

## Практичне робота 27-28

**Тема:** ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ.

**Мета:** Навчитись розв'язувати диференціальні рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами.

### Короткі теоретичні відомості

**Означення.** Диференціальне рівняння

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x), \quad (1)$$

де  $a_1, a_2$  - числа,  $f(x) \neq 0$  – неперервна на проміжку  $(a, b)$  функція, називається лінійним *неоднорідним* диференціальним рівнянням зі сталими коефіцієнтами.

**Означення.** Диференціальне рівняння

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \quad (2)$$

називається лінійним *однорідним* диференціальним рівнянням зі сталими коефіцієнтами

### **Лінійні однорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами**

Лінійне однорідне рівняння (2) має два лінійно незалежні розв'язки  $y_1(x)$  та  $y_2(x)$ , тобто такі розв'язки, що задовольняють умову

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq \text{const.}$$

**Загальний розв'язок** лінійного однорідного рівняння (2) має вигляд

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \quad (3)$$

де  $y_1, y_2$  – лінійно незалежні розв'язки рівняння (3.2),  $C_1, C_2$  – довільні сталі.

Для того, щоб знайти ці розв'язки складають характеристичне рівняння

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0, \quad (4)$$

яке дістаємо із рівняння (2) заміною  $y''$  на  $\lambda^2$ ,  $y'$  на  $\lambda$ ,  $y$  на одиницю. Це - алгебраїчне рівняння, яке має два корені, які визначаються знаком дискримінанта  $D = a_1^2 - 4a_2$ .

#### I $D > 0$

В цьому випадку корені алгебраїчного рівняння (3.4) дійсні і різні  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ .

Тоді функції  $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ ,  $y_2 = e^{\lambda_2 x}$  є лінійно незалежними розв'язками диференціального рівняння (2).

**Загальний розв'язок** диференціального рівняння (2) згідно з формулою (3.3) має вигляд

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}. \quad (5)$$

## II $D=0$

В цьому випадку корені рівняння (4) однакові  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ . Лінійно незалежними розв'язками диференціального рівняння (2) є функції  $y_1 = e^{\lambda x}$ ,  $y_2 = xe^{\lambda x}$ .

**Загальний розв'язок** диференціального рівняння (2) згідно з формулою (3) має вигляд

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{\lambda x}. \quad (6)$$

## III $D < 0$

В цьому випадку корені характеристичного рівняння (4) комплексно спряжені  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta \cdot i$ , де  $\alpha = -\frac{a_1}{2}$ ,  $\beta = \frac{\sqrt{|D|}}{2}$ ,  $i = \sqrt{-1}$ . Функції  $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$ ,  $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$  є лінійно незалежними розв'язками диференціального рівняння (2).

**Загальний розв'язок** диференціального рівняння (2) згідно з формулою (3) має вигляд

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x). \quad (7)$$

**Приклад 1.** Знайти розв'язок задачі Коші для диференціального рівняння

$$y'' - 2y' + 5y = 0$$

при умові, що  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 1$ .

**Розв'язання.** Складаємо характеристичне рівняння (4), замінюючи  $y''$  на  $\lambda^2$ ,  $y'$  на  $\lambda$ ,  $y$  на 1, і розв'язуємо його:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0, \quad D = 4 - 20 = -16 < 0.$$

Загальний розв'язок заданого диференціального рівняння має вигляд (7), де

$$\alpha = -\frac{a_1}{2} = -\frac{-2}{2} = 1, \quad \beta = \frac{\sqrt{|D|}}{2} = \frac{\sqrt{|-16|}}{2} = 2,$$

тобто

$$y = e^x (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$$

Для знаходження сталих  $C_1, C_2$  потрібно використати початкові умови. Спочатку знаходимо похідну:

$$y' = e^x (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - 2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x).$$

Тоді, враховуючи початкові умови  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 1$ , маємо

$$1 = e^0 (C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0), \quad C_1 = 1,$$

$$1 = e^0 (C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 - 2C_1 \sin 0 + 2C_2 \cos 0), \quad 1 = 1 + 2C_2, \quad C_2 = 0.$$

Підставляємо знайдені сталі у загальний розв'язок.

Дістаємо розв'язок задачі Коші для заданого рівняння при заданих початкових умовах:

$$y = e^x \cos 2x.$$

### Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами

Лінійне неоднорідне рівняння зі сталими коефіцієнтами має вигляд (3.1).

