 xdx$, е) $\int \cos 2x \sin 5xdx$

Розв'язання. Використовуючи відповідні підстановки, дістаємо:

а) $$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{\sin^3 x \cdot \sin x}{\cos^2 x \cdot \sin x}dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\sin xdx =$$

$$= \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\sin xdx = \left| \begin{matrix} \cos x = t \\ \sin xdx = -dt \end{matrix} \right| = \int \frac{1-t^2}{t^2}(-dt) =$$

$$= \int \left(1 - \frac{1}{t^2}\right)dt = t + \frac{1}{t} + C = \cos x + \frac{1}{\cos x} + C.$$

б) $$\int \cos^3 x \sin^2 xdx = \int \cos^3 x \sin^2 x \frac{\cos x}{\cos x}dx =$$

$$= \int \cos^2 x \cdot \sin^2 x \cdot \cos xdx = \int (1-\sin^2 x)\sin^2 x \cos xdx = \left| \begin{matrix} \sin x = t \\ dt = \cos xdx \end{matrix} \right| =$$

$$=\int\left(1-t^2\right)t^2dt=\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}+C=\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{1}{5}\sin^5 x+C.$$

в) $$\int\frac{dx}{\sin^4 x\cos^2 x}=\left|\begin{array}{l}\mathrm{tg}\,x=t,\ \ x=\mathrm{arctg}t,\ \ dx=\dfrac{dt}{1+t^2};\\ \sin^2 x=\dfrac{\mathrm{tg}^2x}{1+\mathrm{tg}^2x}=\dfrac{t^2}{1+t^2};\\ \cos^2 x=\dfrac{1}{1+\mathrm{tg}^2x}=\dfrac{1}{1+t^2}\end{array}\right|=$$

$$=\int\frac{\left(1+t^2\right)^2\left(1+t^2\right)dt}{t^4\left(1+t^2\right)}=\int\frac{1+2t^2+t^4}{t^4}dt=\int\left(\frac{1}{t^4}+\frac{2}{t^2}+1\right)dt=$$

$$=\frac{1}{3t^3}-\frac{2}{t}+t+C=\mathrm{tg}\,x-\frac{1}{3\mathrm{tg}^3x}-2\mathrm{ctg}\,x+C.$$

г) $$\int\mathrm{tg}^3 x dx=\left|\begin{array}{l}\mathrm{tg}\,x=t\\ x=\mathrm{arctg}t\\ dx=\dfrac{dt}{1+t^2}\end{array}\right|=\int\frac{t^3dt}{t^2+1}=\int\left(t-\frac{t}{t^2+1}\right)dt=\frac{t^2}{2}-\frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right)+C=$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{tg}^2x-\ln\sqrt{\mathrm{tg}^2x+1}+C.$$

д) $$\int\sin^2 x\cos^2 x dx=\frac{1}{4}\int\sin^2 2x\,dx=\frac{1}{4}\int\frac{1-\cos 4x}{2}dx=\frac{1}{8}\left(x-\frac{1}{4}\sin 4x\right)+C.$$

е) $$\int\cos 2x\cdot\sin 5x\cdot dx=\frac{1}{2}\int\left(\sin 7x+\sin 3x\right)dx=-\frac{1}{14}\cos 7x-\frac{1}{6}\cos 3x+C.$$

2. Інтегрування ірраціональних функцій.

Розглянемо підстановки для інтегрування деяких типів ірраціональних функцій.

I. Інтеграли виду $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ за допомогою підстановки $x+\frac{b}{2a}=t$ можна звести до табличних інтегралів (виділивши повний квадрат в підкореневому виразі).

Приклад 3. Знайти інтеграл $\int\frac{(8x-11)dx}{\sqrt{5+2x-x^2}}$.

