

Тема 7. Побудова інтерполяційних та згладжуючих кривих

7.1. Основні поняття

Часто на практиці виникає задача побудови геометричного образу Q^* , який може замінити з деяким ступенем точності початковий геометричний образ Q (задача апроксимації). Тому для побудови образу Q^* необхідно вміти розв'язувати задачі інтерполяції та згладжування. У задачах інтерполяції вимагається, щоб геометричний образ Q^* проходив через усі задані вузлові (опорні) точки, а задача згладжування полягає у відновленні геометричного об'єкта, що проходить біля вузлових точок.

Задача інтерполяції на площині ставиться так: нехай у точках x_0, x_1, \dots, x_m таких, що $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_m \leq b$ (ці точки називаються *вузлами*) відомі значення функції $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, m$, тобто на відрізку $[a, b]$ таблично задана функція $y=f(x)$

x	x_0	x_1	\dots	x_m
y	y_0	y_1	\dots	y_m

Необхідно відновити поведінку функції $f(x)$ для всіх $x \in [a, b]$ так, щоб графік цієї функції проходив через усі задані точки (x_i, y_i) , $i = 0, 1, \dots, m$.

Функція $\varphi(x)$ називається *інтерполяційною* для $f(x)$ на $[a, b]$, якщо її значення в заданих точках збігаються з наперед заданими значеннями, тобто $\varphi(x_0) = y_0$, $\varphi(x_1) = y_1$, \dots , $\varphi(x_m) = y_m$, а для решти $x \in [a, b]$ $f(x) \approx \varphi(x)$. Як функцію $\varphi(x)$ найчастіше використовують інтерполяційні многочлени $P_m(x)$ або інтерполяційні сплайни $S(x)$.

На практиці часто трапляються випадки, коли значення y_i задані з певною похибкою (наприклад, якщо y_i є результатами вимірювання деякої функції $y(x)$, що містить випадкову похибку). У цьому випадку не можна застосовувати інтерполяційний підхід, оскільки функція $\varphi(x)$ відобразить всі похибки експериментальних даних. Тому для задачі відновлення функції за експериментальними даними, щоб зменшити вплив випадковостей у результатах вимірювання, більш виправдане використання процедур згладжування.

Задача згладжування полягає у відновленні гладкої функції $\varphi(x)$, для якої $\varphi(x_i) \approx y_i$, $i = 0, 1, \dots, m$, тобто потрібно побудувати криву, що проходить поблизу опорних точок із заданим допустимим відхиленням. Така задача має багато розв'язків, однак, наклавши на функцію $\varphi(x)$ додаткові умови, можна досягти необхідної однозначності.

7.2. Поліноміальна інтерполяція

Задача інтерполяції алгебраїчними многочленами полягає в побудові многочлена $P_m(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx_m$, значення якого в точках x_i

апроксимуюча функція лінійна на кожному з відрізків $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, m - 1$. В цьому випадку точки (x_i, y_i) послідовно з'єднуються прямолінійними відрізками (рис. 7.1).

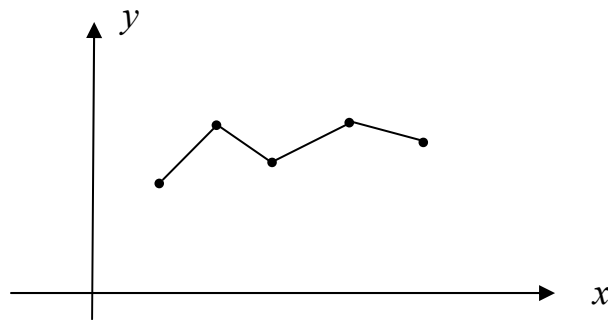


Рис. 7.1. Кусково-лінійна інтерполяція

Перевагою такою підходу є простота побудови інтерполянта. Крім цього, зміна однієї точки в масиві вимагає обчислення лише чотирьох коефіцієнтів (коефіцієнтів двох прямолінійних відрізків). Недоліком такого підходу є невисока точність побудови апроксимації та відсутність гладкості для апроксимації функції (перша похідна розривна у вузлових точках).

Уникнути цього недоліку можна шляхом побудови гладкої інтерполяційної сплайн-функції степеня p (рис. 7.2). На практиці найчастіше використовують інтерполяційні сплайни степеня три з дефектом 1 [5, 23].

Означення. Інтерполяційним кубічним сплайном $S(x)$ дефекта 1 на множині (x_i, y_i) , $i = 0, 1, \dots, m$ називається функція, яка:

1) на кожному з відрізків $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, m - 1$ є многочленом 3-го степеня, тобто

$$S(x) = S_3^i(x) = a_0^i + a_1^i(x - x_i) + a_2^i(x - x_i)^2 + a_3^i(x - x_i)^3, \quad x \in [x_i, x_{i+1}];$$

2) двічі неперервно диференційована на $[a, b]$ ($S \in C^2[a, b]$);

3) задовольняє інтерполяційні умови $S(x_i) = y_i$, $i = 0, 1, \dots, m$.

Оскільки на кожному відрізку $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, m - 1$ сплайн є многочленом 3-го степеня, то він визначається однозначно чотирма коефіцієнтами

$$a_0^i, a_1^i, a_2^i, a_3^i, \quad i = 0, 1, \dots, m - 1.$$

Всього маємо m відрізків, тому для визначення сплайна потрібно знати $4m$ коефіцієнтів.

Умова $S(x) \in C^2[a, b]$ означає неперервність $S(x)$, $S'(x)$, $S''(x)$ у внутрішніх вузлах. Таких вузлів маємо $m - 1$, а значить $3(m - 1)$ умов (рівнянь). Тому разом з 3) одержуємо всього $3(m - 1) + m + 1 = 4m - 2$ умови.

Для визначення коефіцієнтів не вистачає ще двох умов. Ці дві умови задаються у вигляді обмежень на значення сплайна та його похідних на

кінцях відрізка $[a, b]$. При побудові інтерполяційних кубічних сплайнів найчастіше використовуються такі крайові умови.

Крайові умови 1-го типу:

$$S'(a) = f'(a), S'(b) = f'(b),$$

де $f'(a)$ та $f'(b)$ задаються з певних міркувань.

Крайові умови 2-го типу:

$$S''(a) = f''(a), S''(b) = f''(b).$$

Крайові умови 3-го типу (періодичні умови):

$$S'(a) = S'(b), S''(a) = S''(b).$$

Зауваження 1. Третя похідна $S'''(x)$ у внутрішніх вузлах сітки загалом розривна (сплайн має дефект 1). Неперервність другої похідної має особливе значення, оскільки відсутній скачок прискорення. За другим законом Ньютона скачок прискорення означає скачок сили, тобто з'являється удар, який розбиває тіло, що рухається по спряженій траєкторії.

Розглянемо алгоритм побудови кубічного сплайна. Опишемо спосіб обчислення коефіцієнтів кубічного сплайна, при якому кількість величин, які необхідно знаходити, дорівнює $m + 1$, а не $4m$.

Нехай $S_3''(x_i) = M_i$, $i = 0, 1, \dots, m$. Тоді $S_3''(x)$ на кожному з відрізків $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, m - 1$ є многочленом першого степеня, тобто

$$S_3''(x) = M_i \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} + M_{i+1} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}, \quad x \in [x_i, x_{i+1}].$$

Інтегруючи $S_3''(x)$, знаходимо $S_3'(x)$ і $S_3(x)$. В результаті одержуємо

$$S_3(x) = M_{i+1} \frac{(x - x_i)^3}{6h_i} + M_i \frac{(x_{i+1} - x)^3}{6h_i} + C_1 x + C_2, \quad h_i = x_{i+1} - x_i.$$

Використовуючи умови інтерполяції

$$S_3(x_i) = y_i, \quad S_3(x_{i+1}) = y_{i+1},$$

знаходимо

$$C_1 = \frac{1}{h_i} (y_{i+1} - y_i) - \frac{M_{i+1} - M_i}{6} h_i,$$

$$C_2 = \frac{M_{i+1} h_i x_i}{6} - \frac{M_i h_i x_{i+1}}{6} - \frac{y_{i+1} x_i}{h_i} + \frac{y_i x_{i+1}}{h_i},$$

а отже,

$$S_3(x) = \frac{M_{i+1} (x - x_i)^3}{6h_i} + \frac{M_i (x_{i+1} - x)^3}{6h_i} + \left(y_i - \frac{M_i h_i^2}{6} \right) \frac{x_{i+1} - x}{h_i} +$$

$$+ \left(y_{i+1} - \frac{M_{i+1} h_i^2}{6} \right) \frac{x - x_i}{h_i}, \quad x \in [x_i, x_{i+1}]. \quad (7.1)$$

Невідомі M_i знаходимо з умов неперервності першої похідної сплайна у вузлах x_i , $i = 1, 2, \dots, m - 1$ та з крайових умов.

