Практична робота 21-22

Тема: ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ.

Мета: НАВЧИТИСЬ РОЗВ'ЯЗУВАТИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ.

Короткі теоретичні відомості

Означення. Диференціальним рівнянням називається рівняння, що пов'язує незалежну змінну x, функцію від цієї змінної і її похідні і має вигляд

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0 \tag{1.1}$$

Порядок старшої похідної називається ***порядком*** диференціального рівняння.

Означення. *Розв'язком* диференціального рівняння (1.1) називається функція $y = \varphi(x)$, підставляючи яку разом із її похідними $y' = \varphi'(x), ..., y^{(n)} = \varphi^{(n)}(x)$ у рівняння (1.1) дістаємо тотожність

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi'''(x), ..., \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0.$$

Початковими умовами називають значення в точці x_0 функції і її похідних до $(n-1)-$го порядку включно:

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}. \tag{1.2}$$

Означення. *Загальним розв'язком* диференціального рівняння (1.1) називається функція $y = \varphi(x, C_1, ..., C_n)$, що містить n довільних сталих $C_1, ..., C_n$, і яка задовольняє умови:

1) функція $y = \varphi(x, C_1, ..., C_n)$ є розв'язком диференціального рівняння (1.1);

2) при заданих *початкових умовах* (2)

$$y(x_0) = y_0, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

сталі $C_1, ..., C_n$ знаходяться однозначно. Тобто маємо $C_1^0, ..., C_n^0$, і функція $y = \varphi(x, C_1^0, ..., C_n^0)$ є частинним розв'язком диференціального рівняння (1.1).

Означення. Задача знаходження розв'язку диференціального рівняння при заданих початкових умовах називається *задачею Коші.*

Для того, щоб знайти розв'язок диференціального рівняння потрібно його проінтегрувати.

Розв'язок диференціального рівняння (1.1) може бути знайдений у вигляді неявної функції

$$\Phi(x, y, C_1, ...C_n) = 0.$$

Такий розв'язок називають *загальним інтегралом.*

Диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння, що пов'язує незалежну змінну x, функцію $y(x)$, її похідну $y'(x)$ і має вигляд

$$F(x,y,y')=0. \tag{1.3}$$

Якщо рівняння (1.3) можна розв'язати відносно похідної y', то воно матиме вигляд:

$$y'=f(x,y). \tag{1.4}$$

Розглядають також диференціальне рівняння у диференціалах dx та dy, тобто у вигляді

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0. \tag{1.5}$$

Диференціальне рівняння (1.5) можна звести до диференціального рівняння (1.4), якщо $Q(x,y)\neq 0,$ враховуючи, що

$$y'=\frac{dy}{dx}, \tag{1.6}$$

тобто розглядаючи похідну як відношення двох диференціалів. І навпаки, диференціальне рівняння (1.4) можна звести до диференціального рівняння (1.5).

Зробимо деякі перетворення. Підставимо (1.6) в (1.4). Тоді

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y),\quad \frac{dx}{dy}=\frac{1}{f(x,y)},\quad f(x,y)\neq 0.$$

Дістаємо так зване обернене рівняння

$$x'_y=\frac{1}{f(x,y)}. \tag{1.7}$$

Із означення загального розв'язку диференціального рівняння (1.1) випливає, що загальний розв'язок диференціального рівняння першого порядку (1.3), (1.4), (1.5) містить одну сталу і має вигляд

$$y=\varphi(x,C) \quad \text{або} \quad \Phi(x,y,C)=0. \tag{1.8}$$

Початковими умовами для диференціального рівняння першого порядку є умови

$$y(x_0)=y_0,\quad y'(x_0)=y_1. \tag{1.9}$$

Типи диференціальних рівнянь першого порядку, що інтегруються в квадратурах

Диференціальні рівняння з відокремленими змінними

Рівняння такого типу мають вигляд

$$P(x)dx = Q(y)dy. \quad (1.10)$$

Для того, щоб знайти розв'язок рівняння (1.10) потрібно знайти інтеграли від обох частин рівності (1.10). Тоді маємо $\int Q(y)dy = \int P(x)dx + C.$

Запис розв'язку в такому вигляді *називається розв'язком у квадратурах*. Диференціальне рівняння вважається розв'язаним, незалежно від того, чи обчислюються інтеграли в елементарних функціях, чи ні.

При розв'язанні диференціальних рівнянь усіх наведених далі типів їх намагаються звести до вигляду (1.10).

Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними мають вигляд

$$P_1(x)P_2(y)dx + Q_1(x)Q_2(y)dy = 0 \quad (1.11)$$

або

$$y' = f_1(x)f_2(y). \quad (г.12)$$

Ознака рівняння з відокремлюваними змінними.
При кожному диференціалі dx та dy в рівнянні (1.5) множниками є добутки функцій, кожна з яких залежить лише від однієї змінної x або y. У рівнянні (1.4) права частина рівняння - функція $f(x,y)$ є добутком функцій $f(x)$ та $f(y)$: $\quad f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$.

