Практична робота 29-30

Тема:Лінійні системи другого порядку.
Мета: Освоїти методику розв’язування систем диференціальних рівнянь.

Короткі теоретичні відомості

Лінійна **однорідна система** другого порядку має вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = p_{11}(t)x + p_{12}(t)y, \\ \dfrac{dy}{dt} = p_{21}(t)x + p_{22}(t)y. \end{cases} \tag{1}$$

Розв’язком системи (1) є дві функції $x(t)$ та $y(t)$. Перший розв’язок це x_1, y_1, другий розв’язок x_2, y_2. Розв’язком системи (1) є лінійна комбінація

$$x = C_1x_1(t) + C_2x_2(t),$$
$$y = C_1y_1(t) + C_2y_2(t).$$

Розглянемо **систему другого порядку** зі сталими коефіцієнтами

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_1x + b_1y, \\ \dfrac{dy}{dt} = a_2x + b_2y. \end{cases} \tag{2}$$

Розв’язок такої системи можна звести до розв’язку диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Покажемо, як саме.
1. Знайдемо похідну від обох частин першого рівняння системи (2):

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a_1\frac{dx}{dt} + b_1\frac{dy}{dt}. \tag{3}$$

2. Використовуємо друге рівняння системи:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a_1\frac{dx}{dt} + b_1(a_2x + b_2y). \tag{4}$$

3. Із першого рівняння системи маємо

$$y = \frac{1}{b_1}\left(\frac{dx}{dt} - a_1x\right). \tag{5}$$

4. Рівняння (4) набуває вигляду

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a_1\frac{dx}{dt} + b_1a_2x + b_2\left(\frac{dx}{dt} - a_1x\right).$$

Тобто маємо лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - (a_1 + b_2)\frac{dx}{dt} + (a_1b_2 - b_1a_2)x = 0.$$

Вигляд розв'язку $x(t)$ залежить від коренів відповідного характеристичного рівняння.

5. Знаходимо $x(t)$ і обчислюємо $y(t)$ за формулою (5).

6. Тим самим знаходимо загальний розв'язок системи лінійних диференціальних рівнянь другого порядку.

Приклад. Знайти загальний розв'язок системи

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y. \end{cases}$$

Розв'язання. Знаходимо похідну від обох частин першого рівняння системи і використовуємо друге рівняння системи:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = 2\frac{dx}{dt} + 3x + 4y.$$

Із першого рівняння маємо

$$y = \frac{dx}{dt} - 2x.$$

Тоді попереднє рівняння набуває вигляду

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\frac{dx}{dt} + 3x + 4\frac{dx}{dt} - 8x.$$

Отже, отримали лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 6\frac{dx}{dt} + 5x = 0.$$

Розв'язуємо його. Характеристичне рівняння $\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$ має корені дійсні і різні корені $\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 5.$ Тоді розв'язок має вигляд

$$x = C_1e^t + C_2e^{5t}.$$

Знаходимо

$$y = \frac{dx}{dt} - 2x = C_1e^t + 5C_2e^{5t} - 2C_1e^t - 2C_2e^{5t} = -C_1e^t + 3C_2e^{5t}.$$

Отже, загальним розв'язком заданої системи є

$$x = C_1e^t + C_2e^{5t}, \quad y = -C_1e^t + 3C_2e^{5t}.$$

Лінійна не**однорідна система** другого порядку має вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_1x + b_1y + f_1(t), \\ \dfrac{dy}{dt} = a_2x + b_2y + f_2(t). \end{cases}$$

Розв’язок цієї системи зводиться до розв’язку неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами.