Практична робота 23-24

Тема: ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

Мета: Освоїти методику розв'язування диференціальних рівнянь вищих порядків

Короткі теоретичні відомості

Диференціальні рівняння другого порядку мають вигляд

$$F(x, y, y', y'') = 0. \qquad (1)$$

Розглянемо типи диференціальних рівнянь, які зводяться до диференціальних рівнянь першого порядку. Це -так звані диференціальні рівняння, що допускають пониження порядку.

Диференціальні рівняння, що розв'язані відносно другої похідної, права частина яких залежить тільки від x

Рівняння такого типу мають вигляд

$$y'' = f(x). \qquad (2)$$

Схема розв'язування

1. Представляємо похідну y'' у вигляді

$$y'' = \frac{dy'}{dx}.$$

Звідки $\dfrac{dy'}{dx} = f(x), \quad dy' = f(x)dx$.

2. Інтегруємо обидві частини рівності:

$$\int dy' = \int f(x)dx, \quad y' = \int f(x)dx + C_1.$$

3. Повторюємо цю процедуру:

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad dy = y'dx, \quad y = \int\left(\int f(x)dx + C_1\right)dx,$$

$$y = \iint f(x)dxdx + C_1x + C_2.$$

Диференціальні рівняння другого порядку, що не містять явно функцію $y(x)$

Рівняння такого типу мають вигляд

$$F(x, y', y'') = 0. \qquad (3)$$

Схема розв'язування

1. Вводимо заміну

$$y' = p(x),$$

де $p(x)$ – диференційовна функція від x.

2. Знаходимо другу похідну:

$$y'' = \frac{dp}{dx}.$$

3. Тоді рівняння (2.3) набуває вигляду

$$F\left(x, p, \frac{dp}{dx}\right) = 0,$$

тобто маємо диференціальне рівняння першого порядку. Порядок знизився. Розв’язок цього рівняння має вигляд

$$p = p(x, C_1).$$

4. Враховуємо, що $p = \frac{dy}{dx}$. Маємо рівняння з відокремлюваними змінними: $\frac{dy}{dx} = p(x, C_1)$.
5. Звідки

$$dy = p(x, C_1)dx.$$

Дістали диференціальне рівняння вигляду (2.2). Знаходимо його розв'язок:

$$y = \int p(x, C_1)\, dx + C_2.$$

Диференціальні рівняння другого порядку, що не містять явно незалежної змінної x

Диференціальні рівняння такого типу мають вигляд

$$F(y, y', y'') = 0. \qquad (4)$$

Схема розв'язування

1. Зробимо заміну

$$y' = p(y),$$

де $p(y)$ – диференційовна функція від y.

2. Знаходимо

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}.$$

3. Рівняння (2.4) набуває вигляду

$$F\left(y, p, p\frac{dp}{dy}\right) = 0. \qquad (5)$$

Дістали диференціальне рівняння першого порядку - тобто порядок знизився.

4. Розв'язок цього рівняння має вигляд:

$$p = p(y, C_1).$$

5. Враховуємо, що $p = \frac{dy}{dx}$. Тоді із попередньої рівності маємо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dy}{dx} = p(y, C_1).$$

6. Відокремлюємо змінні та знаходимо розв'язок:

$$x = \int \frac{dy}{p(y, C_1)} + C_2.$$

Зауваження. При заміні

$$y' = p(y), \quad y'' = p\frac{dp}{dy}$$

у диференціальному рівнянні .(2.5) можуть з'явитися окремі розв'язки, що не містяться у загальному розв'язку.

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' = e^{3x}.$$

Розв'язання. Це –рівняння вигляду (2.2). Маємо

$$\frac{dy'}{dx} = e^{3x}, \quad dy' = e^{3x}dx, \quad \int dy' = \int e^{3x}dx, \quad y' = \frac{1}{3}e^{3x} + C_1.$$

Тоді

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}e^{3x} + C_1, \quad dy = \left(\frac{1}{3}e^{3x} + C_1\right)dx, \ \int dy = \frac{1}{3}\int e^{3x}dx + C_1\int dx.$$

Отже, загальний розв'язок заданого диференціального рівняння має вигляд

$$y = \frac{1}{9}e^{3x} + C_1x + C_2.$$

Приклад 2. Знайти розв'язок задачі Коші диференціального рівняння

$$y''x\ln x = y',$$

що задовольняє початкові умови $y(e) = 2, \quad y'(e) = 3$.

