Тема 8. Математичні моделі поверхонь

Поверхні та їх опис відіграють важливу роль у конструюванні та виробництві. Наглядні приклади – проектування і виробництво автомобільних кузовів, корабельних корпусів, авіаційних фюзеляжів і крил, посуду, взуття тощо. Опис поверхонь відіграє важливу роль при зображенні даних, одержаних у наукових експериментах. Сучасні засоби машинної графіки мають значні можливості для моделювання різноманітних поверхонь. Як приклад можна навести графічну систему AutoCAD, яка стала основою багатьох САПР у різних областях науки і техніки.

Для комп’ютерної графіки і автоматизованого проектування необхідно мати математичну модель поверхні. Така модель дозволяє відносно легко провести аналіз характеристик поверхні (наприклад, кривизни) та спростити процес візуалізації поверхні. Поверхні можна задавати різними способами, наприклад виконати інтерполяцію або апроксимацію по точках, шляхом переміщення твірної лінії за заданою траєкторією, аналітичною формулою тощо.

У комп’ютерній графіці використовуються багато різновидів аналітичних моделей опису поверхонь: у вигляді загального рівняння неявного вигляду $F(x, y, z) = 0$, явного $z = f(x, y)$ та параметричного.

Явний та неявний вигляд рівнянь поверхні має ряд недоліків, тому на практиці часто використовується параметрична форма опису поверхні

$$x = F_x(u, v),\ y = F_y(u, v),\ z = F_z(u, v),\ (u, v) \in D, \tag{8.1}$$

а також векторна $r = r(u, v)$, $(u, v) \in D$, де D – деяка область параметрів u, v.

Наведемо приклади деяких поверхонь і їхні параметричні рівняння.

Еліпсоїд:

$$\begin{aligned} &x = a\cos u \sin v, && 0 \le u \le 2\pi, \\ &y = b\sin u \sin v, && 0 \le v \le 2\pi, \\ &z = c\cos v. \end{aligned}$$

Однополий гіперболоїд:

$$\begin{aligned} &x = a\cos u \,\mathrm{ch}\, v, && 0 \le u \le 2\pi, \\ &y = b\sin u \,\mathrm{sh}\, v, && -\pi \le v \le \pi, \\ &z = c\,\mathrm{sh}\, v. \end{aligned}$$

Основна перевага параметричного описання функцій – це можливість передачі геометричної форми достатньо складних поверхонь, які іншими рівняннями описати дуже складно. Будь-яку поверхню, що описана неявно, можна подати і в параметричній формі (наприклад, еліпсоїд), але не навпаки (наприклад, рівняння тора). Параметричні поверхні можна легко обмежити в просторі, задавши межі зміни параметрів. Параметричну форму зручно використовувати при обробці деталей на станках з числовим програмним управлінням. Різець при цьому рухається за законом, що задається в параметричній формі.

Але параметричні поверхні мають і ряд недоліків, наприклад значні обчислювальні затрати, що пояснюється необхідністю застосування числових, а не аналітичних методів. Ілюстрації параметрично заданих поверхонь, як правило, не мають тіні, не передають прозорості і дзеркального відбиття сусідніх об'єктів. Це обумовлено тим, що при параметричному описі вихідна позиція світлового променя, що будує зображення – це точка на об'єкті. А це в свою чергу ускладнює застосування алгоритмів, які припускають іншу позицію променя, наприклад методу трасування променів. Щоб уникнути цього недоліку поверхні апроксимують полігональними сітками, тобто полігональними суміжними фрагментами з поверхонь першого порядку.

Особливий клас поверхонь – це бікубічні поверхні. Вони є простішими серед форм поверхонь, за допомогою яких можна конструювати неперервні складені функції разом з її першими похідними.