Для крайових умов 1-го типу для знаходження M_i одержуємо систему

$$\begin{cases} 2M_0 + M_1 = d_0, \\ \lambda_i M_{i-1} + 2M_i + \mu_i M_{i+1} = d_i, \quad i = \overline{1, m-1}, \\ M_{m-1} + 2M_m = d_m, \end{cases} \quad (7.2)$$

$$\text{де } \lambda_i = \frac{h_{i-1}}{h_{i-1} + h_i}, \quad \mu_i = \frac{h_i}{h_{i-1} + h_i}, \quad d_i = \frac{6}{h_i + h_{i-1}} \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} \right),$$

$$d_0 = \frac{6}{h_0} \left(\frac{y_1 - y_0}{h_0} - f'(a) \right), \quad d_m = \frac{6}{h_{m-1}} \left(f'(b) - \frac{y_m - y_{m-1}}{h_{m-1}} \right). \quad (7.3)$$

Оскільки $\lambda_i + \mu_i = 1$, $i = 1, 2, \dots, m - 1$, то система (7.2) має тридіагональну матрицю з переважаючою діагоналлю, а отже, ця система має єдиний розв'язок.

Якщо сітка вузлів x_i рівномірна, тобто $h_i = h$, $i = 0, 1, \dots, m - 1$, то система (7.2) має вигляд

$$\begin{cases} 2M_0 + M_1 = d_0, \\ M_{i-1} + 4M_i + M_{i+1} = \frac{6}{h^2} (y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}), \quad i = \overline{1, m-1}, \\ M_{m-1} + 2M_m = d_m. \end{cases}$$

Зауваження 2. Якщо у формулі (7.1) зробити заміну змінних

$$\frac{x - x_i}{h_i} = t, \quad t \in [0, 1], \quad x_i \in [x_i, x_{i+1}],$$

то на відрізку $[x_i, x_{i+1}]$ для інтерполяційного сплайна одержуємо

$$S_3(t) = y_i(1 - t) + y_{i+1}t - \frac{h_i^2}{6} t(1 - t)[(2 - t)M_i + (1 + t)M_{i+1}], \quad t \in [0, 1]. \quad (7.4)$$

Розглянемо *апроксимаційні властивості кубічного сплайна*. Точність апроксимації кубічними сплайнами залежить від гладкості функції $f(x)$. Чим вища гладкість функції $f(x)$, тим вищий порядок апроксимації.

Теорема. Нехай кубічний сплайн інтерполює у вузлах x_i , $i = 0, 1, \dots, m$ функцію $f(x) \in C^2[a, b]$, тоді справедливі такі оцінки:

$$\|f(x) - S(x)\|_C = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - S(x)| = O(h^3),$$

$$\|f'(x) - S'(x)\|_C = O(h^2), \quad \|f''(x) - S''(x)\|_C = O(h).$$

Англійське слово *spline* перекладається як гнучка лінійка і пов'язано це з такою обставиною: бажаючи провести плавну лінію через задані точки площини, фіксують в усіх цих точках гнучку пружну лінійку; тоді

під впливом пружних сил вона набуває потрібної форми, що забезпечує мінімум потенціальної енергії. Саме функція (7.1) є математичною моделлю профіля лінійки (рис. 7.2).

Функція $S(x)$, що описує форму лінійки, між двома сусідніми опорами є многочленом 3-го степеня і двічі неперервно диференційованою на всьому відрізку $[a, b]$.

Потенціальна енергія закріпленої в $m + 1$ точці пружної лінійки характеризується величиною

$$I(f) = \int_a^b (f''(x))^2 dx,$$

де $f(x)$ – профіль лінійки.

Зазначимо, що серед всіх функцій, які проходять через опорні точки (x_i, y_i) , $i = 0, 1, \dots, m$ і належать простору $C^2[a, b]$, саме кубічний сплайн $S(x)$, що задовольняє крайові умови

$$S''(a) = S''(b) = 0,$$

доставляє екстремум (мінімум) функціоналу $I(f)$.

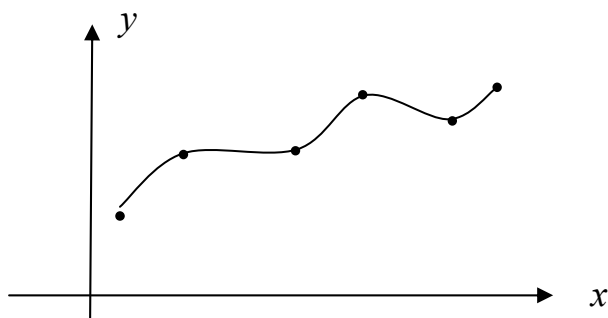


Рис. 7.2. Сплайн-функція

7.3. Згладжуючі кубічні сплайни

На практиці часто значення функції y_i вимірюються експериментально, тому вони містять похибку. А це означає, що при розв'язуванні задачі відновлення функції немає змісту використовувати інтерполяцію. Щоб зменшити ефекти випадковості у вимірах, потрібно використовувати процес згладжування. В таких задачах необхідно знайти функцію, значення якої при $x = x_i$ лише наближено дорівнює y_i й, крім того, ця функція повинна володіти певними властивостями [8, 37].

Означення. Згладжуючим кубічним сплайном $S(x)$ на $[a, b]$ називається функція, яка

- 1) на кожному відрізку $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, m - 1$ є многочленом 3-го степеня;
- 2) двічі неперервно диференційована на $[a, b]$;
- 3) доставляє мінімум функціоналу

$$I(f) = \int_a^b (f''(x))^2 dx + \sum_{i=0}^m p_i (f(x_i) - y_i)^2,$$

де $p_i > 0$ – задані вагові коефіцієнти, від величини яких залежить відхилення значення згладжуючого сплайна в точках x_i від значення y_i .

Якщо зменшувати деякий коефіцієнт p_k , то згладжуючий сплайн притягується точкою (x_k, y_k) . При $p_k = 0$ згладжуючий сплайн пройде через точку (x_k, y_k) . Збільшення p_k приводить до більш гладкої зміни згладжуючого сплайна.

Процедура побудови згладжуючих сплайнів складніша за побудову інтерполяційних сплайнів. Згладжуючі сплайни, як й інтерполяційні сплайни, знаходяться за формулами (7.1), але система алгебраїчних рівнянь відносно M_i вже буде п'ятидіагональною. Її розв'язування вимагає значних обчислювальних ресурсів і тому затрудняє інтерактивну роботу з апроксимаційними сплайнами.

7.4. Сплайнові криві

Вище розглядалася задача побудови кривої, що проходить через задану множину точок. Однак існує й інший клас задач, коли форма кривої повинна відповідати деяким естетичним вимогам. Наприклад, необхідно підібрати відповідний дизайн форми корабля. Крім кількісних критеріїв, у таких задачах необхідно враховувати й практичний досвід через інтерактивне втручання конструктора. Інтерполяційні методи, зокрема кубічні сплайни, незручні для інтерактивної роботи, оскільки неочевидний зв'язок між набором чисел і формою відповідної кривої. Для цієї роботи більше підходять сплайнові криві.

Задачу згладжування в загальному випадку можна сформулювати так: за заданою множиною вершин $P = \{P_0, P_1, \dots, P_m\}$ з урахуванням їх порядку необхідно побудувати гладку криву, яка б змінювалась плавно, проходила поблизу цих вершин і задовольняла певні додаткові умови.

Якщо з'єднати послідовно точки множини P , то одержуємо ламану, яку називають *опорною* або *контрольною*, а її вершини – *опорними* або *контрольними*. Ця ламана показує, як буде проходити шукана згладжуюча лінія. Вершини P_0, P_m ламаної називаються *граничними* (кінцевими), а вершини $P_i, i = 1, 2, \dots, m - 1$ – *внутрішніми*.

Розміщення точок $P_i, i = 0, 1, \dots, m$ на площині може бути довільним, деякі з них можуть навіть збігатися. Тому рівняння кривої необхідно шукати в більш загальній параметричній формі. Нагадаємо, що крива γ називається параметрично заданою, якщо декартові координати точок кривої визначаються співвідношеннями

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [a, b]. \quad (7.5)$$

У параметричному вигляді кожна координата точки кривої є функцією одного параметра. Значення параметра задає координату точки на кривій. Параметрична форма кривих може бути в деяких випадках зручнішою, ніж задання функції у явному вигляді. Наприклад тому, що параметрична форма дозволяє зобразити замкнені криві.

Сплайнові криві шукають у вигляді

$$R(t) = \sum_{i=0}^m a_i(t)P_i, \quad (7.6)$$

де $a_i(t)$ – деякі функціональні коефіцієнти, а

$$R(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [a, b].$$

Якщо кількість вершин у множині P достатньо велика, то знайти коефіцієнти $a_i(t)$, як правило, проблематично. А якщо такі коефіцієнти $a_i(t)$ знайдені, то вони можуть не володіти необхідними властивостями.

Для успішного розв'язування задачі згладжування зручно використовувати криві, які складені з елементарних фрагментів. У випадку, коли ці елементарні фрагменти будуються за єдиною схемою, такі складені криві називаються *сплайновими кривими*.

