

## Самостійна робота 16

**Тема:** Техніка розв'язування диференціальних рівнянь першого порядку.

**Мета:** Навчитись розв'язувати диференціальні рівняння першого порядку.

### Короткі теоретичні відомості

#### 1. Основні поняття

*Означення.* Диференціальним рівнянням називається рівняння, яке містить похідну шуканої функції. Найбільший порядок похідних називається порядком диференціального рівняння.

У загальному випадку диференціальне рівняння  $n$ -го порядку має вигляд

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. (1)$$

Далі замість слів «диференціальні рівняння» використовуватимемо позначення ДР.

<b>Приклад.</b>	$y' = xy$	— ДР першого порядку;
	$y'' + \sin y = 0$	— ДР другого порядку;
	$y'''y' - y''y' = 0$	— ДР третього порядку.

Диференціальне рівняння може визначити функцію багатьох змінних.

**Приклад.** Рівняння з частинними похідними

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot x_1 - \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot x_2 = 0$$

має розв'язок

$$f(x_1, x_2) = K x_1^\alpha x_2^{1-\alpha},$$

який називається *функцією Кобба—Дугласа*.

#### 2. Задача Коші

Розглянемо ДР  $y' = f(x, y)$ .

*Означення.* Задача пошуку розв'язку  $y = \varphi(x)$ , що задовольняє умови

$$y = y_0 \text{ при } x = x_0$$

називається *задачею Коші*. Умови (8.4) називаються *початковими умовами*, числа  $y_0, x_0$  називаються *початковими значеннями*.

### 3. Диференціальне рівняння з відокремленими та відокремлюваними змінними.

*Означення.* ДР виду

$$M(x)dx + N(y)dy = 0 \quad (2)$$

називається ДР з *відокремленими змінними*. Загальний розв'язок ДР подається так:

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C, \quad (3)$$

а розв'язок задачі Коші з початковими умовами  $x = x_0, y = y_0$  має вигляд

$$\int_{x_0}^x M(x)dx + \int_{y_0}^y N(y)dy = 0. \quad (4)$$

ДР з відокремленими змінними зводиться до квадратури, тобто до знаходження інтегралів.

**Приклад.** Знайдемо загальний розв'язок ДР  $2xdx + 2ydy = 0$ .

● Інтегруючи, дістаємо інтеграл ДР  $x^2 + y^2 = C$ .

Інтегральними кривими є концентричні кола з центром у початку координат.

*Означення.* Диференціальне рівняння виду

$$N_1(y)M_1(x)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0 \quad (5)$$

називається ДР з *відокремлюваними змінними*, тобто рівнянням, що зводяться до ДР з відокремленими змінними.

Поділивши рівняння (5) на  $N_1(y)M_2(x)$ , дістанемо ДР з відокремленими змінними:

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0. \quad (6)$$

Рівняння (5) має розв'язок  $y = y_k, x = x_j$ , де  $y = y_k, x = x_j$  є розв'язками рівнянь  $N_1(y) = 0, M_2(x) = 0$ .

Аналогічно ДР виду

$$y' = f_1(x)f_2(y) \quad (7)$$

є ДР з відокремлюваними змінними. Рівняння (7) можна записати у вигляді (2):

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x)f_2(y), \quad \frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx. \quad (8)$$

Рівняння (7) має розв'язок виду  $y = y_k$ , де  $f_2(y_k) = 0$ .

**Приклад.** Знайдемо загальний розв'язок ДР  $y' = 2xy^2$ .

● Запишемо рівняння у вигляді

$$\frac{dy}{dx} = 2xy^2, \quad \frac{dy}{y^2} = 2xdx, \quad \int \frac{dy}{y^2} = \int 2xdx$$

або

$$-\frac{1}{y} = x^2 + C, \quad y = -\frac{1}{x^2 + C}.$$

#### 4. Однорідне диференціальне рівняння

*Означення.* Диференціальне рівняння називається *однорідним*, якщо його можна подати у вигляді

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \quad (9)$$

Воно за допомогою заміни змінної  $\frac{y}{x} = u, y = ux$  зводиться до ДР з відокремлюваними змінними  $u'x + u = f(u), x \frac{du}{dx} = f(u) - u$ , а знаходження розв'язку зводиться до квадратур  $\int \frac{du}{f(u) - u} = \int \frac{dx}{x}$ .

**Приклад.** Знайдемо загальний розв'язок ДР  $y' = \frac{y}{x}$ .

● Узявши  $y = ux$ , дістанемо ДР і його загальний розв'язок  $u'x + u = u, u'x = 0, u = C, y = Cx$ .

**Приклад.** Знайдемо загальний розв'язок ДР  $y' = \frac{y^2}{x^2}$ .

● Візьмемо  $y = ux$  і одержимо ДР для змінної

$$u'x + u = u^2, \quad x \frac{du}{dx} = u^2 - u, \quad \frac{du}{u^2 - u} = \frac{dx}{x}.$$

Інтегруючи ДР з відокремленими змінними, знаходимо загальний розв'язок:  $\int \frac{du}{u^2 - u} = \int \frac{dx}{x}, \ln \left| \frac{u-1}{u} \right| = \ln x + \ln C, \frac{u-1}{u} = Cx, u = \frac{1}{1-Cx}, \frac{y}{x} = \frac{1}{1-Cx}, y = \frac{x}{1-Cx}$ .

