Самостійна робота №13

Тема: Інтегрування диференціальних біномів.

Мета: Навчитись інтегрувати диференціальні біноми.

Короткі теоретичні відомості

Інтеграл *від диференціального бінома* має вигляд $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$**,** **де** $m,\ n,\ p$ **— раціональні числа**. Цей інтеграл можна обчислити тільки в таких випадках:

1. якщо $p=1$, то роблять підстановку $x=t^s$, де s — найменше спільне кратне знаменників дробів m та n.

2. якщо $\dfrac{m+1}{n}$ — ціле число, то використовують підстановку $a+bx^n=t^s$, де s — знаменник дробу p.

3. якщо $\dfrac{m+1}{n}+p$ — ціле число, то застосовують підстановку $ax^{-n}+b=t^s$, де s — знаменник дробу p.

Приклад . Знайти інтеграл $\int \dfrac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

<u>*Розв'язання.*</u> Для інтегрування диференціального бінома застосуємо підстановку $ax^{-n}+b=t^s$:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}=\int x^0\cdot\left(1+x^4\right)^{-\frac{1}{4}}dx=\left|\begin{array}{l} m=0,\ \ n=4,\ \ p=-\dfrac{1}{4},\ \ a=b=1, \\ \dfrac{m+1}{n}+p=\dfrac{0+1}{4}-\dfrac{1}{4}=0\in Z\Rightarrow \\ \Rightarrow x^{-4}+1=t^4,\quad x^4=\left(t^4-1\right)^{-1}, \\ x=\left(t^4-1\right)^{-\frac{1}{4}},\quad dx=-t^3\cdot\left(t^4-1\right)^{-\frac{5}{4}}dt, \\ \sqrt[4]{1+x^4}=t\left(t^4-1\right)^{-\frac{1}{4}} \end{array}\right|=$$

$$=-\int \frac{t^3\left(t^4-1\right)^{-\frac{5}{4}}dt}{t\left(t^4-1\right)^{-\frac{1}{4}}}=-\int \frac{t^2dt}{t^4-1}=\left|\frac{t^2}{t^4-1}=\frac{A}{t-1}+\frac{B}{t+1}+\frac{Ct+D}{t^2+1}\Rightarrow\right.$$

$$\Rightarrow t^2=A(t+1)(t^2+1)+B(t-1)(t^2+1)+(Ct+D)(t^2-1)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{4} \\ B = -\dfrac{1}{4} \\ C = 0 \\ D = \dfrac{1}{2} \end{cases} = \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1}\right)dt - \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + C,$$

де $t = \sqrt[4]{1+x^{-4}}$.

Для обчислення інтегралів $\int R\left(t, \sqrt{k^2 - t^2}\right)dt$**,** $\int R\left(t, \sqrt{t^2 - k^2}\right)dt$**,** $\int R\left(t, \sqrt{k^2 + t^2}\right)dt$ **застосовують тригонометричні підстановки**, а саме:

$$1. \int R\left(t, \sqrt{k^2 - t^2}\right)dt = \left| \begin{array}{l} t = k\sin z \\ \text{або} \\ t = k\cos z \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} t = k\sin z, z \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right), z = \arcsin\dfrac{t}{k}, \\ dt = k\cos z dz; \sqrt{k^2 - t^2} = \sqrt{k^2 - k^2\sin^2 z} = \\ = k\sqrt{\cos^2 z} = k|\cos z| = k\cos z \end{array} \right| =$$

$$= \int R(k\sin z, k\cos z)k\cos z dz = \int R^*(\sin z, \cos z)dz.$$

$$2. \int R\left(t, \sqrt{t^2 - k^2}\right)dt = \left| \begin{array}{l} t = \dfrac{k}{\sin z} \\ \text{або} \\ t = \dfrac{k}{\cos z} \end{array} \right| = \int R^*(\sin z,\ \cos z)dz.$$

$$3. \int R\left(t, \sqrt{k^2 + t^2}\right)dt = \left| \begin{array}{l} t = k\operatorname{tg} z \\ \text{або} \\ t = k\operatorname{ctg} z \end{array} \right| = \int R^*(\sin z,\ \cos z)dz.$$

Приклад . Знайти інтеграл $\int\dfrac{dx}{x^2\sqrt{x^2+25}}$.

<u>*Розв'язання.*</u> Розглянувши випадок (3), дістаємо:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+25}} = \left| \begin{array}{l} x = 5\mathrm{tg}z, \quad z \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right), \quad z \neq 0, \\ dx = \frac{5dz}{\cos^2 z}; \quad z = \mathrm{arctg}\frac{x}{5}; \\ \sqrt{x^2+25} = 5\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 z} = \frac{5}{\cos z} \end{array} \right| = \int \frac{\cos z \cdot 5dz}{5 \cdot 25\mathrm{tg}^2 z \cdot \cos^2 z} =$$

$$= \frac{1}{25}\int \frac{\cos z dz}{\sin^2 z} = -\frac{1}{25\sin z} + C = -\frac{1}{25\sin \mathrm{arctg}\frac{x}{5}} + C = \frac{\sqrt{x^2+25}}{25x} + C.$$

Зокрема, інтеграл $\int R_1\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ після виділення повного квадрата і заміни $x + \frac{b}{2a} = t$ зводять до одного з інтегралів типу IV залежно від знака дискримінанта квадратного тричлена та знака коефіцієнта *a*.

Зауваження. Інтеграли типу $\int R_1\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ можуть бути знайдені за допомогою підстановок Ейлера: $\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm x\sqrt{a}$, при $a > 0$; $\sqrt{ax^2+bc+c} = tx \pm \sqrt{c}$, при $c > 0$; $\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = t(x-x_1)$, при $b^2 - 4ac > 0$,де x_1, x_2 — корені тричлена ax^2+bx+c.