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x).$$

Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння дорівнює сумі загального розв'язку відповідного однорідного рівняння (3.2) і частинного розв'язку неоднорідного рівняння, тобто має вигляд

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + Y, \quad (3.8)$$

де  $y_1, y_2$  - лінійно незалежні розв'язки відповідного однорідного рівняння (3.2),  $Y$  - частинний розв'язок заданого неоднорідного рівняння. Частинний розв'язок у загальному випадку знаходиться за методом варіації довільних сталих - методом Лагранжа.

#### Метод Лагранжа

Частинний розв'язок шукається в тому ж вигляді, що і загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння, тільки замість сталих розглядаються функції від  $x$ . А саме,

$$Y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2. \quad (3.9)$$

Наведемо схему знаходження функцій  $C_1(x), C_2(x)$ .

1. Знаходимо функції  $C_1'(x), C_2'(x)$  із системи

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 = 0, \\ C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) = f(x). \end{cases} \quad (3.10)$$

2. Функції  $C_1(x), C_2(x)$  визначаємо за формулами

$$C_1(x) = -\int \frac{y_2(x) f(x)}{y_2' y_1 - y_1' y_2} dx, \quad C_2(x) = \int \frac{y_1(x) f(x)}{y_2' y_1 - y_1' y_2} dx. \quad (3.11)$$

#### Диференціальні рівняння з правою частиною спеціального вигляду

У деяких випадках частинний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння (3.1) можна знайти іншим методом.

Розв'язок  $Y$  шукають у вигляді, **аналогічним вигляду правої частини**  $f(x)$  диференціального рівняння (3.1) з невідомими коефіцієнтами, які знаходять зрівнюючи вирази при однакових степенях  $x$  або при виразах, що містять  $\sin \beta x$  та  $\cos \beta x$ . При цьому вигляд розв'язку  $Y$  пов'язаний з виглядом коренів характеристичного рівняння.

Нехай  $\lambda_1$  та  $\lambda_2$  - корені відповідного характеристичного рівняння (3.4).

Розглянемо частинні випадки вигляду правої частини  $f(x)$  диференціального рівняння (3.1).

$$\text{I } \underline{f(x) = P_n(x)}, \quad (3.12)$$

де  $P_n(x)$  - многочлен степеня  $n$ .

а) Нехай  $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$ . Тоді частинний розв'язок шукають у вигляді многочлена степеня  $n$ , що містить усі степені  $x$ , починаючи із  $n$

$$Y = A_1 x^n + A_2 x^{n-1} + \dots + A_{n-1} x + A_n. \quad (3.13)$$

Невідомі коефіцієнти  $A_k, k=1, \dots, n$ , потрібно визначити.

б) Один із коренів характеристичного рівняння (3.4) є нуль:  $\lambda_1 = 0$  або  $\lambda_2 = 0$ . Тоді частинний розв'язок шукають у вигляді

$$Y = (A_1 x^n + A_2 x^{n-1} + \dots + A_{n-1} x + A_n) x. \quad (3.14)$$

$$\text{II } \underline{f(x) = e^{kx} P_n(x).}_-$$

а) Якщо жоден із коренів характеристичного рівняння (3.4) не співпадає із числом  $k: k \neq \lambda_1, k \neq \lambda_2$ , то частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$Y = (A_1 x^n + A_2 x^{n-1} + \dots + A_{n-1} x + A_n) e^{kx}. \quad (3.16)$$

б) Якщо один із коренів характеристичного рівняння (3.4) співпадає із  $k$ , наприклад,  $k = \lambda_1, k \neq \lambda_2$ , то частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$Y = (A_1 x^n + A_2 x^{n-1} + \dots + A_{n-1} x + A_n) x e^{kx}. \quad (3.17)$$

в) Якщо два корені характеристичного рівняння (3.4) співпадають із числом  $k: k = \lambda_1 = \lambda_2$ , то частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$Y = (A_1 x^n + A_2 x^{n-1} + \dots + A_{n-1} x + A_n) x^2 e^{kx}. \quad (3.18)$$

$$\text{III } \underline{f(x) = P_n(x) \cos \beta^* x + Q_m(x) \sin \beta^* x.}_-$$

де  $P_n(x), Q_m(x)$  – многочлени відповідно степеня  $n$  та  $m$ .

Знаходимо число  $l = \max\{n, m\}$ .

Складаємо так зване характеристичне число правої частини

$$k^* = \beta^* i.$$

а) Якщо  $k^*$  не співпадає з коренем характеристичного рівняння, то частинний розв'язок неоднорідного рівняння (3.1) шукаємо у вигляді

$$Y = (A_1 x^l + \dots + A_{l-1} x + A_l) \cos \beta^* x + (B_1 x^l + \dots + B_{l-1} x + B_l) \sin \beta^* x, \quad (3.20)$$

де  $A_j, B_j, j=1, 2, \dots, l$ , невідомі коефіцієнти.