Однорідне ДР  $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$  не змінюється при перетворенні подібності:

$$y = ky_1, \quad x = kx_1, \quad k = \text{const} \quad (10)$$

ДР  $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$  перетворюється на ДР  $\frac{dky_1}{dkx_1} = f\left(\frac{ky_1}{kx_1}\right), \frac{dy_1}{dx_1} = f\left(\frac{y_1}{x_1}\right)$ .

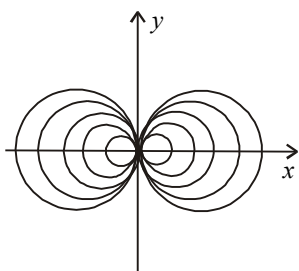
При перетворенні подібності (10) інтегральні криві рівняння (9) знову переходять в інтегральні криві рівняння (9). Усі інтегральні криві однорідного ДР подібні з центром подібності в початку координат. Якщо будь-яка інтегральна крива, що лежить в деякому секторі, входить у початок координат, то всі інтегральні криві в цьому секторі теж входять у початок координат. Якщо одна із інтегральних кривих замкнена, то всі інтегральні криві замкнені.

**Приклад.** Побудуємо інтегральні криві однорідного ДР

$$y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}, \quad y' = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1}{2\left(\frac{y}{x}\right)}$$

● Скориставшись заміною  $y = ux, \quad y' = u'x + u$ , дістанемо ДР:

$$u'x = \frac{u^2 - 1}{2u} - u, \quad u'x = -\frac{1 + u^2}{2u}, \quad \frac{2udu}{u^2 + 1} = -\frac{dx}{x}, \quad \int \frac{2udu}{u^2 + 1} = -\int \frac{dx}{x}, \quad \ln(1 + u^2) = -\ln|x| + \ln 2C.$$



Остаточно знаходимо інтеграл ДР:

$$1 + u^2 = \frac{2C}{x}, \quad 1 + \frac{y^2}{x^2} = \frac{2C}{x}, \\ x^2 + y^2 = 2Cx, \quad (x - C)^2 + y^2 = C^2.$$

Рис. 1 Інтегральні криві є колами, що проходять через початок координат (рис. 1). Усі інтегральні криві замкнені і входять у початок координат.

## 5. Диференціальні рівняння у повних диференціалах

*Означення.* Диференціальне рівняння  $du = 0$  або

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = 0, \quad u = u(x, y) \quad (11)$$

називається ДР у повних диференціалах. Це ДР має інтеграл

$$u(x, y) = C = \text{const} \quad (12)$$

ДР виду

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (13)$$

є ДР у повних диференціалах, якщо виконується тотожність

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}. \quad (14)$$

При цьому знаходимо функцію  $u(x, y)$  із рівнянь

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y). \quad (15)$$

В окремому випадку можна скористатись формулою

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x M(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy. \quad (16)$$

Значення  $x_0, y_0$  можуть бути довільними числами.

Розв'язок задач Коші з початковими умовами  $x = x_0, y = y_0$  визначається рівнянням  $u(x, y) = 0$ , де  $u(x, y)$  подається формулами (16).

**Приклад.** Розв'яжемо ДР  $(2x + 2y)dx + (2x - 2y)dy = 0$ .

● Перевіримо спочатку виконання умови (14):

$$M(x, y) = 2x + 2y, \quad N(x, y) = 2x - 2y, \quad \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = 2, \quad \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = 2.$$

Умова (14) виконується, і знаходимо функцію  $u(x, y)$  із рівнянь (16). При  $x_0 = 0, y_0 = 0$  маємо  $u(x, y) = \int_0^x 2x dx + \int_0^y (2x - 2y) dy = x^2 + 2xy - y^2$ .

Отже, ДР має інтеграл  $x^2 + 2xy - y^2 = C$ .

Л. Ейлер довів, що для будь-якого ДР першого порядку

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0.$$

для якого не виконується умова (14), існує інтегрувальний множник  $\mu = \mu(x, y)$  такий, що ДР  $\mu(x, y)M(x, y)dx + \mu(x, y)N(x, y)dy = 0$  є ДР у повних диференціалах. Із умови виду (14)

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} N - \frac{\partial \ln \mu}{\partial y} M = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \quad (18)$$

шукаємо інтегрувальний множник  $\mu$ , а потім інтегруємо рівняння (17).

**Приклад.** Знайдемо інтегрувальний множник для ДР

$$(x^2 - 2y)dx + (-x)dy = 0.$$

● Маємо:  $M(x, y) = x^2 - 2y, N(x, y) = -x, \frac{\partial M}{\partial y} = -2, \frac{\partial N}{\partial x} = -1$ .

Умова (14) не виконується. Розглядуване ДР не є рівнянням у повних диференціалах. Складемо рівняння (18).

Припустимо, що інтегрувальний множник  $\mu$  залежить тільки від  $x$ . Дістанемо рівняння  $\frac{d \ln \mu(x)}{dx} = \frac{1}{x}$ ,  $\ln \mu(x) = \ln|x|$ ,  $\mu(x) = x$ . Домножимо початкове ДР на  $x$  і дістанемо рівняння в повних диференціалах:  $(x^3 - 2xy)dx - x^2 dy = 0$ , яке легко зінтегрувати:

$$\int_0^x x^3 dx + \int_0^y (-x^2) dy = C, \quad \frac{x^4}{4} - x^2 y = C.$$