Параметричні рівняння кожного елементарного фрагмента шукаються теж у вигляді (7.6), однак для побудови фрагмента використовується лише частина вершин множини P . Відповідні коефіцієнти мають одну й ту ж природу (часто використовуються многочлени однакового степеня, раціональні дроби тощо).

На практиці для опису елементарних фрагментів використовуються многочлени невисокого степеня, найчастіше третього. Це пов'язане з тим, що многочлени нижчих порядків не забезпечують необхідної точності апроксимації кривих, а многочлени вищого степеня можуть викликати небажані коливання згладжуючої кривої. Крім цього, параметричні кубічні криві – це криві найменшого порядку, які можуть зайняти довільне положення в просторі, бо криві другого порядку визначаються трьома точками, а три точки задають площину. Многочлени 3-го степеня легко обчислюються,

Параметрична крива γ називається C^k -гладкою, якщо вектор-функція $R(t) \in C^k$ -гладкою, тобто $x(t)$, $y(t)$ мають на $[a, b]$ неперервні похідні включно до k -го порядку (в точках a , b обчислюються односторонні похідні).

Перша похідна функції $R(t)$ називається дотичним, або тангенціальним вектором параметричної кривої. Фізичний зміст дотичного вектора полягає

в тому, що його значення дорівнює швидкості зміни кривої відносно параметра t у даній точці. Друга похідна визначає прискорення.

Якщо, наприклад, камера рухається вздовж сплайнової кривої і робить знімки, то дотичний вектор задає швидкість переміщення камери вздовж кривої. В точках стику фрагментів кривої швидкість руху камери і її прискорення не повинні різко змінюватись, інакше буде порушуватись плавність знімання.

Зауважимо, що одиничний вектор дотичної до кривої γ у точці $R(t)$ обчислюється за формулою

$$T(t) = \frac{1}{|\dot{R}(t)|} \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}, t \in [a, b],$$

де $|\dot{R}(t)| = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}$, а одиничний вектор нормалі до кривої γ в точці $R(t)$ – за формулою

$$N(t) = \frac{1}{|\dot{R}(t)|} \begin{pmatrix} -\dot{y}(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}, t \in [a, b].$$

Існує велика кількість різних варіантів сплайнових кривих, що відрізняються за своїми властивостями. Розглянемо три основних типи сплайнових кривих – це криві Безьє, B-сплайни та інтерполяційні криві Ерміта.

7.5. Криві Безьє

7.5.1. Основні поняття

Векторні зображення складаються з контурів. Для опису контурів у програмах векторної графіки застосовують криві Безьє. Контури складаються із сегментів, обмежених вузлами. З декількох сегментів таких кривих можна скласти практично будь-яку фігуру. Такі криві розроблені математиком П'єром Безьє. Криві та поверхні Безьє були використані у 60-х роках компанією „Рено” для комп'ютерного проектування форми кузовів автомобілів. На сьогодні вони широко використовуються в комп'ютерній графіці, автоматизованих системах управління виробництвом тощо. Квадратичні криві Безьє використовуються в шрифтах TrueType.

За заданим масивом вершин $P = \{P_0, P_1, \dots, P_m\}$ крива Безьє степеня m визначається за формулою

$$R(t) = \sum_{i=0}^m B_i^m(t) P_i, t \in [0, 1], \quad (7.7)$$

де $B_i^m(t) = C_m^i t^i (1-t)^{m-i}$ – поліноми Берштейна, $C_m^i = \frac{m!}{i!(m-i)!}$, $P_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$.

У скалярній формі (7.7) має вигляд

$$x(t) = \sum_{i=0}^m C_m^i t^i (1-t)^{m-i} x_i,$$

$$y(t) = \sum_{i=0}^m C_m^i t^i (1-t)^{m-i} y_i.$$

Точки P_0, P_m називаються *кінцевими*, а точки P_1, \dots, P_{m-1} – *контрольними*, Ламана $P_0P_1 \dots P_m$ називається *контрольною (опорною)*.

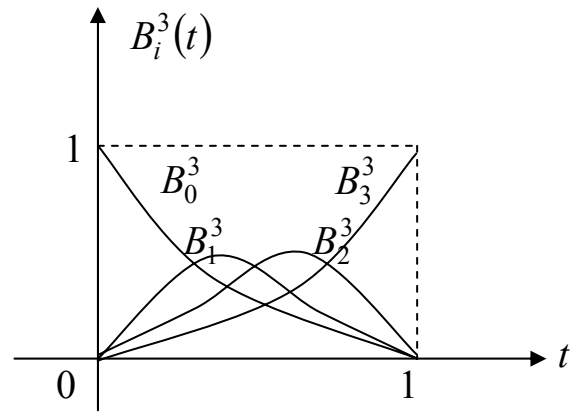


Рис. 7.3. Вагові функції Безьє/Бернштейна при $m = 3$

На рис. 7.3 зображено графіки вагових коефіцієнтів кривої Безьє $B_i^m(t)$ при $m = 3$.

Розглянемо випадок $m = 3$, тобто елементарну кубічну криву Безьє. Це особливий випадок кривих третього порядку, які часто використовуються для побудови сплайнових кривих. *Кубічна крива Безьє* визначається чотирма вершинами й описується рівнянням виду (впливає з (7.7))

$$R(t) = (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t) P_2 + t^3 P_3, \quad t \in [0, 1],$$

або в матричній формі

$$R(t) = PMT,$$

$$\text{де } R(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}.$$

Вектор $P = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ називається *геометричним вектором* елементарної кубічної кривої Безьє, а матриця M – *базовою матрицею* кубічної кривої Безьє. Такі базові матриці M можна виписати для будь-якого значення m [23].

7.5.2. Властивості кривих Безьє

Для згладжувальних кривих Безьє за вагові коефіцієнти беруться *многочлени Бернштейна*

$$B_i^m(t) = \frac{m!}{i!(m-i)!} t^i (1-t)^{m-i}.$$

Властивості многочленів Бернштейна суттєво впливають на поведінку кривих Безьє. Наведемо деякі з них:

1. Многочлени Бернштейна набувають невід'ємних значень.
2. В сумі вони дають одиницю:

$$\sum_{i=0}^m B_i^m(t) = 1. \quad (7.8)$$

3. Не залежать від вершин масиву P , а залежать лише від кількості точок у масиві.

Криві Безьє володіють рядом цікавих властивостей, завдяки чому вони широко застосовуються на практиці. Розглянемо основні властивості кривих Безьє:

1. Степінь многочлена $R(t)$, що визначає криву Безьє, на одиницю менший від кількості точок масиву, тобто крива Безьє побудована на $m + 1$ точці задається многочленом степеня m .

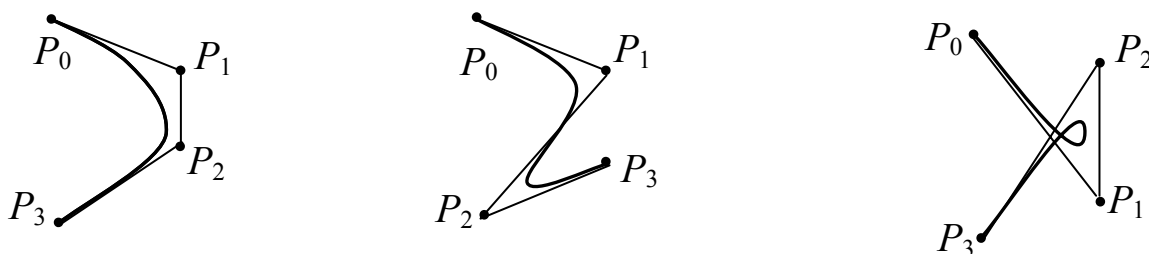


Рис. 7.4. Кубічні криві Безьє при зміні порядку точок ($m = 3$)

2. Порядок точок у масиві P суттєво впливає на вигляд кривої Безьє. Форма кривої Безьє повторює хід ламаної $P_0P_1\dots P_m$. При зміні порядку точок повністю змінюється форма кривої (рис. 7.4).
3. Перша та остання точки кривої збігаються з відповідними точками масиву P , тобто $R(0) = P_0$, $R(1) = P_m$.
4. Вектори дотичних у кінцях кривої Безьє за напрямом збігаються з першою й останньою ланками опорної ламаної, оскільки $\dot{R}(0) = m(P_1 - P_0)$, $\dot{R}(1) = m(P_m - P_{m-1})$.
5. Крива Безьє є гладкою кривою. Зокрема, першу похідну радіус-вектора $R(t)$ можна записати у вигляді

$$\dot{R}(t) = m \sum_{i=0}^{m-1} (P_{i+1} - P_i) B_i^{m-1}(t).$$

6. Крива Безьє лежить в опуклій оболонці вершин масиву P , оскільки для коефіцієнтів лінійної комбінації точок масиву виконується умова (7.8).
7. Крива Безьє інваріантна відносно афінних перетворень. Тобто побудувавши криву Безьє, над нею можна здійснити афінні перетворення, а можна вчинити інакше: спочатку здійснити афінні пере-

творення над опорними вершинами, а потім побудувати криву Безьє на нових вершинах. Якщо результати будуть однаковими, то кажуть, що крива є інваріантною відносно цього афінного перетворення. При цьому легко помітити, наприклад, що поворот опорних вершин і подальша побудова кривої займає менше часу, ніж поворот самої кривої. Нагадаємо, що афінні перетворення включають у себе поворот, розтягування/стиск, паралельне перенесення та їх можливі комбінації.

