**Самостійна робота №19**

**Тема: Лінійні однорідні системи першого порядку зі сталими коефіцієнтами.**

**Мета: Освоїти методику розв'язування лінійних однорідних систем першого порядку зі сталими коефіцієнтами.**

## Короткі теоретичні відомості

Лінійна однорідна система першого порядку зі сталими коефіцієнтами має вигляд

$$\begin{aligned} y_1' &= p_{11}y_1 + p_{12}y_2 + \ldots + p_{1n}y_n, \\ y_2' &= p_{21}y_1 + p_{22}y_2 + \ldots + p_{2n}y_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' &= p_{n1}y_1 + p_{n2}y_2 + \ldots + p_{nn}y_n, \end{aligned} \tag{1}$$

де $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – невідомі функції, $p_{ij} = const, i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,n}.$ Числа $p_{ij}$ називають коефіцієнтами системи.

Введемо позначення

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \bar{y}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Тоді систему рівнянь (1) можна записати у матричній формі

$$\bar{y}' = P\bar{y}. \tag{3}$$

Розв'язок системи (3) шукаємо у вигляді

$$\bar{y} = \bar{\alpha}e^{\lambda x}, \tag{4}$$

де $\bar{\alpha}$ - $n$ - компонентний сталий вектор, $\lambda$ - скалярна величина.

Знайшовши похідну $\bar{y}' = \bar{\alpha}\lambda e^{\lambda x}$ та підставивши $\bar{y}, \bar{y}'$ у (3), дістанемо

$$\bar{\alpha}\lambda e^{\lambda x} = P\bar{\alpha}e^{\lambda x},$$

$$\lambda\bar{\alpha}e^{\lambda x} - P\bar{\alpha}e^{\lambda x} = 0,$$

$$(\lambda E - P)\,\bar{\alpha}e^{\lambda x} = 0$$

або після скорочення на функцію $e^{\lambda x} \neq 0$ маємо

$$(\lambda E - P)\bar{\alpha} = 0. \tag{5}$$

Оскільки для існування нетривіального розв'язку (4) системи (3) необхідно $\bar{\alpha} \neq 0,$ то дістаємо з (5) рівняння відносно $\lambda$:

$$|\lambda E - P| = 0. \tag{6}$$

Рівняння (6) називається характеристичним рівнянням системи (1).

Характеристичне рівняння системи має $n$-порядок. Згідно з основною теоремою алгебри, рівняння (6) має на комплексній площині $k \le n$ різних коренів $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ кратності $r_1, r_2, \ldots, r_k$ відповідно, причому $r_i \ge 1, \sum_{i=1}^{k} r_i = n$.

Нехай всі корені рівняння (6) прості, тобто $k=n$. Візьмемо довільний корінь $\lambda_i$. Тоді , згідно (5), маємо :

$$(\lambda_i E - P)\overline{\alpha}_i = 0. \qquad (7)$$

Ранг матриці $\lambda_i E - P$ дорівнює $n-1$, так як $\lambda_i$ – простий корінь. Отже, вектор $\overline{\alpha}_i$ визначається з точністю до довільного множника : $\overline{\alpha}_i = \overline{\beta}_i \cdot c_i$ ($c_i$ - скаляр) :

$$\overline{\alpha}_i = \begin{pmatrix} \beta_{1i} \\ \beta_{2i} \\ \vdots \\ \beta_{ni} \end{pmatrix} c_i, \qquad (8)$$

причому хоча б один із коефіцієнтів $\beta_{ji}$ дорівнює одиниці.

По характеру коренів характеристичного рівняння знаходять частинні лінійно незалежні розв'язки системи наступним чином :

а) кожному дійсному простому кореневі $\lambda_i$ відповідає частинний розв'язок $\overline{y}_i = \overline{\beta}_i e^{\lambda_i x}$;

б) кожній парі комплексно-спряжених простих коренів $\lambda_i$ та $\overline{\lambda}_i$ відповідають два частинні розв'язки $\overline{y}_{i1} = \mathrm{Re}\,\overline{y}_i = \mathrm{Re}\,\overline{\beta}_i e^{\lambda_i x}$ і $\overline{y}_{i2} = \mathrm{Im}\,\overline{y}_i = \mathrm{Im}\,\overline{\beta}_i e^{\lambda_i x}$.

Загальний розв'язок системи (1) має вигляд

$$\overline{y} = c_1\overline{y}_1 + c_2\overline{y}_2 + \ldots + c_n\overline{y}_n, \qquad (9)$$

де $\overline{y}_1, \overline{y}_2, \ldots, \overline{y}_n$ - лінійно незалежні розв'язки, $c_1, c_2, \ldots, c_n$ - довільні постійні.