б) Якщо  $k^*$  співпадає з коренем характеристичного рівняння, то частинний розв'язок неоднорідного рівняння (3.1) шукаємо у вигляді

$$Y = (A_1 x^l + \dots + A_{l-1} x + A_l) x \cos \beta^* x + (B_1 x^l + \dots + B_{l-1} x + B_l) x \sin \beta^* x. \quad (3.21)$$

$$\text{IV. } \underline{f(x) = e^{\alpha^* x} (P_n(x) \cos \beta^* x + Q_m(x) \sin \beta^* x).}_-$$

Знаходимо число  $l = \max\{n, m\}$ . Складаємо так зване характеристичне число правої частини

$$k^* = \alpha^* + \beta^* i$$

і порівнюємо  $k^*$  із коренями характеристичного рівняння (3.4).

**а)** Якщо характеристичне число правої частини не співпадає з коренем характеристичного рівняння (3.4), тобто

$$\alpha^* + \beta^* i \neq \lambda_1 = \alpha + \beta i,$$

то частинний розв'язок неоднорідного рівняння (3.1) шукаємо у вигляді

$$Y = e^{\alpha^* x} ((A_1 x^l + \dots + A_{l-1} x + A_l) \cos \beta^* x + (B_1 x^l + \dots + B_{l-1} x + B_l) \sin \beta^* x). \quad (3.23)$$

**б)** Якщо характеристичне число правої частини співпадає з коренем характеристичного рівняння (3.4), тобто

$$\alpha^* + \beta^* i = \lambda_1 = \alpha + \beta i,$$

то частинний розв'язок неоднорідного рівняння (3.1) шукаємо у вигляді

$$Y = e^{\alpha^* x} ((A_1 x^l + \dots + A_{l-1} x + A_l) \cos \beta^* x + (B_1 x^l + \dots + B_{l-1} x + B_l) \sin \beta^* x)x. \quad (3.24)$$

**Зауваження.** У випадках III та IV може бути, що один із многочленів або  $P_n(x) = 0$ , або  $Q_m(x) = 0$ . В цьому випадку число  $l = m$  або  $l = n$  відповідно. Розв'язок  $Y$  тим не менше шукаємо у загальному вигляді (3.21) - (3.24), який містить  $\cos \beta^* x$ ,  $\sin \beta^* x$ .

#### **Схема знаходження частинного розв'язку лінійного неоднорідного рівняння**

1. Записуємо відповідне однорідне рівняння вигляду (3.2).
2. Записуємо його характеристичне рівняння (3.4).
3. Знаходимо корені характеристичного рівняння і записуємо загальний розв'язок однорідного рівняння відповідно у вигляді або (3.5), або (3.6), або (3.7).
4. Перевіряємо, чи є права частина неоднорідного рівняння (3.1) спеціального вигляду I-IV. Якщо права частина спеціального вигляду, то переходимо до п. 5. Якщо ж -ні, то частинний розв'язок шукаємо методом Лагранжа.
5. В залежності від коренів характеристичного рівняння, шукаємо розв'язок неоднорідного рівняння відповідно у вигляді (3.13), (3.14), або (3.16)--(3.18), або (3.20), (3.21), або (3.23), (3.24).
6. Для визначення невідомих коефіцієнтів  $A_j, B_j$  ( $j=1,2,\dots,l$ ) у цих виразах знаходимо похідні  $Y', Y''$ , підставляємо  $Y, Y', Y''$  в задане неоднорідне рівняння (3.1) і зрівнюємо вирази при однакових степенях  $x$  або при  $x^k \cos \beta^* x$ ,  $x^k \sin \beta^* x$ ,  $k = 0, 1, \dots, l$ .
7. Знайдені числа підставляємо у відповідний вигляд частинного розв'язку. Маємо  $Y$ .
8. Шуканий загальний розв'язок неоднорідного рівняння (3.1) дорівнює сумі загального розв'язку відповідного однорідного рівняння і знайденого частинного розв'язку неоднорідного рівняння.

**Приклад 2.** Знайти розв'язок задачі Коші диференціального рівняння

$$y'' - y = xe^x.$$

при умові, що  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ .

**Розв'язання.**

1. Записуємо відповідне однорідне рівняння

$$y'' - y = 0.$$

2. Замінюємо  $y''$  на  $\lambda^2$ ,  $y$  на 1. Маємо характеристичне рівняння

$$\lambda^2 - 1 = 0.$$

3. Знаходимо корені цього рівняння:  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = 1$ . Корені - різні, дійсні.