8. Якщо в масив P додати хоча б одну вершину, то необхідно повністю перерахувати параметричні рівняння кривої Безьє.
9. Зміна хоча б однієї точки в масиві P приводить до помітної зміни всієї кривої Безьє.
10. У рівнянні (7.7), що описує елементарну криву Безьє, немає вільних параметрів, тобто заданий масив однозначно визначає криву Безьє. Тому немає можливостей якимось чином впливати на форму кривої Безьє.

Останній недолік можна усунути, якщо ввести до розгляду *раціональні криві Безьє*, які визначаються формулою

$$R(t) = \frac{\sum_{i=0}^m \omega_i B_i^m(t) P_i}{\sum_{i=0}^m \omega_i B_i^m(t)}, \quad t \in [0, 1], \quad (7.9)$$

де $\omega_i \geq 0$ – вагові коефіцієнти, сума яких строго додатна.

Змінюючи параметри ω_i , можна керувати формою раціональних кривих Безьє. Якщо значення ω_i велике, то крива $R(t)$ проходить близько до точки P_i , якщо ω_i мале, то $R(t)$ проходить далше від точки P_i . Якщо всі ω_i рівні між собою, то одержується звичайна крива Безьє.

7.5.3. Складені криві Безьє

Кількість точок множини P жорстко визначає порядок многочлена Безьє. Крім цього, довільна точка на кривій Безьє залежить від всіх опорних вершин, тому зміна однієї вершини впливає на поведінку всієї кривої. Іншими словами, локальні дії на криву Безьє неможливі, а відсутність локальної корекції може бути визначальною в деяких прикладних задачах. Вихід із цієї ситуації був знайдений у побудові складених кривих Безьє, тобто сплайнову криву складають з окремих фрагментів. Саме такі криві найчастіше застосовуються на практиці.

Зупинимось тепер на побудові складених кубічних кривих Безьє.

Складена кубічна крива Безьє – це неперервна крива γ , що є об'єднанням елементарних кубічних кривих $\gamma^0, \gamma^1, \dots, \gamma^l$, тобто

$$\gamma = \gamma^0 \cup \gamma^1 \cup \dots \cup \gamma^l.$$

Для побудови складеної кривої Безьє розбиваємо масив точок P_0, P_1, \dots, P_m (m має бути кратним 3) на l підмножин, кожна з яких містить чотири точки так, що остання точка попередньої підмножини – це перша точка наступної підмножини, тобто

$$\{P_0, P_1, P_2, P_3\}, \{P_3, P_4, P_5, P_6\}, \dots, \{P_{3l}, P_{3l+1}, P_{3l+2}, P_{3l+3}\}.$$

На кожній такій підмножині можна побудувати елементарну криву Безьє, тобто окремих фрагмент складеної кривої Безьє. Об'єднання окремих фрагментів дає складену кубічну криву Безьє, яка належить до класу неперервних функцій. Якщо тепер змінити якусь точку масиву, то складена крива Безьє зміниться тільки локально.

Для того, щоб складена кубічна крива Безьє була C^1 -гладкою необхідно, щоб трійки вершин $P_{3i-1}, P_{3i}, P_{3i+1}$ лежали на одній прямій.

Якщо у вихідному масиві немає колінеарних трійок вершин, їх завжди можна додати так, щоб побудована складена крива була C^1 -гладкою. C^2 -гладкості можна добитися для раціональних складених кривих Безьє за рахунок підбору вагових коефіцієнтів ω_i .

Зауваження 3. Метод побудови кривої Безьє в графічних пакетах базується на використанні дотичних управляючих ліній, що проведені до сегмента кривої на його кінцях (вузлах). При цьому форму кривої Безьє моделюють шляхом зміни нахилу дотичних і довжини відрізка, які визначаються контрольними точками.

7.5.4. Геометричний алгоритм для кривої Безьє

П'єр Безьє запропонував інший метод побудови цих кривих на основі геометричних міркувань. Алгоритм полягає в наступному.

1. Кожна сторона опорної ламаної ділиться у відношенні $t:(1-t)$, де $t \in [0, 1]$ – аргумент точки поділу.
2. Точки поділу з'єднуються відрізками прямих і утворюють нову ламану. При цьому кількість вузлів нового контуру на одиницю менша за кількість вузлів попереднього контуру.
3. Сторони нового контуру знову діляться у тому ж відношенні і так далі. Цей процес продовжується доти, поки не буде отримано єдину точку поділу. Ця точка й буде точкою кривої Безьє (рис. 7.5).

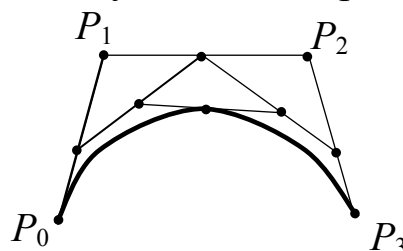


Рис. 7.5. Геометричний алгоритм для кривих Безьє

7.6. В-сплайнові криві

Крива, що визначається вершинами масиву P , залежить від способу апроксимації. Тут значну роль відіграє вибір базисних функцій. Базис Бернштейна породжує криві Безьє, однак він володіє двома недоліками.

- 1) Кількість вершин ламаної жорстко визначає порядок многочлена Безьє (див. формулу (7.7)). Наприклад, чотири вершини ламаної визначають кубічну криву Безьє, шість вершин ламаної визначають многочлен Безьє п'ятого порядку. Понизити степінь кривої Безьє можна або зменшивши кількість вершин ламаної, або ввівши до розгляду складені криві Безьє.
- 2) Друге обмеження випливає з глобальної природи базису Бернштейна. Це означає, що величина вагових коефіцієнтів (многочленів Бернштейна $B_i^m(t)$) є ненульовою для всіх значень параметра t на кривій. Тобто довільна точка на кривій Безьє залежить від всіх вершин, тому зміна однієї вершини приводить до помітної зміни всієї кривої Безьє. Локальні дії на криву Безьє, що визначається формулою (7.7), – неможливі.

Відсутність локальної корекції кривих може бути визначальною в деяких прикладних задачах. Цей недолік заважає ефективному розв'язуванню задач згладжування, тому на практиці використовується неглобальний базис, що називається базисом В-сплайна. В-сплайни не глобальні, оскільки з кожною вершиною P_i пов'язана своя базисна функція. Тому вплив кожної вершини на криву відбувається тільки при тих значеннях параметра, при яких відповідна базисна функція не дорівнює нулю, тобто зміна однієї контрольної точки впливає тільки на деякий фрагмент кривої і не вносить глобальних змін у її форму.

Сплайнові криві використовуються в анімації для задання траєкторії руху. Але при русі об'єкта по складеній кривій Безьє раптово може змінитися прискорення, оскільки об'єкт переходить на ділянку кривої з іншою другою похідною (складена крива Безьє тільки C^1 -неперервна). Цю проблему теж розв'язують В-сплайни, в яких зміна кривизни неперервна. Тому цей тип кривих оптимальний для анімації і створення 2D-форм.

Розглянемо ці специфічні сплайни, що називаються В-сплайнами [5, 19, 23]. Найпоширеніші серед них – В-сплайни третього порядку.

В-сплайни третього порядку визначаються на системі точок $x_{i-2}, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x_{i+2}$. Такий сплайн позначається $N_i^3(x)$. Вважаємо, що вузли x_i рівномірно віддалені. Нехай $N_i^3(x_k) = y_k, (N_i^3)''(x_k) = M_k, k = i-2, i-1, i, i+1, i+2$. Тоді, як і для всякого кубічного сплайна, у внутрішніх точках, виконуються співвідношення

$$M_{k-1} + 4M_k + M_{k+1} = \frac{6}{h^2}(y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1}), \quad k = i-1, i, i+1. \quad (7.10)$$

Маємо 3 рівняння і 10 невідомих $y_k, M_k, k = i-2, i-1, i, i+1, i+2$. Тому додатково вважатимемо

$$\begin{aligned} N_i^3(x_{i-2}) = y_{i-2} = 0, \quad N_i^3(x_{i+2}) = y_{i+2} = 0, \\ (N_i^3)'(x_{i-2}) = (N_i^3)'(x_{i+2}) = 0, \\ (N_i^3)''(x_{i-2}) = M_{i-2} = 0, \quad (N_i^3)''(x_{i+2}) = M_{i+2} = 0. \end{aligned} \quad (7.11)$$

З формул (7.10), враховуючи (7.11), одержуємо

$$\begin{aligned} 4M_{i+1} + M_i &= \frac{6}{h^2}(y_i - \frac{1}{3}h^2M_{i-1}), \\ M_{i-1} + 4M_i + M_{i+1} &= \frac{6}{h^2}(\frac{1}{6}h^2M_{i+1} - 2y_i + \frac{1}{6}h^2M_{i-1}), \\ M_i + 4M_{i+1} &= \frac{6}{h^2}(y_i - \frac{1}{3}h^2M_{i+1}). \end{aligned} \quad (7.12)$$

У системі (7.12) маємо чотири невідомих, тому додатково вважатимемо, що $y_i = \frac{2}{3}$, що зумовлено умовою нормалізації $\sum_{k=i-2}^{i+2} N_k^3(x) = 1$. Для

решти невідомих з (7.12) знаходимо $M_{i-1} = \frac{1}{h^2}, M_i = -\frac{2}{h^2}, M_{i+1} = \frac{1}{h^2}$.