Розв'язання. Виділивши повний квадрат і зробивши заміну, маємо:

$$\int \frac{(8x-11)dx}{\sqrt{5+2x-x^2}} = \int \frac{(8x-11)dx}{\sqrt{-(x^2-2x+1-6)}} = \int \frac{(8x-11)dx}{\sqrt{6-(x-1)^2}} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} x-1=t \\ x=t+1 \\ dx=dt \end{array} \right| = \int \frac{(8t-3)}{\sqrt{6-t^2}} dt = 4\int \frac{2tdt}{\sqrt{6-t^2}} - 3\int \frac{dt}{\sqrt{\left(\sqrt{6}\right)^2 - t^2}} =$$

$$= -4\int \frac{d\left(6-t^2\right)}{\sqrt{6-t^2}} - 3\arcsin\frac{t}{\sqrt{6}} + C = -8\sqrt{6-t^2} - 3\arcsin\frac{t}{\sqrt{6}} + C =$$

$$= -8\sqrt{5+2x-x^2} - 3\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{6}} + C.$$

II. Інтеграл вигляду $\int R\left(x, \sqrt[n]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^m}\right)dx$ обчислюють за допомогою підстановки $\frac{ax+b}{cx+d} = t^n$. Зокрема, інтеграл вигляду $\int R\left(x, \sqrt[n]{(ax+b)^m}\right)dx$ підстановкою $ax+b=t^n$ зводять до інтеграла $\int R\left(\frac{t^n-b}{a}, t^m\right)\frac{nt^{n-1}dt}{a} = \int R_1(t)dt.$

III. Інтеграл вигляду $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}}\right)dx$ обчислюють за допомогою підстановки $\frac{ax+b}{cx+d} = t^s$, де s – найменше спільне кратне чисел $n_1, n_2 \ldots, n_k$. Зокрема, для обчислення інтеграла $\int R\left(x,\ x^{\frac{m_1}{n_1}}, x^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots, x^{\frac{m_k}{n_k}}\right)dx$ використовують підстановку $x = t^s$, де $s = НСК(n_1, n_2 \ldots, n_k)$.

Приклад 4. Знайти інтеграли:

а) $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}$, б) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}}$.

<u>*Розв'язання.*</u> Застовуючи відповідні підстановки, дістаємо:

а) $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{(x+1)^2}} = \left| \begin{array}{l} x+1=t^3 \\ x=t^3-1 \\ dx=3t^2dt \end{array} \right| = \int \frac{\left(t^3-1\right)3t^2dt}{t^2} = 3\int \left(t^3-1\right)dt =$

$$= \frac{3}{4}t^4 - 3t + C = \frac{3}{4}\sqrt[3]{(x+1)^4} - \sqrt[3]{x+1} + C.$$

б) $$\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}} = \left| \begin{array}{l} x = t^{12}, 12 = HCK(2,3,4) \\ dx = 12t^{11}dt; t = \sqrt[12]{x} \end{array} \right| = \int \frac{t^6 \cdot 12t^{11}dt}{t^8 - t^3} =$$

$$= 12\int \frac{t^{14}dt}{t^5 - 1} = 12\int \frac{t^4\left(t^{10} - 1 + 1\right)dt}{t^5 - 1} = 12\int \left(t^4\left(t^5 + 1\right) + \frac{t^4}{t^5 - 1} \right)dt =$$

$$= 12\left(\frac{t^{10}}{10} + \frac{t^5}{5} + \frac{1}{5}\ln\left| t^5 - 1 \right| \right) + C = \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} + \frac{12}{5}\cdot\sqrt[12]{x^5} + \frac{12}{5}\ln\left| \sqrt[12]{x} - 1 \right| + C.$$

IV Для обчислення інтегралів $\int R\left(t, \sqrt{k^2 - t^2}\right)dt$, $\int R\left(t, \sqrt{t^2 - k^2}\right)dt$, $\int R\left(t, \sqrt{k^2 + t^2}\right)dt$ застосовують тригонометричні підстановки, а саме:

1. $$\int R\left(t, \sqrt{k^2 - t^2}\right)dt = \left| \begin{array}{l} t = k\sin z \\ \text{або} \\ t = k\cos z \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} t = k\sin z, z \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right), z = \arcsin\frac{t}{k}, \\ dt = k\cos z dz; \sqrt{k^2 - t^2} = \sqrt{k^2 - k^2\sin^2 z} = \\ = k\sqrt{\cos^2 z} = k|\cos z| = k\cos z \end{array} \right| =$$

$$= \int R(k\sin z, k\cos z)k\cos z dz = \int R^*(\sin z, \cos z)dz.$$

2. $$\int R\left(t, \sqrt{t^2 - k^2}\right)dt = \left| \begin{array}{l} t = \dfrac{k}{\sin z} \\ \text{або} \\ t = \dfrac{k}{\cos z} \end{array} \right| = \int R^*(\sin z,\ \cos z)dz.$$

3. $$\int R\left(t, \sqrt{k^2 + t^2}\right)dt = \left| \begin{array}{l} t = k\,\mathrm{tg}\, z \\ \text{або} \\ t = k\,\mathrm{ctg}\, z \end{array} \right| = \int R^*(\sin z,\ \cos z)dz.$$

Приклад 5. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 + 25}}$.