Отже, розв'язок однорідного рівняння має вигляд (3.5), тобто

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x.$$

4. Записуємо праву частину заданого неоднорідного рівняння:

$$f(x) = xe^x,$$

тобто, маємо праву частину спеціального вигляду II, де  $P_n(x) = x$ ,  $n = 1$ .

Число  $k = 1$ .

5. Число  $k = \lambda_2 = 1$  співпадає з одним із коренів характеристичного рівняння. Тому розв'язок шукаємо у вигляді (3.17):

$$Y = (A_1 x + A_2) x e^x.$$

6. Знаходимо  $Y''$ . Маємо

$$Y' = (2A_1 x + A_2 + A_1 x^2 + A_2 x) e^x,$$

$$Y'' = (2A_1 + 2A_1 x + A_2 + 2A_1 x + A_2 + 2A_1 x^2 + A_2 x) e^x.$$

Підставляємо  $Y, Y''$  в задане рівняння:

$$(2A_1 x^2 + 4A_1 x + A_2 x + 2A_1 + 2A_2) e^x - (A_1 x^2 + A_2 x) e^x = x e^x.$$

Скоротивши на  $e^x \neq 0$ , маємо

$$4A_1 x + 2A_1 + 2A_2 = x.$$

Зрівнюємо коефіцієнти при  $x$  у першому степені та при  $x^0$ . Дістаємо

$$4A_1 = 1, \quad 2A_1 + 2A_2 = 0, \quad A_1 = \frac{1}{4}, \quad A_2 = -\frac{1}{4}.$$

7. Знайдені числа підставляємо у вираз для  $Y$ :

$$Y = \frac{1}{4}(x^2 - x)e^x.$$

8. Шуканий загальний розв'язок заданого неоднорідного рівняння дорівнює сумі загального розв'язку відповідного однорідного рівняння і знайденого частинного розв'язку неоднорідного рівняння, тобто

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + \frac{1}{4}(x^2 - x)e^x.$$

9. Визначимо сталі  $C_1, C_2$  із початкових умов. Знаходимо спочатку

$$y' = -C_1 e^{-x} + C_2 e^x + \frac{1}{4}(2x - 1 + x^2 - x)e^x.$$

Тоді

$$0 = C_1 + C_2, \quad 1 = -C_1 + C_2 - \frac{1}{4}, \quad C_2 = \frac{5}{8}, \quad C_1 = -\frac{5}{8}.$$

10. Отже, розв'язком задачі Коші для заданого рівняння є функція

$$y = \frac{5}{8}e^{-x} + \frac{1}{8}(2x^2 - 2x - 5)e^x.$$

**Приклад 3.** Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' - 7y' + 6y = 114 \sin x.$$

**Розв'язання.**

1. Записуємо відповідне однорідне рівняння

$$y'' - 7y' + 6y = 0.$$

2. Характеристичне рівняння має вигляд

$$\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0.$$

3. Знаходимо корені цього рівняння:  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 6$ . Корені - дійсні, різні.

Отже, розв'язок однорідного рівняння має вигляд (3.5):

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{6x}.$$

4. Записуємо праву частину заданого неоднорідного рівняння :

$$f(x) = 114 \sin x,$$

тобто права частина заданого рівняння має вигляд III, де  $P_n(x) = 0$ ,  $Q_m(x) = 114$ ,  $m = 0$ . Тоді  $l = 0$ .

5. Характеристичне число правої частини  $k^* = \beta^* i$ . В нашому випадку

$\beta^* = 1$ ,  $k^* = i$ , отже,  $k^*$  не співпадає з коренями характеристичного рівняння  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 6$ . Тому розв'язок шукаємо у вигляді (3.20):

$$Y = A \cos x + B \sin x.$$

6. Знаходимо похідні

$$Y' = -A \sin x + B \cos x, \quad Y'' = -A \cos x - B \sin x$$

і підставляємо  $Y, Y', Y''$  в задане рівняння:

$$-A \cos x - B \sin x - 7(-A \sin x + B \cos x) + 6(A \cos x + B \sin x) = 114 \sin x,$$

$$(5A - 7B) \cos x + (7A + 5B) \sin x = 114 \sin x.$$

Зрівнюючи коефіцієнти при  $\cos x$  та  $\sin x$ , маємо

$$5A - 7B = 0, \quad 7A + 5B = 114, \quad B = 5, \quad A = 7.$$

7. Знайдені числа підставляємо в шуканий частинний розв'язок. Дістаємо

$$Y = 7 \cos x + 5 \sin x.$$

8. Шуканий загальний розв'язок заданого неоднорідного рівняння має вигляд

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{6x} + 7 \cos x + 5 \sin x.$$