Нехай характеристичне рівняння системи (6) має кратні корені, тобто $k<n$. Тоді серед його коренів $\lambda_i$ є хоча б один кратний корінь кратності $r_i \ge 2$. Загальний розв'язок системи (1) шукатимемо у вигляді

$$\overline{y} = B\overline{q}, \qquad (10)$$

де $B$ - квадратна матриця $n$ - порядку з невідомими елементами, $\overline{q} - n$ - компонентний вектор виду

$$\overline{q} = \begin{pmatrix} \overline{q}_1 \\ \overline{q}_2 \\ \vdots \\ \overline{q}_k \end{pmatrix}, \qquad (11)$$

$$\overline{q}_i = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ \vdots \\ x^{r_i - 1} \end{pmatrix} e^{\lambda_i x}, \qquad i = \overline{1,k}. \qquad (12)$$

Враховуючи вигляд векторів $\overline{q}_i$, неважко переконатись, що має місце рівність

$$\overline{q}' = Q\overline{q}, \qquad (13)$$

де $Q$ - цілком визначена квадратна матриця порядку $n$. Підставивши (10) в (3) з урахуванням (13), матимемо тотожність $\overline{y}' = Bq' = BQ\overline{q} \equiv PB\overline{q}$. Звідси дістаємо матричну рівність

$$BQ - PB \equiv 0 \qquad (14)$$

відносно невідомої матриці $B$, тобто $n^2$ рівнянь відносно елементів $b_{ij}$ цієї матриці. Загальний розв'язок системи (1) залежить від $n$ довільних сталих. Тому, наприклад, залишивши діагональні елементи матриці $B$ довільними, $b_{ii} = c_i, i = \overline{1,n},$ із (14) виразимо решту її елементів через довільні сталі $c_i$. Після чого загальний розв'язок системи (1) записується згідно (10).

**Приклад 1.** Розв'язати систему

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 + 4y_2, \\ y_2' &= y_1 - y_2. \end{aligned} \qquad (15)$$

**Розв'язання.** Запишемо матриці $P$ і $\lambda E - P$:

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \ \lambda E - P = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -4 \\ -1 & \lambda + 1 \end{pmatrix}.$$

Згідно (6) отримаємо характеристичне рівняння системи (15) :

$$|\lambda E - P| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -4 \\ -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 6 = 0,$$

яке має прості дійсні корені $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -2.$

Знайдемо частинний розв'язок системи $\bar{y}_1$, що відповідає ко-реневі $\lambda_1$. Для цього запишемо систему рівнянь $(\lambda_1 E - P)\bar{\alpha}_1 = 0$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \alpha_{11} - 4\alpha_{21} &= 0, \\ -\alpha_{11} + 4\alpha_{21} &= 0. \end{aligned}$$

Позначивши $\alpha_{21}$ через довільну сталу $c_1$, дістанемо $\alpha_{11} = 4\alpha_{21} = 4c_1, \quad \alpha_{21} = c_1$. Запишемо $\bar{\alpha}_1$ у вигляді $\bar{\alpha}_1 = \bar{\beta}_1 c_1$ :

$$\bar{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{21} \end{pmatrix} c_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} c_1.$$

Отже, кореневі характеристичного рівняння $\lambda_1 = 3$ відповідає частинний розв'язок $\bar{y}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3x}$.

Для кореня $\lambda_2 = -3$ отримаємо :

$$(\lambda_2 E - P)\bar{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} -4\alpha_{12} - 4\alpha_{22} &= 0, \\ -\alpha_{12} - \alpha_{22} &= 0. \end{aligned}$$

Взявши $\alpha_{12} = c_2$, знайдемо $\alpha_{22} = -c_2$. Тоді

$$\bar{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{12} \\ \beta_{22} \end{pmatrix} c_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} c_2.$$

Функція $\bar{y}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2x}$ – частинний розв'язок системи, який відповідає кореневі характеристичного рівняння $\lambda_2 = -2$.

Загальний розв'язок системи (15), згідно (9), має вигляд

$$\bar{y} = c_1 \bar{y}_1 + c_2 \bar{y}_2 = c_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3x} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2x}$$

або

$$y_1 = 4c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x},$$
$$y_2 = c_1 e^{3x} - c_2 e^{-2x}.$$

**Приклад 2.** Розв'язати систему

$$y_1' = 3y_1 - y_2,$$
$$y_2' = 5y_1 + y_2. \qquad (16)$$

**Розв'язання.** Маємо :

$$P = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda E - P = \begin{pmatrix} \lambda - 3 & 1 \\ -5 & \lambda - 1 \end{pmatrix}.$$

Характеристичне рівняння системи

$$|\lambda E - P| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 1 \\ -5 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 8 = 0$$

має прості комплексно-спряжені корені $\lambda_1 = 2 + 2i$ і $\lambda_2 = 2 - 2i$. Знайдемо частинний розв'язок системи $\bar{y}_1$, що відповідає кореню $\lambda_1$. Згідно (7) отримаємо :

$$\begin{pmatrix} -1 + 2i & 1 \\ -5 & 1 + 2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(-1 + 2i)\,\alpha_{11} + \alpha_{21} = 0,$$
$$-5\alpha_{11} + (1 + 2i)\alpha_{21} = 0.$$

Взявши $\alpha_{11} = c_1$, отримаємо $\alpha_{21} = (1 - 2i)c_1$, тобто

$$\bar{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{21} \end{pmatrix} c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - 2i \end{pmatrix} c_1.$$