Розв'язання. Це – диференціальне рівняння другого порядку, що не містить явно y, тобто вигляду (2.3). Зробимо заміну:

$$y' = p(x), \quad y'' = p'(x).$$

Задане рівняння набуває вигляду:

$$\frac{dp}{dx}x\ln x = p \cdot$$

Це – диференціальне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними. Розв'язуємо його

$$\frac{dp}{p} = \frac{dx}{x\ln x}, \quad \int\frac{dp}{p} = \int\frac{dx}{x\ln x}, \quad \ln|p| = \ln|\ln x| + \ln|C_1|, \quad p = C_1\ln x.$$

Використовуємо початкову умову: $y'(e) = 3$. А саме, підставляємо у вираз $p = C_1\ln x$ замість x значення e, а замість p значення 3, оскільки $p = y'$. Маємо $3 = C_1\ln e$. Звідки $C_1 = 3$. Тоді вираз $p = C_1\ln x$ набуває вигляду

$$p = 3\ln x.$$

Але $p = y'$ і дістаємо диференціальне рівняння вигляду (2.2)

$$y' = 3\ln x.$$

Маємо: $dy = 3\ln xdx$, $y = 3\int\ln xdx$.

Інтеграл знаходимо, інтегруючи частинами. Нехай

$$u = \ln x, dv = dx, du = \frac{dx}{x}, v = x.$$

Тоді маємо

$$y = 3\left[x\ln x - \int x\frac{\ln x}{x}dx\right] = 3\left(x\ln x - x\right) + C_2.$$

Використовуємо другу початкову умову: $y(e) = 2$. Тоді $2 = 3\left(e\ln e - e\right) + C_2$. Звідки $C_2 = 2$.

Отже, маємо розв'язок задачі Коші для заданого диференціального рівняння, що задовольняє задані початкові умови:

$$y = 3\left(x\ln x - x\right) + 2.$$

Приклад 3. Знайти розв'язок задачі Коші для диференціального рівняння

$$y^2 y'' = -1,$$

якщо $y(0) = 2,\ \ y'(0) = 1.$

Розв'язання. Задане рівняння – це диференціальне рівняння другого порядку, що не містить явно x, тобто вигляду (2.5). Зробимо заміну:

$$y' = p(y), \quad y'' = p\frac{dp}{dy}.$$

Дістанемо: $y^2 p\dfrac{dp}{dy} = -1, \quad pdp = -\dfrac{dy}{y^2}, \quad \int pdp = -\int\dfrac{dy}{y^2}, \quad \dfrac{p^2}{2} = \dfrac{1}{y} + C_1.$

Знайдемо сталу C_1, використовуючи , що $y' = p$ і початкові умови $y(0) = 2, y'(0) = 1.$ Маємо $\dfrac{(y')^2}{2} = \dfrac{1}{y} + C_1, \quad \dfrac{1^2}{2} = \dfrac{1}{2} + C_1, \ \ C_1 = 0$

Тоді

$$\frac{(y')^2}{2} = \frac{1}{y}, \quad (y')^2 = \frac{2}{y}, \quad y' = \pm\sqrt{\frac{2}{y}}, \quad \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\frac{2}{y}}, \quad \sqrt{y}dy = \pm\sqrt{2}dx,$$

$$\int\sqrt{y}dy = \pm\sqrt{2}\int dx, \quad \frac{2}{3}\sqrt{y^3} = \pm\sqrt{2}x + C_2.$$

Сталу C_2 визначимо із початкової умови $y(0) = 2$. Тоді

$\dfrac{2}{3}\sqrt{2^3} = \pm\sqrt{2}\cdot 0 + C_2, \quad C_2 = \dfrac{4}{3}\sqrt{2}.$ Підставляємо знайдену сталу в розв'язок і дістаємо $\dfrac{2}{3}\sqrt{y^3} = \sqrt{2}x + \dfrac{4}{3}\sqrt{2}, \quad \sqrt{2y^3} = 3x + 4.$

Отже, розв'язком задачі Коші для заданого диференціального рівняння є функція

$$y^3 = \frac{(3x+4)^2}{2}.$$