Якщо диференціальне рівняння має вигляд (1.11) або (1.12), то потрібно зробити такі перетворення, щоб при dx була функція від x, а при dy - функція від y.

А саме, якщо диференціальне рівняння має вигляд (1.11), то змінні відокремлюємо наступним способом.

Записуємо рівняння (1.11) у вигляді

$$Q_1(x)Q_2(y)dy = -P_1(x)P_2(y)dx.$$

Ділимо обидві частини цієї рівності на $Q_1(x)P_2(y) \neq 0$. Отримуємо рівняння з відокремленими змінними вигляду (1.10)

$$\frac{Q_2(y)}{P_2(y)}dy = -\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}dx$$

і далі знаходимо інтеграли від кожної частини отриманої рівності.

Наведемо схему розв'язання диференціального рівняння вигляду (1.4).

$$y' = f(x,y).$$

Схема розв'язування диференціального рівняння з відокремлюваними змінними

1. Перевіряємо, чи виконується умова
$$f(x,y) = f_1(x)f_2(y). \quad (1.13))$$
2. Якщо умова виконується, то записуємо співвідношення (1.6):
$$y' = \frac{dy}{dx}.$$
3. Підставляємо (1.6) та (1.13) в задане рівняння (1.4) і дістаємо

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) f_2(y).$$

4. Множимо обидві частини рівності на dx. Маємо
$$dy = f_1(x) f_2(y) dx.$$
5. Ділимо обидві частини на $f_2(y) \neq 0$. Диференціальне рівняння набуває вигляду
$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x) dx,$$
тобто, маємо диференціальне рівняння з відокремленими змінними вигляду (1.10).
6. Знаходимо інтеграли від обох частин рівності
$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x) dx.$$

Прилад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння
$$(1 + y^2)dx + xydy = 0.$$

Розв'язання. Задане рівняння є рівнянням з відокремлюваними змінними. Маємо $P(x, y) = P_1(y) = 1 + y^2, Q(x, y) = Q_1(x) Q_2(y) = x \cdot y$. Записуємо задане рівняння у вигляді $(1 + y^2)dx = -xydy$. Після ділення обох частин рівняння на $x(1 + y^2)$, $x \neq 0$, дістаємо рівняння з відокремленими змінними
$$\frac{dx}{x} = -\frac{ydy}{1 + y^2}.$$
Інтегруємо обидві частини цього рівняння
$$\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{ydy}{1 + y^2}, \quad \ln|x| = -\frac{1}{2} \int \frac{d(1 + y^2)}{1 + y^2}, \quad \ln|x| = -\frac{1}{2} \ln\left|1 + y^2\right| + \ln|C|.$$Довільну сталу C_1 представили у вигляді $\ln|C|$.

Отже, маємо загальний розв'язок заданого рівняння
$$x = \frac{C}{\sqrt{1 + y^2}}.$$

Цей розв'язок можна записати і у вигляді:
$$x^2 (1 + y^2) = C.$$

Однорідні по x та y диференціальні рівняння

Означення. Функція $f(x, y)$ називається *однорідною* функцією по x та y порядку k, якщо виконується умова
$$f(tx, ty) = t^k f(x, y).$$

Диференціальне рівняння вигляду (1.5) називається *однорідним,* якщо функції $P(x, y)$, $Q(x, y)$ є однорідними функціями одного порядку.

Якщо диференціальне рівняння має вигляд (1.4), то воно називається *однорідним по x та y*, якщо функція $f(x,y)$ є однорідною функцією нульового порядку. Тоді цю функцію можна звести до функції вигляду $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ або $\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ і рівняння (1.4) набуває вигляду

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{1.14}$$

Розв'язування однорідного диференціального рівняння зводиться до розв'язування рівняння з відокремленими змінними за допомогою заміни

$$\frac{y}{x} = u, \quad y' = u'x + u. \tag{1.15}$$

А саме, із рівняння (1.14) маємо $u'x + u = \varphi(u)$. Звідки

$$u'x = \varphi(u) - u$$

тобто дістали рівняння з відокремлюваними змінними x та u, яке розв'язуємо вказаним вище способом. Знайшовши із цього рівняння u, маємо розв'язок однорідного рівняння

$$y = ux.$$

Приклад 2. Знайти розв'язок задачі Коші для диференціального рівняння

$$xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$$

при умові, що $y(3) = 4$.