Крім цього, з умов нормалізації випливає, що $y_{i-1} = y_{i+1} = \frac{1}{6}$.

Використовуючи формулу (7.1), одержуємо

$$N_i^3(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} \left(\frac{x - x_{i-2}}{h} \right)^3, & x \in [x_{i-2}, x_{i-1}], \\ -\frac{1}{3} \left(\frac{x - x_{i-1}}{h} \right)^3 + \frac{1}{6} \left(\frac{x_i - x}{h} \right)^3 + \frac{x - x_{i-1}}{h}, & x \in [x_{i-1}, x_i], \\ \frac{1}{6} \left(\frac{x - x_i}{h} \right)^3 - \frac{1}{3} \left(\frac{x_{i+1} - x}{h} \right)^3 + \frac{x_{i+1} - x}{h}, & x \in [x_i, x_{i+1}], \\ \frac{1}{6} \left(\frac{x_{i+2} - x}{h} \right)^3, & x \in [x_{i+1}, x_{i+2}], \\ 0, & \text{для решти } x. \end{cases} \quad (7.13)$$

Кубічний *B*-сплайн на відрізку $[a, b]$ можна визначити як функцію

$$B(x) = \sum_{i=0}^n b_i N_i^3(x), \quad x \in [a, b],$$

де b_i – коефіцієнти, що визначаються з відповідної системи рівнянь, $N_i^3(x)$ – нормалізовані функції базису В-сплайна.

Функція $B(x)$ є поліномом третього степеня на кожному інтервалі $x_i \leq x < x_{i+1}$, похідні $B'(x)$, $B''(x)$ неперервні у кожній точці кривої.

Оскільки В-сплайн задається базисом В-сплайна, то сума базисних сплайнів у довільній точці

$$\sum_{i=0}^m N_i^3(x) = 1.$$

Елементарні В-сплайнові криві визначаються чотирма вершинами P_0, P_1, P_2, P_3 .

У нашому випадку, коли жодних обмежень на множину вершин не накладається (вони можуть бути розміщені довільно), рівняння елементарної В-сплайнової кривої потрібно шукати в параметричній формі

$$R(t) = \sum_{i=0}^3 n_i(t) P_i,$$

де $n_i(t)$ – коефіцієнти, що одержуються із формули (7.13) шляхом введення параметра t .

Наприклад, при $x \in [x_i, x_{i+1}]$

$$N_i^3(x) = \frac{1}{6} \left(\frac{x - x_i}{h} \right)^3 - \frac{1}{3} \left(\frac{x_{i+1} - x}{h} \right)^3 + \frac{x_{i+1} - x}{h}.$$

Якщо тепер ввести параметр $t = \frac{x - x_i}{h}$, $t \in [0, 1]$, то з (7.13) одержуємо

мо функцію $n_1(t) = \frac{3t^3 - 6t^2 + 4}{6}$.

Аналогічно з формули (7.13) маємо

$$n_0(t) = \frac{(1-t)^3}{6}, \quad n_2(t) = \frac{-3t^3 + 3t^2 + 3t + 1}{6}, \quad n_3(t) = \frac{t^3}{6}, \quad t \in [0, 1].$$

Графіки функцій $n_i(t)$ наведені на рис.7.5. На кінцях одиничного інтервалу три функції з чотирьох відмінні від нуля.

Отже, елементарну кубічну В-сплайнову криву можна визначити векторним рівнянням:

$$R(t) = \frac{(1-t)^3}{6} P_0 + \frac{3t^3 - 6t^2 + 4}{6} P_1 + \frac{-3t^3 + 3t^2 + 3t + 1}{6} P_2 + \frac{t^3}{6} P_3, \quad t \in [0, 1]. \quad (7.14)$$

Матричний запис параметричного рівняння елементарної кубічної В-сплайнової кривої має вигляд

$$R(t) = PMT,$$

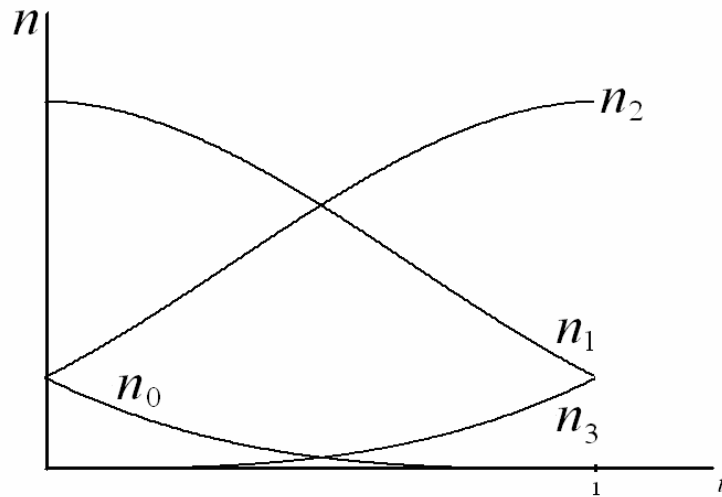


Рис 7.5. Вагові коефіцієнти елементарних В-сплайнів

де
$$R(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad M = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & -6 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix},$$

$$P = (P_0 P_1 P_2 P_3) = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}.$$

Матриця M називається *базовою матрицею* елементарної В-сплайнової кривої, а вектор P – *геометричним вектором* елементарної В-сплайнової кривої.

Функціональні коефіцієнти $n_i(t)$, $i = 0, 1, 2, 3$ суттєво впливають на поведінку $R(t)$. Оскільки $n_i(t) \geq 0$, $i = 0, 1, 2, 3$ і $\sum_{i=0}^3 n_i(t) = 1$, то елементарна В-сплайнова крива лежить в опуклій оболонці точок P_0, P_1, P_2, P_3 (рис. 7.6), причому $R(0) \neq P_i$, $R(1) \neq P_i$, $i = 0, 1, 2, 3$, тобто елементарна В-сплайнова крива, як правило, не проходить через жодну з точок P_0, P_1, P_2, P_3 (рис. 7.6).

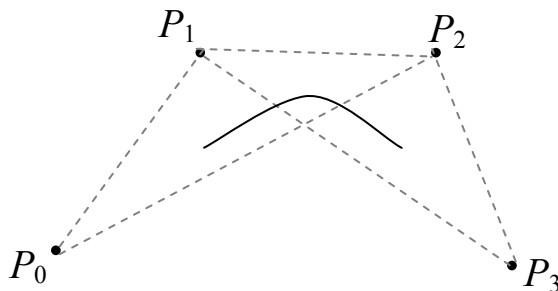


Рис. 7.6. Елементарна кубічна В-сплайнова крива

Дотична в початковій точці $R(0) = \frac{1}{6}(P_0 + 4P_1 + P_2)$ паралельна від-
 різку P_0P_1 ($\dot{R}(0) = \frac{1}{2}(P_2 - P_0)$), а в кінцевій точці $R(1) = \frac{1}{6}(P_1 + 4P_2 + P_3)$
 паралельна відрізку P_1P_3 ($\dot{R}(1) = \frac{1}{2}(P_3 - P_1)$).

Складені кубічні В-сплайнові криві

Складеною кубічною В-сплайновою кривою, що визначається масивом
 вершин P_0, P_1, \dots, P_m , називається крива γ , яку можна подати у вигляді
 об'єднання елементарних В-сплайнових кривих $\gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^{m-2}$,

$$\gamma = \gamma^1 \cup \gamma^2 \cup \dots \cup \gamma^{m-2},$$

де γ^i будується як елементарний В-сплайн на точках $P_{i-1}, P_i, P_{i+1}, P_{i+2}$.

Сформулюємо *властивості складеної кубічної В-сплайнової кривої*.