Розв'язання. Розглянувши випадок IV (3), дістаємо:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 + 25}} = \left| \begin{array}{l} x = 5\mathrm{tg}z,\ \ z \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right),\ \ z \neq 0, \\ dx = \dfrac{5dz}{\cos^2 z};\ \ z = \mathrm{arctg}\dfrac{x}{5}; \\ \sqrt{x^2 + 25} = 5\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2 z} = \dfrac{5}{\cos z} \end{array} \right| = \int \frac{\cos z \cdot 5dz}{5 \cdot 25\mathrm{tg}^2 z \cdot \cos^2 z} =$$

$$=\frac{1}{25}\int\frac{\cos z dz}{\sin^2 z}=-\frac{1}{25\sin z}+C=-\frac{1}{25\sin\operatorname{arctg}\frac{x}{5}}+C=\frac{\sqrt{x^2+25}}{25x}+C.$$

Зокрема, інтеграл $\int R_1\left(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ після виділення повного квадрата і заміни $x+\frac{b}{2a}=t$ зводять до одного з інтегралів типу IV залежно від знака дискримінанта квадратного тричлена та знака коефіцієнта a.

Зауваження. Інтеграли типу $\int R_1\left(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ можуть бути знайдені за допомогою підстановок Ейлера: $\sqrt{ax^2+bx+c}=t\pm x\sqrt{a}$, при $a>0$; $\sqrt{ax^2+bc+c}=tx\pm\sqrt{c}$, при $c>0$; $\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}=t(x-x_1)$, при $b^2-4ac>0$,де $x_1,\ x_2$ — корені тричлена ax^2+bx+c.

V. Інтеграл *від диференціального бінома* має вигляд $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$, де $m,\ n,\ p$ — раціональні числа. Цей інтеграл можна обчислити тільки в таких випадках:

1. якщо $p=1$, то роблять підстановку $x=t^s$, де s — найменше спільне кратне знаменників дробів m та n.

2. якщо $\frac{m+1}{n}$ — ціле число, то використовують підстановку $a+bx^n=t^s$, де s — знаменник дробу p.

3. якщо $\frac{m+1}{n}+p$ — ціле число, то застосовують підстановку $ax^{-n}+b=t^s$, де s — знаменник дробу p.

Приклад 6. Знайти інтеграл $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

<u>*Розв’язання.*</u> Для інтегрування диференціального бінома застосуємо підстановку $ax^{-n}+b=t^s$:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = \int x^0 \cdot \left(1+x^4\right)^{-\frac{1}{4}} dx = \left| \begin{array}{l} m=0, \quad n=4, \quad p=-\dfrac{1}{4}, \quad a=b=1, \\ \dfrac{m+1}{n}+p=\dfrac{0+1}{4}-\dfrac{1}{4}=0\in Z \Rightarrow \\ \Rightarrow x^{-4}+1=t^4, \quad x^4=\left(t^4-1\right)^{-1}, \\ x=\left(t^4-1\right)^{-\frac{1}{4}}, \quad dx=-t^3\cdot\left(t^4-1\right)^{-\frac{5}{4}}dt, \\ \sqrt[4]{1+x^4}=t\left(t^4-1\right)^{-\frac{1}{4}} \end{array} \right| =$$

$$= -\int \frac{t^3\left(t^4-1\right)^{-\frac{5}{4}}dt}{t\left(t^4-1\right)^{-\frac{1}{4}}} = -\int \frac{t^2 dt}{t^4-1} = \left| \frac{t^2}{t^4-1} = \frac{A}{t-1}+\frac{B}{t+1}+\frac{Ct+D}{t^2+1} \Rightarrow \right.$$

$$\Rightarrow t^2 = A(t+1)(t^2+1)+B(t-1)(t^2+1)+(Ct+D)(t^2-1) \Rightarrow$$

$$\left. \Rightarrow \begin{cases} A=\dfrac{1}{4} \\ B=-\dfrac{1}{4} \\ C=0 \\ D=\dfrac{1}{2} \end{cases} \right| = \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t-1}\right)dt - \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + C,$$

де $t=\sqrt[4]{1+x^{-4}}$.