Самостійна робота №15

Тема: Обчислення невласних інтегралів.

Мета: Навчитись обчислювати невласні інтеграли.

Короткі теоретичні відомості

Невласні інтеграли із нескінченним проміжком інтегрування

Нехай $f(x)$ інтегровна для будь-якого скінченного $b \in [a;+\infty)$, так що $\int_a^b f(x)dx$ існує.

Означення. Границя $\int_a^b f(x)dx$ при $b \to +\infty$ називається *невласним інтегралом від функції f(x) на нескінченному проміжку* $[a;+\infty)$ і позначається так: $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx$.

Якщо ця границя існує та скінченна, то невласний інтеграл називається *збіжним*, а якщо не існує (зокрема нескінченна), то — розбіжним.

Якщо $f(x)$ — інтегровна для скінченних a та b, тобто $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, формули для обчислення невласних інтегралів на нескінченному проміжку мають вигляд:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}(F(b)-F(a)), \qquad (1)$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}(F(b)-F(a)), \qquad (2)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx, \qquad (3)$$

де $c = \text{const}$.

Приклад. Дослідити на збіжність інтеграл Діріхле

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}. \qquad (4)$$

Для розв'язування задачі розглянемо такі три випадки:

I. $p = 1$. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to+\infty}(\ln|x|)\Big|_1^b = \lim\limits_{b\to+\infty}(\ln b - \ln 1) = +\infty$, інтеграл розбіжний.

II. $p < 1$. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p} = \lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p} = \lim\limits_{b\to+\infty}\left(\frac{x^{1-p}}{1-p}\right)\Big|_1^b = \frac{1}{1-p}\lim\limits_{b\to+\infty}\left(b^{1-p}-1\right) = +\infty$, інтеграл розбіжний.

III. $p > 1$. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p} = \lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{x^p} = \lim\limits_{b\to+\infty}\left(\frac{x^{1-p}}{1-p}\right)\Big|_1^b = \lim\limits_{b\to+\infty}\frac{1}{1-p}\left(b^{\frac{1}{p-1}}-1\right) =$

$= \frac{1}{1-p}(0-1) = \frac{1}{p-1}$, інтеграл збіжний.

Отже, інтеграл Діріхле збіжний при p > 1 та розбіжний при $p \le 1$.

Крім безпосереднього обчислення невласних інтегралів при дослідженні їх на збіжність існують і інші методи.

Одним із таких методів можна встановити збіжність інтеграла Пуассона (рис. 1)

$$S = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad (5)$$

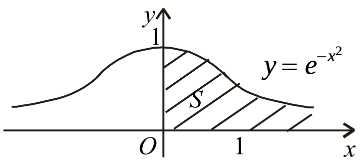

Рис. 1

особливість якого полягає в тому, що первісна для підінтегральної функції $f(x) = e^{-x^2}$ не виражається через елементарні функції.

У деяких випадках достатньо встановити лише збіжність чи розбіжність розглядуваного інтеграла, при цьому можна скористатися методом порівняння, що базується на такій теоремі:

***Теорема*. Якщо при $x \ge a$ виконується нерівність $0 \le f(x) \le g(x)$, то зі збіжності інтеграла $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ випливає збіжність інтеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ або з розбіжності $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ випливає розбіжність $\int_a^{+\infty} g(x)dx$.**

Звичайно, для порівняння вибирається інтеграл, збіжність якого відома, наприклад інтеграл Діріхле.

Приклад. Дослідити збіжність інтеграла $\int_1^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$.

● $0 \le f(x) = \frac{\sin^2 x}{x^2} \le \frac{1}{x^2} = g(x), \quad x \in [1; +\infty)$.

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ — збіжний, як інтеграл Діріхле із p = 2 > 1, тому буде збіжним і $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$.

Обчислення невласних інтегралів від розривних (необмежених) функцій

Нехай $f(x)$ неперервна на проміжку $(a; b]$ та при $x = a$ має розрив 2-го роду.

Означення. $\lim_{\varepsilon \to +0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$ називається *невласним інтегралом* від розривної (необмеженої) функції $f(x)$.

Якщо ця границя існує, то інтеграл називається *збіжним*, а якщо не існує, то — *розбіжним*.

Для обчислення таких невласних інтегралів використовують такі формули:

$x=a$ — точка розриву $f(x)$,

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(F(b)-F(a+\varepsilon)\right). \qquad (6)$$

$x=b$ — точка розриву $f(x)$,

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(F(b-\varepsilon)-F(a)\right). \qquad (7)$$

III. $x=c\in(a;\ b)$ — точка розриву $f(x)$,

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon_1\to+0}\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx+\lim_{\varepsilon_2\to+0}\int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx. \qquad (8)$$

Зауваження. До невласних інтегралів, які мають точку розриву, що є внутрішньою для $[a;\ b]$, не можна застосувати формулу Ньютона—Лейбніца.

Приклад. Обчислити $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$.

● Неправильне розв’язання: $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{-1}^{1}=-1-\left(-\frac{1}{-1}\right)=-2$.

Правильне розв’язання: $f(x)=\frac{1}{x^2}$, $D(f)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)\Rightarrow$ $\Rightarrow x=0\in[-1;\ 1]$ — точка розриву 2-го роду функції $f(x)=\frac{1}{x^2}\Rightarrow\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$ — невласний.

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2}+\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{\varepsilon_1\to+0}\int_{-1}^{0-\varepsilon_1}\frac{dx}{x^2}+\lim_{\varepsilon_2\to+0}\int_{0+\varepsilon_2}^{1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{\varepsilon_1\to+0}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{-1}^{-\varepsilon_1}+$$

$$+\lim_{\varepsilon_2\to+0}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{\varepsilon_2}^{1}=\lim_{\varepsilon_1\to+0}\left(\frac{1}{\varepsilon_1}-1\right)+\lim_{\varepsilon_2\to+0}\left(-1+\frac{1}{\varepsilon_2}\right)=+\infty+\infty=+\infty\Rightarrow \text{ інтеграл розбіжний.}$$