1. Складена кубічна В-сплайнова крива, що породжується масивом
 вершин P_0, P_1, \dots, P_m , є C^2 -гладкою кривою.
2. Форма кривої визначається контрольними точками, що не лежать
 на кривій (рис. 7.7). За допомогою цих точок зручно управляти
 формою кривої.
3. Складена крива лежить в об'єднанні $m - 2$ опуклих оболонок, що
 породжуються точками $P_{i-1}, P_i, P_{i+1}, P_{i+2}, i = 1, 2, \dots, m - 2$.
4. Якщо всі опорні вершини лежать на одній прямій, то складена ку-
 бічна В-сплайнова крива лежить на цій прямій між точками P_0, P_m .
5. Складена В-сплайнова крива не глобальна, тому локальна зміна
 однієї точки в масиві приводить до зміни тільки частини кривої;
 при зміні вершини P_i необхідно переобчислити параметричні рів-
 ння тільки чотирьох елементарних кривих $\gamma^{i-2}, \gamma^{i-1}, \gamma^i, \gamma^{i+1}$.
6. Складена кубічна В-сплайнова крива є афінно інваріантною.

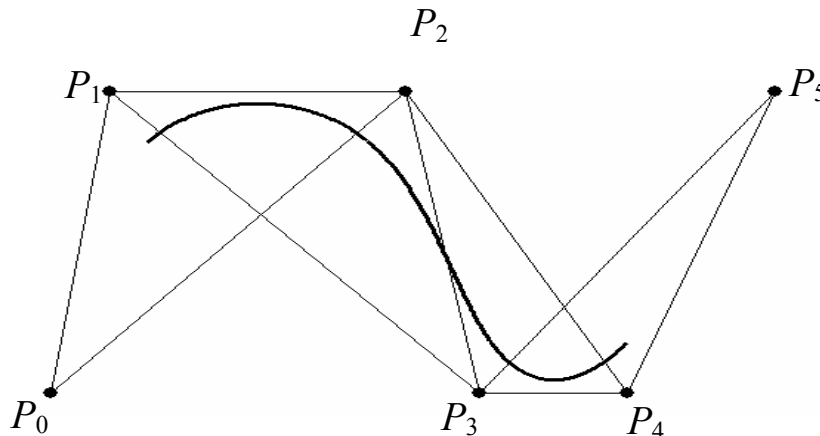


Рис. 7.7. Складена В-сплайнова крива

Зауваження 4. Складена кубічна В-сплайнова крива, як правило, не проходить через жодну з вершин P_0, P_1, \dots, P_m . Однак шляхом підбору допоміжних вершин і побудовою додаткових елементарних кривих, можна добитися, щоб початкова точка нової складеної кривої знаходилася близько до вершини P_0 і навіть збігалася з нею. Аналогічних результатів можна досягти і для кінцевої точки P_m .

Зауваження 5. На взаємне розміщення вершин у масиві не накладається жодних обмежень і вони можуть навіть збігатися. Але в таких випадках крива може втратити порядок гладкості.

Сегменти, що утворюють складену криву, визначаються за формулою (7.14) як функції аргументу $t \in [0, 1]$. Інколи їх зручніше перевизначити так, щоб вони набували значення на послідовному інтервалі. Для єдиної параметризації складеної кривої γ вводять параметр $t \in [0, m - 2]$ (оскільки на $m + 1$ вершині можна побудувати $m - 2$ елементарних фрагменти). Кожний сегмент γ^i буде задаватися на інтервалі $t \in [t_i, t_{i+1}]$, $i = 1, 2, \dots, m - 2$.

Значення t_i визначають точку стику або вузол між сусідніми сегментами. Тому t_i називаються *вузловими значеннями*. Загальне число вузлів на складеній кривій дорівнює $m - 1$.

Якщо всі вузли розміщені на рівній відстані за значенням параметра t , то такі В-сплайни називаються *однорідними*. Без втрати загальності можна вважати, що $t_1 = 0, t_{i+1} = t_i + 1, i = 1, 2, \dots, m - 2$, наприклад вектор вузлових значень взяти у вигляді $(0, 1, 2, 3, 4)$. У цьому випадку параметричне рівняння i -ї елементарної кубічної В-сплайнової кривої матиме вигляд

$$R^i(t) = (P_{i-1}, P_i, P_{i+1}, P_{i+2})M \begin{pmatrix} 1 \\ t - t_i \\ (t - t_i)^2 \\ (t - t_i)^3 \end{pmatrix}, t \in [t_i, t_{i+1}].$$

В-сплайни, в яких відстані між вузловими значеннями нерівні, але задовольняють співвідношення $t_i \leq t_{i+1}$, називаються *неоднорідними В-сплайнами*, наприклад, якщо вектор вузлових значень має вигляд $(0, 0, 0, 1, 1, 2, 3)$, або $(0; 0,18; 0,3; 0,5; 0,7; 1)$.

На відміну від однорідних В-сплайнів, для неоднорідних В-сплайнів не існує єдиного набору базових функцій. Вони залежать від вузлових значень t_i і визначаються рекурентними співвідношеннями. Вектор вузлових значень потрібно попередньо задавати.

Позначимо через $N_i^k(t)$ базову функцію k -го порядку для контрольної

точки P_i . Нормалізовані функції базису $N_i^k(t)$ визначаються рекурентними формулами Кокса-де-Бура

$$N_i^0(t) = \begin{cases} 1, & t_i \leq t < t_{i+1}, \\ 0, & t < t_i, t \geq t_{i+1}, \end{cases}$$

$$N_i^1(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} N_i^0(t) + \frac{t_{i+2} - t}{t_{i+2} - t_{i+1}} N_{i+1}^0(t), \quad (7.15)$$

.....

$$N_i^k(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+k} - t_i} N_i^{k-1}(t) + \frac{t_{i+k+1} - t}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} N_{i+1}^{k-1}(t), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Тоді В-сплайн побудований на множині точок $P = \{P_0, P_1, \dots, P_m\}$ з вектором вузлових значень $t_0, t_1, \dots, t_k, \dots, t_m, \dots, t_{m+k+1}$ має вигляд

$$R(t) = \sum_{j=i-k}^i N_j^k(t) P_j, \quad t_i \leq t \leq t_{i+1}, \quad i = k, k+1, \dots, m, \quad 1 \leq k \leq m-1. \quad (7.16)$$

Зокрема, сегмент γ^i , що задається контрольними точками $P_{i-1}, P_i, P_{i+1}, P_{i+2}$ при $k=3$ визначається рівнянням

$$R_i(t) = N_{i-1}^3(t) P_{i-1} + N_i^3(t) P_i + N_{i+1}^3(t) P_{i+1} + N_{i+2}^3(t) P_{i+2}, \quad t \in [t_{i+2}, t_{i+3}].$$

Функції $N_i^k(t)$ мають локальний характер, тобто на інтервалі (t_i, t_{i+k}) $N_i^k(t) > 0$, зовні цього інтервалу $N_i^k(t) = 0$. Тому зміна однієї вершини в масиві P не приводить до переобчислення всієї кривої.

Крім цього, для функцій $N_i^k(t)$ зберігається рівність

$$\sum_{i=k}^m N_i^k(t) = 1,$$

завдяки якій крива, задана векторним рівнянням (7.16), завжди належатиме до опуклої оболонки масиву P .

Неоднорідні В-сплайни мають ряд переваг над однорідними. Вони володіють високою чуттєвістю до зміни контрольних точок, забезпечують легке керування початковими та кінцевими точками. В будь-який момент роботи з неоднорідними В-сплайнами можна ввести додатковий вузол і змінити форму кривої.

Раціональні кубічні В-сплайнові криві. За заданим масивом точок $P = \{P_0, P_1, \dots, P_m\}$ раціональна кубічна В-сплайнова крива визначається рівнянням вигляду

$$R(t) = \frac{\sum_{i=0}^m \omega_i N_i^3(t) P_i}{\sum_{i=0}^m \omega_i N_i^3(t)}.$$

Вагові коефіцієнти $\omega_i \geq 0$, для яких $\sum_i \omega_i > 0$, як і для раціональної кривої Безьє, керують поведінкою кривої.

Вираз для $R(t)$ можна переписати у формі

$$R(t) = \sum_{i=0}^m \bar{N}_i^3(t) P_i,$$

де

$$\bar{N}_i^3(t) = \frac{\omega_i N_i^3(t)}{\sum_{i=0}^m \omega_i N_i^3(t)} > 0, \quad \sum_{i=0}^m \bar{N}_i^3(t) = 1.$$

Тому раціональні В-сплайни – це узагальнення нераціональних В-сплайнів і їх базису. І оскільки не накладається ніяких обмежень на розміщення вузлів, то ця функція належить до класу нерівномірних раціональних В-сплайнів. Нерівномірні раціональні В-сплайни в літературі з комп'ютерної графіки називаються ще NURBS-кривими (скорочено від nonuniform rational B-spline). NURBS-криві зберігають властивості В-сплайнів, зокрема вони володіють властивістю афінної інваріантності. Але, крім цього, раціональні В-сплайни інваріантні відносно перспективного перетворення, нераціональні В-сплайни зберігають інваріантність тільки відносно масштабування, повороту і зсуву.