Комплексний розв'язок $\bar{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - 2i \end{pmatrix} e^{(2+2i)x}$ відповідає кореню характеристичного рівняння $2 + 2i$. Використавши формулу Ейлера $e^{(a+ib)x} = e^{ax}(\cos(bx) + i\sin(bx))$, дістанемо

$$\bar{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - 2i \end{pmatrix} e^{2x}(\cos 2x + i\sin 2x) = \begin{pmatrix} \cos 2x + i\sin 2x \\ \cos 2x + i\sin 2x - 2i\cos 2x + 2\sin 2x \end{pmatrix} e^{2x} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 2x \\ \cos 2x + 2\sin 2x \end{pmatrix} e^{2x} + i \begin{pmatrix} \sin 2x \\ \sin 2x - 2\cos 2x \end{pmatrix} e^{2x}.$$

Виділивши дійсну та уявну частини з $\bar{y}_1$, отримаємо лінійно незалежні дійсні розв'язки системи:

$$\bar{y}_{11} = \begin{pmatrix} \cos\ 2x \\ \cos\ 2x + 2\sin\ 2x \end{pmatrix} e^{2x}, \qquad \bar{y}_{12} = \begin{pmatrix} \sin 2x \\ \sin 2x - 2\cos 2x \end{pmatrix} e^{2x},$$

які відповідають комплексно-спряженим кореням характеристичного рівняння $2+2i$ і $2-2i$.

Загальний розв'язок системи (16) має вигляд

$$\bar{y} = c_1 \begin{pmatrix} \cos\ 2x \\ \cos\ 2x + 2\sin\ 2x \end{pmatrix} e^{2x} + c_2 \begin{pmatrix} \sin\ 2x \\ \sin\ 2x - 2\cos\ 2x \end{pmatrix} e^{2x}$$

або

$$y_1 = c_1 e^{2x} \cos\ 2x + c_2 e^{2x} \sin\ 2x,$$
$$y_2 = c_1 e^{2x}(\cos\ 2x + 2\sin\ 2x) + c_2 e^{2x}(\sin\ 2x - 2\cos\ 2x).$$

**Приклад 3.** Розв'язати систему

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_1 + y_2, \\ y_2' &= -y_1 - 3y_{2.} \end{aligned} \qquad (17)$$

**Розв'язання.** Маємо

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad \lambda E - P = \begin{pmatrix} \lambda+1 & -1 \\ 1 & \lambda+3 \end{pmatrix}.$$

Отже, характеристичне рівняння має вигляд

$$|\lambda E - P| = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 \\ 1 & \lambda+3 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda+2)^2 = 0.$$

Отримане рівняння має дійсний корінь $\lambda_1 = -2$ кратності $r_1 = 2$. Тому будемо шукати загальний розв'язок системи (17), згідно (10), у вигляді $\bar{y} = B\bar{q}$, де $B = \begin{pmatrix} c_1 & b_{12} \\ b_{21} & c_2 \end{pmatrix}$, $c_1, c_2$ – довільні сталі, $b_{12}, b_{21}$ – невідомі елементи, $\bar{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} e^{\lambda_1 x} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} e^{-2x}$.

Знаходимо $\bar{q}' = \begin{pmatrix} e^{-2x} \\ xe^{-2x} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -2e^{-2x} \\ e^{-2x} - 2xe^{-2x} \end{pmatrix}$ і виражаємо $\bar{q}'$ че- рез $\bar{q}$ :

$$\bar{q}' = \begin{pmatrix} -2e^{-2x} \\ e^{-2x} - 2xe^{-2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} e^{-2x}.$$

Звідки отримаємо матрицю $Q = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Для відшукання елементів $b_{12}, b_{21}$ матриці $B$, згідно (14), дістанемо рівняння :

$$\begin{pmatrix} c_1 & b_{12} \\ b_{21} & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & b_{12} \\ b_{21} & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -2c_1 + b_{12} & -2b_{12} \\ -2b_{21} + c_2 & -2c_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -c_1 + b_{21} & -b_{12} + c_2 \\ -c_1 - 3b_{21} & -b_{12} - 3c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -c_1 + b_{12} - b_{21} & -b_{12} - c_2 \\ b_{21} + c_2 + c_1 & c_2 + b_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отримане матричне рівняння еквівалентне системі алге-бричних рівнянь :

$$
\begin{aligned}
-c_1 + b_{12} - b_{21} &= 0,\\
-b_{12} - c_2 &= 0,\\
b_{21} + c_2 + c_1 &= 0,\\
c_2 + b_{12} &= 0.
\end{aligned}
$$

Звідси знаходимо залежність елементів $b_{12}, b_{21}$ від довільних сталих $c_1, c_2$ : $b_{12} = -c_2, b_{21} = -c_1 - c_2$.

Отже, загальний розв'язок системи (17), згідно (10), має вигляд

$$
\bar{y} = \begin{pmatrix} c_1 & -c_2 \\ -c_1 - c_2 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} e^{-2x}
$$

або

$$
\begin{aligned}
y_1 &= c_1 e^{-2x} - c_2 x e^{-2x},\\
y_2 &= (-c_1 - c_2) e^{-2x} + c_2 e^{-2x}.
\end{aligned}
$$