Розв'язання. Розв'яжемо задане рівняння відносно похідної:

$$y' = \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x}, \quad y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y}{x}}.$$

Дістали рівняння вигляду (1.14), тобто однорідне по x та y диференціальне рівняння. Зробимо заміну $\frac{y}{x} = u, \quad y' = u'x + u$. Задане рівняння набуває вигляду $u'x + u = u + \sqrt{1 + u^2}, \quad u'x = \sqrt{1 + u^2}.$

Це - рівняння з відокремлюваними змінними. Розв'язуємо його

$$\frac{du}{dx}x = \sqrt{1 + u^2}, \qquad \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \int \frac{dx}{x}, \quad \ln\left|u + \sqrt{1 + u^2}\right| = \ln|x| + \ln|C|, \quad u + \sqrt{1 + u^2} = Cx.$$

Повернемося до змінної y, тобто підставимо в останню рівність $u = \frac{y}{x}$.

Загальним інтегралом заданого рівняння є функція:

$$\frac{y}{x}+\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}=Cx}, \quad y+\sqrt{x^2+y^2}=Cx^2.$$

Використаємо початкову умову $y(3)=4$. Дістаємо, що $4+\sqrt{3^2+4^2}=3^2$. Звідки $C=1$.

Отже, шуканим інтегралом задачі Коші є функція

$$y+\sqrt{x^2+y^2}=x^2.$$

Лінійні диференціальні рівняння першого порядку

Означення. Диференціальне рівняння першого порядку називається *лінійним по* y, якщо функція y та її похідна y' входять в рівняння в першому степені. Лінійне по y диференціальне рівняння має вигляд

$$y'+p(x)y=q(x), \tag{1.16}$$

де $p(x), \quad q(x)$ - неперервні функції на проміжку (a,b).

Лінійне по x диференціальне рівняння має вигляд

$$x'_y+p(y)x=q(y).$$

Метод Бернуллі

Розв’язок лінійного диференціального рівняння (1.16) шукають у вигляді добутку двох функцій $u(x)$ та $v(x)$. Тому на одну із них, наприклад $v(x)$, можна накладати будь-які додаткові умови.

Схема розв’язування лінійного рівняння

1. Вводимо заміну
$$y(x)=u(x)v(x). \tag{1.17}$$
2. Знаходимо
$$y'=u'v+uv' \tag{1.18}$$
3. Підставляємо (1.17), (1.18) в рівняння (1.16)
$$u'v+uv'+p(x)uv=q(x), \quad u'v+u(v'+p(x)v)=q(x) \tag{1.19}$$
4. Нехай функція $v(x)$ така, що вираз в дужках дорівнює нулю, тобто маємо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними
$$v'+p(x)v=0, \tag{1.20}$$
яке розв’язуємо за наведеною схемою. Знаходимо $v(x)$.
5. Із рівності (1.19) маємо
$$u'v=q(x) \tag{1.21}$$
6. Підставляємо знайдену із рівняння (1.20) функцію $v(x)$ в рівняння (1.21) і розв’язуємо рівняння з відокремлюваними змінними. Знаходимо функцію $u(x)$.
7. Шуканий розв’язок має вигляд
$$y=u(x)v(v).$$

Таким чином, **розв'язання лінійного диференціального рівняння зводиться до розв'язання двох рівнянь (1.20) і (1.21) з відокремлюваними змінними**.

Приклад 3. Знайти розв'язок задачі Коші для рівняння

$$y' + y\cos x = \sin x\cos x$$

при умові, що $y(0) = -1$.

Розв'язання. Задане рівняння є лінійним диференціальним рівнянням по y, тому що y та y' входять в задане рівняння в першому степені. Розв'язок шукаємо у вигляді $y = uv, \quad y' = u'v + uv'$.

Тоді маємо

$$u'v + uv' + \cos x \cdot uv = \sin x\cos x, \quad u'v + u(v' + \cos x \cdot v) = \sin x\cos x.$$

Рівняння (1.20) в цьому випадку набуває вигляду

$$v' + v\cos x = 0,$$

тобто є рівнянням з відокремлюваними змінними. Розв'язуємо його.

$$\frac{dv}{dx} = -v\cos x, \quad \frac{dv}{v} = -\cos x dx, \quad \int\frac{dv}{v} = -\int\cos x dx, \quad \ln|v| = -\sin x + C.$$ На функцію $v(x)$ накладемо ще умову: $C = 0.$ Тоді із попередньої рівності маємо

$$v = e^{-\sin x}.$$

Далі розв'язуємо рівняння вигляду (1.21) для заданого прикладу:

$$u'v = \sin x\cos x, \quad u'e^{-\sin x} = \sin x\cos x, \quad \frac{du}{dx} = \sin x\cos x e^{\sin x},$$

$$du = \sin x\cos x e^{\sin x}dx, \quad u = \int\sin x\cos x\, e^{\sin x}dx.$$

Знайдемо інтеграл окремо. Нехай $\sin x = z, \quad dz = \cos x dx.$ Тоді дістаємо інтеграл, який знаходимо інтегруючи частинами:

$$\int ze^z dz = \begin{vmatrix} u_1 = z, & du_1 = dz, \\ dv_1 = e^z dz, & v_1 = e^z \end{vmatrix} = ze^z - \int e^z dz = ze^z - e^z + C.$$