Таким чином, для реалізації перспективного перетворення раціональних кривих достатньо застосувати це перетворення до контрольних точок, нове положення яких дозволить обчислити перетворену форму кривих.

Ще однією перевагою NURBS-кривих є їхня здатність точно описувати форми конічних перетинів, які часто використовуються в системах автоматизованого проектування. Можна показати, що квадратичні криві, які задаються аналітично в неявному вигляді, є окремим випадком зручних NURBS-кривих. Нераціональні криві можуть тільки апроксимувати ці форми, причому для збільшення точності необхідно використовувати велику кількість контрольних точок, що вимагає значних обчислювальних ресурсів.

Отже, для моделювання практично всіх типів криволінійних об'єктів, можна використовувати метод, що базується на формуванні NURBS-кривих.

Зауважимо, що нерівномірні раціональні В-сплайни є стандартом обміну проектною інформацією між системами машинного проектування, тобто вони використовуються в універсальних форматах подання геометричних даних. Раціональні В-сплайни застосовуються в системах геометричного моделювання, сучасних САД-системах й реалізовані апаратно в деяких графічних станціях.

7.7. Інтерполяційні кубічні криві Ерміта

Форма опису кубічних кривих Ерміта близька до кривих Безьє, але відрізняється від неї заданням дотичних векторів у кінцевих точках (для кривої Безьє задаються чотири точки).

Нехай задані дві точки P_0, P_1 та два напрямки Q_0, Q_1 . Необхідно побудувати криву, яка пройде через ці точки, причому напрямки дотичних у цих точках до шуканої кривої повинні збігатися відповідно з Q_0, Q_1 . Такою кривою є інтерполяційна кубічна крива Ерміта. Таку назву ці криві одержали від імені французького математика Шарля Ерміта, який досліджував їх властивості.

За заданими вершинами P_0, P_1 і ненульовими векторами Q_0, Q_1 елементарна кубічна крива Ерміта визначається рівнянням

$$R(t) = H_0(t)P_0 + H_1(t)P_1 + H_2(t)Q_0 + H_3(t)Q_1, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

де $H_i(t), i = 0, 1, 2, 3$ – ермітові базисні функції (ермітові многочлени):

$$H_0(t) = (1 + 2t)(1 - t)^2 = 2t^3 - 3t^2 + 1,$$

$$H_1(t) = (3 - 2t)t^2 = -2t^3 + 3t^2,$$

$$H_2(t) = (1 - t)^2 t = t^3 - 2t^2 + t,$$

$$H_3(t) = (t - 1)t^2 = t^3 - t^2.$$

Матричний запис параметричного рівняння кривої Ерміта має вигляд

$$R(t) = GMT, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

де

$$G = (P_0 P_1 Q_0 Q_1) = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & u_0 & u_1 \\ y_0 & y_1 & v_0 & v_1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}.$$

Матриця M називається *базовою матрицею кубічної кривої Ерміта*, G – геометричний вектор кривої Ерміта.

Дотичний вектор до елементарної кубічної кривої Ерміта в початковій точці $P_0 = R(0)$ збігається із заданим вектором Q_0 , а в кінцевій точці $P_1 = R(1)$ – з вектором Q_1 (рис. 7.8). Зауважимо, що якщо збільшувати тільки довжину вектора Q_0 , то крива Ерміта витягується вправо.

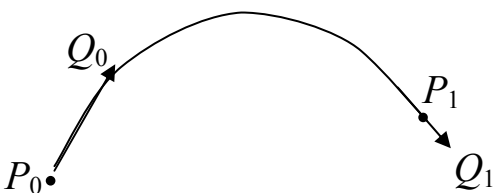


Рис. 7.8. Елементарна крива Ерміта

Складена кубічна крива Ерміта. Складена кубічна крива Ерміта, що визначається масивом точок

$$P_0, P_1, \dots, P_m, \quad m \geq 1$$

і парою ненульових векторів Q_0, Q_m , – це крива γ , яку можна зобразити у вигляді об'єднання кубічних кривих Ерміта $\gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^m$, тобто

$$\gamma = \gamma^1 \cup \gamma^2 \cup \dots \cup \gamma^m.$$

При цьому i -та крива γ^i визначається параметричним рівнянням вигляду

$$R^i(t) = (P_{i-1} P_i Q_{i-1}, Q_i)MT, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

де M – базова матриця ермітового сплайна, а вектори Q_1, \dots, Q_{m-1} визначаються з матричного рівняння вигляду

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_0 \\ Q_1 \\ \vdots \\ Q_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 & & & \\ & -3 & 0 & 3 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & & -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ \vdots \\ P_m \end{pmatrix}.$$

Наведемо *властивості складеної кубічної кривої Ерміта.*

1. Складена крива є C^2 -гладкою.
2. Проходить через вершини P_0, P_1, \dots, P_m .
3. Дотичні вектори Q_i у внутрішніх точках $P_i, i = 1, 2, \dots, m - 1$ однозначно визначаються через вершини масиву P і дотичні вектори Q_0, Q_m .
4. Зміна однієї вершини або одного з дотичних векторів Q_0, Q_m приводить до зміни всієї кривої.
5. Складена кубічна крива Ерміта – афінно інваріантна, але не проективно інваріантна.

Зауваження 6. За допомогою елементарних кубічних кривих Ерміта складену криву можна побудувати за заданим масивом вершин P_0, P_1, \dots, P_m і довільним набором ненульових векторів Q_0, Q_1, \dots, Q_m . Кожна четвірка $P_{i-1}, P_i, Q_{i-1}, Q_i$ задає елементарну ермітову криву. Однак у цьому випадку, на відміну від раніше розглянутого випадку, складена крива Ерміта лише C^1 -гладка.

Зауваження 7. При побудові сплайнових кривих постійно потрібно обчислювати значення кубічних поліномів. Ефективність обчислень можна підвищити за рахунок використання схеми Горнера

$$at^3 + bt^2 + ct + d = ((at + b)t + c)t + d.$$

Існують і більш ефективні методи обчислень значень поліномів, наприклад, метод скінченних різниць.

7.8. ТСВ-сплайни

У задачах анімації при моделюванні руху за допомогою ключових кадрів задається послідовність положень об'єкта, тобто точок P_i , $i = 0, 1, \dots, m$. Задача полягає в тому, щоб провести інтерполяційну криву, що проходить через ці точки і в такий спосіб визначити положення об'єкта в довільний момент часу.

Для розв'язання цієї задачі використовують модифіковані ермітові сплайнові криві. Вони називаються *ТСВ-сплайнами*.

Розглянемо ці модифікації.

1. У точках P_i , $i = 1, 2, \dots, m - 1$ потрібно визначити вектори швидкостей, які задаватимуть напрям та швидкість зміни кривої в цих точках.

Наприклад, для напрямку можна взяти

$$\mathbf{T}_i = \frac{P_{i+1} - P_{i-1}}{2} = \frac{P_{i+1} - P_i + P_i - P_{i-1}}{2}.$$

Окрім цього, зберігаючи напрям вектора, можна регулювати його довжину. Наприклад, помноживши вектор \mathbf{T}_i на параметр $1 - t$, де $t \in [-1, 1]$, матимемо

$$\mathbf{T}_i = (1 - t) \frac{P_{i+1} - P_{i-1}}{2} = \frac{(1 - t)(P_{i+1} - P_i) + (1 + t)(P_i - P_{i-1})}{2}.$$

Швидкість \mathbf{T}_i визначає натяг кривої (tension). На рис. 7.9 зображені вектори швидкостей для різних значень t . При $t = 0$ вектор \mathbf{T}_i – середня лінія $\Delta P_{i-1}P_iP_{i+1}$. При $t \rightarrow -1$ швидкість зростає, натяг спадає, при $t \rightarrow 1$ швидкість спадає, натяг збільшується.

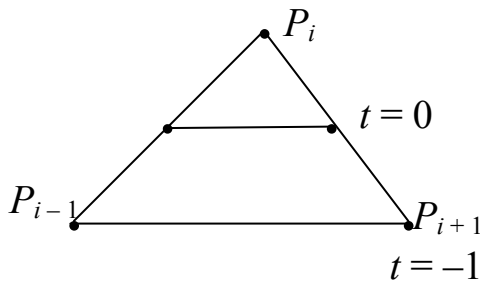


Рис. 7.9. Вектор натягу

2. Вектори $P_{i-1}P_i$, P_iP_{i+1} можуть вносити різний вклад у формування вектора швидкості \mathbf{T}_i . Для врахування цього чинника можна ввести вагові коефіцієнти $1 - \beta$, $1 + \beta$, які описують вклад кожного з векторів P_iP_{i+1} , $P_{i-1}P_i$ у напрямний вектор \mathbf{T}_i , тобто вважати, що

$$\mathbf{T}_i = ((1 - \beta)(P_{i+1} - P_i) + (1 + \beta)(P_i - P_{i-1}))/2.$$

При $\beta = 0$ вектор \mathbf{T}_i з'єднує середини відрізків P_iP_{i+1} та $P_{i-1}P_i$. При $\beta \rightarrow 1$ вклад вектора $P_{i-1}P_i$ збільшується (вектор швидкості \mathbf{T}_i наближається до вектора $P_{i-1}P_i$), а при $\beta \rightarrow -1$ збільшується вклад вектора

$P_i P_{i+1}$ (вектор швидкості наближається до вектора $P_i P_{i+1}$). Так змінюється нахил (bias) кривої при проходженні через точку P_i . Однак напрям входу в точку P_i і напрям виходу з неї збігаються (крива C^1 -гладка).

