

Практична робота 25-26

Тема: Лінійні диференціальні рівняння

Мета: Освоїти методикку розв'язування лінійних диференціальних рівнянь

Короткі теоретичні відомості

Означення. Лінійним диференціальним рівнянням порядку n називається рівняння вигляду

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x), \quad (1)$$

де функції $p_1(x), \dots, p_{n-1}(x), p_n(x), f(x)$ - задані і неперервні в проміжку (a, b) .

Зокрема, якщо $n = 1$, то дістаємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку.

Якщо $f(x) \neq 0$, то рівняння (1) називається **неоднорідним** лінійним диференціальним рівнянням порядку n .

Якщо $f(x) = 0$, то рівняння

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \quad (2)$$

називається **однорідним** лінійним диференціальним рівнянням порядку n .

Позначимо через $L(y)$ ліву частину рівняння (1):

$$L(y) = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y.$$

Тоді рівняння (1) та (2) набувають вигляду

$$L(y) = f(x) \quad (3)$$

$$L(y) = 0 \quad (4)$$

Приклад 1. Знайти однорідне диференціальне рівняння, якщо фундаментальною системою є функції $y_1 = x$, $y_2 = x^2$.

Розв'язання Знаходимо визначник Вронського

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 2x^2 - x^2 = x^2.$$

При $x = 0$ маємо $W(0) = 0$. Тому задана система буде фундаментальною на проміжках $-\infty < x < 0$ та $0 < x < +\infty$.

Знаходимо $W'(x) = 2x$. Тоді рівняння (70.19) набуває вигляду

$$y'' - \frac{2x}{x^2} y' - \frac{0 \cdot x^2 - 1 \cdot 2x}{x \cdot x^2} y = 0.$$

Звідки маємо шукане диференціальне рівняння

$$y'' - \frac{2}{x} y' + \frac{2}{x^2} y = 0.$$

Загальним розв'язком цього рівняння є функція

$$y = C_1 x + C_2 x^2.$$

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0,$$

якщо відомий розв'язок $y_1 = \frac{\sin x}{x}$.

Розв'язання. Другий розв'язок шукаємо у вигляді (70.22). Знайдемо спочатку $e^{-\int p_1(x)dx}$, де $p_1(x) = \frac{2}{x}$. Маємо $e^{-2\int \frac{dx}{x}} = e^{-2\ln|x|} = x^{-2}$. Тоді

$$y_2 = \frac{\sin x}{x} \int \frac{x^{-2}}{(\sin x)^2 \cdot x^{-2}} dx = \frac{\sin x}{x} \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\frac{\sin x}{x} \cdot \operatorname{ctg} x = -\frac{\cos x}{x}.$$

Загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку дорівнює лінійній комбінації лінійно незалежних частинних розв'язків $y_1 = \frac{\sin x}{x}$, $y_2 = \frac{\cos x}{x}$, тобто

$$y = C_1 \frac{\sin x}{x} + C_2 \frac{\cos x}{x} \quad \text{або} \quad y = \frac{1}{x}(C_1 \sin x + C_2 \cos x).$$

Приклад 3. Знайти розв'язок задачі Коші для рівняння

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}$$

при умові, що $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Розв'язання. Відповідним однорідним рівнянням є рівняння

$$y'' + y = 0.$$

Розв'язками цього рівняння є функції $y_1 = \sin x$, $y_2 = \cos x$. Дійсно, знаходимо $y_1' = \cos x$, $y_1'' = -\sin x$. Тоді із однорідного рівняння дістаємо: $-\sin x + \sin x \equiv 0$. Аналогічно знаходимо $y_2' = -\sin x$, $y_2'' = -\cos x$ і $-\cos x + \cos x \equiv 0$. Розв'язки

y_1 та y_2 - лінійно незалежні, тому що $\frac{y_2}{y_1} = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x \neq \operatorname{const}$. Отже,

загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд

$$Y = C_1 \sin x + C_2 \cos x.$$

Частинний розв'язок заданого неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді (70.25):

$$\tilde{y} = C_1(x) \sin x + C_2(x) \cos x.$$

Функції $C_1(x)$, $C_2(x)$ знаходимо за формулами (69.28), де

$$W(x) = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -\sin^2 x - \cos^2 x = -1, \quad f(x) = \frac{1}{\cos x}$$

Тоді

$$C_1(x) = -\int \frac{y_2 f(x)}{W(x)} dx = \int \cos x \frac{1}{\cos x} dx = x + C_1^1,$$

$$C_2(x) = \int \frac{y_1 f(x)}{W(x)} dx = -\int \sin x \frac{1}{\cos x} dx = \ln|\cos x| + C_2^1.$$

Покладаємо сталі $C_1^1 = 0, C_2^1 = 0$. Маємо

$$C_1(x) = x, C_2(x) = \ln|\cos x|.$$

Таким чином, частинним розв'язком неоднорідного рівняння є функція

$$\tilde{y} = x \cdot \sin x + \cos x \cdot \ln|\cos x|.$$

Загальний розв'язок заданого рівняння $y = Y + \tilde{y}$, набуває вигляду

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + x \cdot \sin x + \ln|\cos x| \cdot \cos x.$$

Використаємо початкову умову $y(0) = 1$:

$$1 = C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0 + 0 + \ln \cos 0 \cdot \cos 0, \quad C_2 = 1.$$

Для того, щоб використати другу початкову умову, знайдемо похідну від загального розв'язку:

$$y' = C_1 \cos x - C_2 \sin x + \sin x + x \cos x - \frac{\sin x}{\cos x} \cos x - \ln|\cos x| \cdot \sin x.$$

Звідки $0 = C_1 \cos 0 - 1 \cdot \sin 0 + \sin 0 + 0 - \sin 0 - \ln \cos 0 \cdot \sin 0, \quad C_1 = 0$.

Отже, підставляючи в знайдений загальний розв'язок сталі $C_1 = 0, C_2 = 1$, дістаємо шуканий розв'язок задачі Коші

$$y = \cos x + x \sin x + \ln|\cos x| \cdot \cos x, \quad y = x \sin x + \cos x (1 + \ln|\cos x|).$$