Отже,

$$u = e^{\sin x}(\sin x - 1) + C.$$

Оскільки $y = uv$, то маємо

$$y = \left(e^{\sin x}(\sin x - 1) + C\right)e^{-\sin x}, \quad y = \sin x - 1 + Ce^{-\sin x}.$$

Використаємо початкову умову для знаходження сталої C. Маємо: $-1 = \sin 0 - 1 + Ce^{\sin 0}, \quad C = 0.$ Таким чином, розв'язок задачі Коші для заданого рівняння має вигляд

$$y = \sin x - 1.$$

Диференціальні рівняння Бернуллі

Рівняннями Бернуллі називають рівняння вигляду

$$y' + p(x)y = y^k q(x), \tag{1.22}$$

де $k-$ будь-яке дійсне число таке, що $k \neq 0, k \neq 1.$ Якщо $k=0$ або $k=1$, то рівняння (1.22) набуває відповідно вигляду

$$y' + p(x)y = q(x), \quad y' = (q(x) - p(x))y,$$

тобто є або лінійним рівнянням, або рівнянням з відокремлюваними змінними.

Рівняння Бернуллі зводиться до лінійного диференціального рівняння. Запишемо рівняння (1.22) у вигляді

$$\frac{y'}{y^k} + p(x)\frac{1}{y^{k-1}} = q(x). \tag{1.23}$$

Покладемо

$$\frac{1}{y^{k-1}} = z\,. \tag{1.24}$$

Тоді

$$y^{-k+1} = z, \quad z' = (-k+1)y^{-k}y' = (-k+1)\frac{y'}{y^k}, \quad \frac{y'}{y^k} = \frac{z'}{1-k}$$

Рівняння (1.23) набуває вигляду

$$\frac{z'}{1-k} + p(x)z = q(x), \quad z' + (1-k)\,p(x) = (1-k)q(x),$$

тобто є лінійним диференціальним рівнянням по z. Розв'язавши це рівняння, знайдемо функцію $z(x)$. Повертаємось до шуканої функції (формула (1.24)) і знаходимо розв'язок диференціального рівняння Бернуллі

$$y = \frac{1}{\sqrt[k-1]{z(x)}}\,.$$

Приклад 4. Знайти розв'язок задачі Коші для диференціального рівняння

$$xy' - 2y - x^2\sqrt{y} = 0$$

при умові, що $y(1) = 1.$

Розв'язання. Зробимо просте перетворення при $x = 0$ Маємо

$$y' - \frac{2}{x}y = x\sqrt{y}.$$

Це - диференціальне рівняння Бернуллі з $k = \frac{1}{2}$. Розв'язок шукаємо у вигляді $y = u(x)v(x)$. Маємо

$$u'v + uv' - \frac{2}{x}uv = x\sqrt{uv}, \quad u'v + u\left(v' - \frac{2}{x}v\right) = x\sqrt{uv}.$$

Покладаємо

$$v' - \frac{2}{x}v = 0$$

і із попереднього рівняння маємо друге диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними

$$u'v = x\sqrt{uv}\,.$$

Розв’язуємо перше рівняння:

$$\frac{dv}{dx} - \frac{2}{x}v = 0, \quad \frac{dv}{v} = \frac{2dx}{x}, \quad \int\frac{dv}{v} = 2\int\frac{dx}{x}, \quad \ln|v| = 2\ln|x| + C\,.$$

Нехай $C = 0$. Тоді дістаємо

$$v = x^2\,.$$

Друге диференціальне рівняння набуває вигляду

$$u'x^2 = x\sqrt{ux^2}\,.$$

Розв’язуємо це рівняння:

$$\frac{du}{dx} = \sqrt{u}, \ \frac{du}{\sqrt{u}} = dx, \quad \int\frac{du}{\sqrt{u}} = \int dx, \quad 2\sqrt{u} = x + C, \quad u = \left(\frac{x+C}{2}\right)^2.$$

Оскільки $y = uv,$ то маємо

$$y = \frac{x^2(x+C)^2}{4}\,.$$

Використаємо початкову умову. Дістаємо $1 = \frac{1}{4}(1+C)^2$. Звідки маємо $C^{(1)} = 1, \quad C^{(2)} = -3$, тобто дістаємо дві функції

$$y_1 = \frac{x^2(x+1)^2}{4} \text{ та } y_2 = \frac{x^2(x-3)^2}{4}\,.$$