3. Для забезпечення різного напрямку входу і виходу з точки P_i необхідно розрізнити вектори T_i зліва і справа від точки P_i , тобто необхідно ввести до розгляду вектори T_i^- , T_i^+ .

Аналогічно п.2 вводимо параметр c і задаємо вектори швидкостей за формулами

$$T_i^+ = ((1 - c)(P_{i+1} - P_i) + (1 + c)(P_i - P_{i-1})) / 2,$$

$$T_i^- = ((1 + c)(P_{i+1} - P_i) + (1 - c)(P_i - P_{i-1})) / 2.$$

Параметр c визначає неперервність (continuity) вектора швидкості. При $c = 0$ вектори T_i^+ і T_i^- збігаються, тобто вектор швидкості неперервний, для інших c він буде розривним.

Об'єднуючи разом три раніше розглянуті випадки, одержуємо

$$T_i^+ = \frac{(1-t)(1-\beta)(1-c)}{2}(P_{i+1} - P_i) + \frac{(1-t)(1+\beta)(1+c)}{2}(P_i - P_{i-1}),$$

$$T_i^- = \frac{(1-t)(1-\beta)(1+c)}{2}(P_{i+1} - P_i) + \frac{(1-t)(1+\beta)(1-c)}{2}(P_i - P_{i-1}).$$

Отже, параметри t , c , β задають відповідно натяг, неперервність і загальний нахил вектора швидкості при проходженні точки P_i . Тому такі сплайни називаються *ТСВ-сплайнами*.

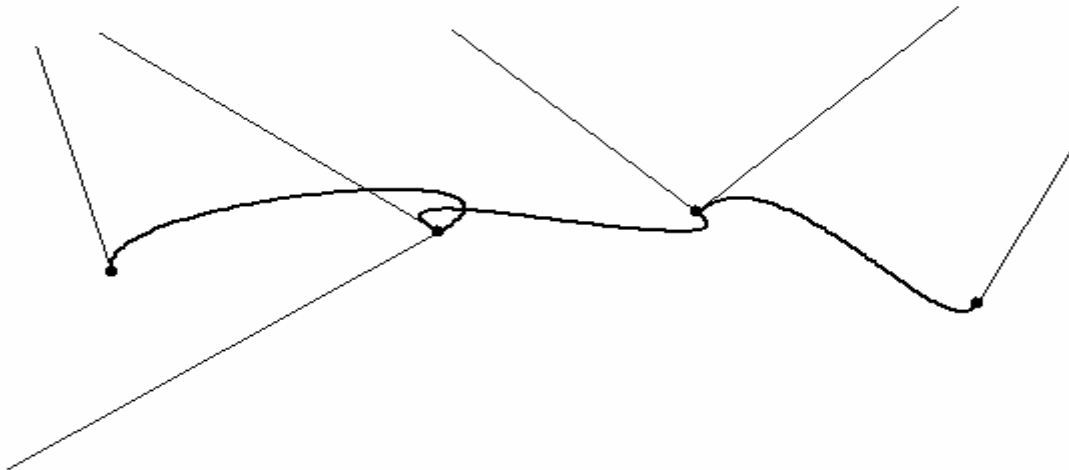


Рис. 7.10. ТСВ-сплайн

Зауваження 8. Сплайнові криві у випадку простору задаються такими ж самими формулами, тільки як $R(t)$, P_i потрібно розглядати

$$R(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \quad P_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}.$$

Контрольні питання та завдання

1. Як ставиться задача інтерполяції та задача згладжування?
2. Що таке інтерполяційний сплайн, які він має переваги над інтерполяційним многочленом? Назвіть його властивості.
3. Які властивості має інтерполяційний кубічний сплайн?
4. Що таке сплайнові криві, в якій формі їх розшукують?
5. Що таке контрольна ламана, контрольні точки?
6. Дайте визначення кривих Безьє.
7. Як записати елементарну криву Безьє в матричній формі?
8. Які властивості мають поліноми Бернштейна?
9. Назвіть властивості кривих Безьє?
10. Як за заданим масивом точок побудувати замкнену криву Безьє? Як визначити порядок гладкості? При яких умовах крива буде належати класу C^1 ?
11. Які криві Безьє називаються складеними? Коли ці криві є гладкими в точках стику?
12. Вкажіть переваги та недоліки кривих Безьє?
13. Як визначаються В-сплайни третього порядку?
14. Які властивості мають елементарні кубічні В-сплайнові криві?
15. Які властивості мають складені кубічні В-сплайнові криві?
16. Що таке однорідні/неоднорідні В-сплайни?
17. Як визначаються раціональні кубічні В-сплайнові криві? Як можна управляти їх формою?
18. Що таке NURBS-криві, в чому їх переваги?
19. Наведіть означення кривих Ерміта.
20. Назвіть властивості складеної кубічної кривої Ерміта.
21. Порівняйте криві Безьє, В-сплайни, криві Ерміта в плані інтерполяції контрольних точок і гладкості кривих у точках стику.
22. Що таке ТСВ-сплайни? Якими параметрами вони визначаються?

Вправи і задачі для самостійного виконання

1. Показати аналітично, що наведений геометричний алгоритм для кубічної кривої Безьє приводить до рівняння кривої вигляду $R(t) = (1 - t)^3 P_0 + 3t(1 - t)^2 P_1 + 3t^2(1 - t) P_2 + t^3 P_3$.
2. Розробити ефективний метод обчислення кубічних поліномів, який базується на обчисленні правих різниць.
3. Побудувати кубічну криву Безьє, яка апроксимує четверту частину кола, що лежить в першій четверті. *Вказівка. Для побудови кубічної кривої Безьє потрібно мати чотири точки. Дві крайніх точки уже відомі – це кінці дуги, що задає четверть кола. Дві*

інші опорних точки знайдемо, використовуючи властивості кривих Безьє, симетрію відносно бісектриси координатного кута і той факт, що крива Безьє при $t=0,5$ повинна пройти через точку перетину кола і бісектриси.

4. Нехай при $t = 0$ крива Безьє проходить через точку A , при $t = 1/3$ – через точку B , $t = 2/3$ – через точку C , при $t = 1$ – через точку D . Знайти опорні точки P_0, P_1, P_2, P_3 . (альтернативне визначення кривої Безьє). Теж саме виконати для В-сплайнової кривої.
5. Ламана Безьє задана трьома точками $(0, 0), (0, 9), (18, 0)$. Визначити координати точки на кривій Безьє при $t = 1/3$.
6. Записати в матричній формі квадратурні криві Безьє.
7. Показати, що поліноми Бернштейна на інтервалі $(0, 1)$ набувають значення, менші за одиницю.
8. Використовуючи квадратурні криві Безьє, сконструювати контур гліфа для букв u, a, G .
9. Дана крива Безьє $R(t), t \in [0, 1]$, яка визначається точками P_0, P_1, P_2, P_3 . Розіб'ємо криву $R(t)$ на дві частини: ліву при $t \in [0, 1/2]$ і праву при $t \in [1/2, 1]$. Знайти точки L_0, L_1, L_2, L_3 , що визнають криву Безьє, яка збігається з лівою частиною та точки R_0, R_1, R_2, R_3 , що визначають криву Безьє, яка збігається з правою частиною.
10. Вивести параметричні рівняння кривої Ерміта.
Вказівка. Рівняння необхідно шукати у вигляді

$$R(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 t^3 + b_1 t^2 + c_1 t + d_1 \\ a_2 t^3 + b_2 t^2 + c_2 t + d_2 \end{pmatrix}.$$

11. Записати формули переходу від форми кривої Ерміта до форми кривої Безьє.
12. Побудувати рівняння кривої Ерміта, що проходить через точки з координатами $(0, a), (1, b)$, а похідні в початковій та кінцевій точках дорівнюють $y'(0) = u, y'(1) = v$.
13. Які властивості має елементарна кубічна В-сплайнова крива побудована на масиві точок P_0, P_1, P_2, P_3 у випадку, якщо а) $P_1 = P_2$, б) $P_1 = P_2 = P_3$?
14. Де буде починатися/закінчуватися В-сплайнова крива, якщо до масиву точок P_0, P_1, P_2, P_3 додати опорні вершини P_{-2}, P_{-1}, P_4, P_5 так, що $P_{-2} = P_{-1} = P_0, P_3 = P_4 = P_5$?