8.1. Білінійна та лінійчаста поверхні

Однією з найпростіших моделей поверхонь є білінійна поверхня. Нагадаємо, що пряма лінія, яка визначається двома значеннями $r(0)$ і $r(1)$, задається рівнянням

$$r(t) = tr(0) + (1 - t)r(1), \qquad t\in [0, 1].$$

Білінійна поверхня визначається аналогічно на чотирьох кутових точках. Довільна точка на поверхні є лінійною інтерполяцією між протилежними границями чотирикутника, що задається кутовими точками P_{00}, P_{01}, P_{10}, P_{11}:

$$r(u, v) = (1 - u)(1 - v)\, P_{00} + (1 - u)v\, P_{01} + u(1 - v)\, P_{10} + uv\, P_{11}$$

або в матричній формі

$$r(u, v) = (1 - u, u)\begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} \\ P_{10} & P_{11} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-v \\ v \end{pmatrix}, \quad u, v \in [0, 1].$$

Якщо чотири точки P_{00}, P_{01}, P_{10}, P_{11} не лежать в одній площині, то і білінійна поверхня теж не лежить у площині. У загальному випадку білінійна поверхня може бути сильно зігнутою.

Більш загальний випадок білінійної поверхні – це лінійчаста поверхня. Такі поверхні широко застосовують у техніці. *Лінійчастою* називають поверхню, яка може бути утворена рухом прямої лінії за певним законом. В залежності від характеру руху твірної одержують циліндричні, конічні, гвинтові та інші поверхні. Лінійчаста поверхня загального вигляду, що утворюється внаслідок руху прямолінійної твірної вздовж двох напрямних ліній $r_1(v)$, $r_2(v)$, задається рівнянням

$$r(u,v)=r_1(v)(1-u)+r_2(v)u, \quad u\in[0, 1], \quad v\in[a, b].$$

Якщо обидві криві $r_1(v)$, $r_2(v)$ є відрізками прямих, то $r(u, v)$ описує білінійну поверхню, якщо одна з кривих $r_1(v)$, $r_2(v)$ вироджується в точку, то одержуємо *секторну* поверхню. Циліндрична поверхня утворюється паралельним зміщенням прямолінійної твірної вздовж деякої кривої.

8.2. Інтерполяційні бікубічні сплайни

Нехай на площині xy задано набір з $(n + 1)(m + 1)$ точок $(x_i, y_j) \in D$, $i = 0, 1, \ldots, n$, $j = 0, 1, \ldots, m$ $(x_0 < x_1 < \ldots < x_n)$, де D – деяка прямокутна область. Нехай кожній такій точці в 3D-просторі ставиться у відповідність значення $z_{ij} = f(x_i, y_j)$ деякої функції $f(x, y)$.

Задача полягає в тому, щоб відновити поведінку функції $f(x, y)$ для всіх точок $(x, y) \in D$ шляхом побудови інтерполяційного сплайна.

Означення. *Інтерполяційним бікубічним сплайном називають функцію $z = S(x, y)$, що має такі властивості:*

1) *для всіх точок $(x_i, y_j) \in D$, $i = 0, 1, \ldots, n$, $j = 0, 1, \ldots, m$ справедлива рівність $S(x_i, y_j) = z_{ij}$;*
2) *на кожному прямокутнику $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, $j = 0, 1, \ldots, m-1$ $S(x, y)$ є многочленом 3-го степеня, тобто*

$$S^{ij}(x,y) = \sum_{l=0}^{3}\sum_{k=0}^{3} a_{lk}^{ij}\left(x-x_i\right)^l\left(y-y_j\right)^k;$$

3) *на всій області визначення $[x_0, x_n] \times [y_0, y_m]$ функція $z = S(x, y)$ має неперервні другі похідні S''_{x^2}, S''_{y^2}.*

Графіком інтерполяційного бікубічного сплайна є поверхня. Її будують аналогічно до 2D-сплайна. Для визначення 16 mn коефіцієнтів a_{lk}^{ij} розв'язують систему з 16mn лінійних рівнянь, для побудови яких використовують табличні значення $S(x_i, y_j) = z_{ij}$, умови неперервності та граничні умови для першої похідної сплайна $S(x, y)$.

Інтерполяційні сплайни проходять через усі опорні точки, однак зміна лише однієї точки, що зустрічається часто на практиці, вимагає перерахунку всього сплайна. Крім цього, на практиці опорні точки часто задаються не точно, тому достатньо вимагати, щоб графік функції проходив поблизу цих точок. У цьому випадку задача інтерполяції зводиться до задачі згладжування.

8.3. Сплайнові поверхні

За заданим масивом вершин побудуємо гладку поверхню, яка б змінювалась плавно, проходила поблизу цих вершин і задовольняла деякі додаткові умови. Точки цього масиву називаються *контрольними* (опорними), а поверхня, що визначається цими точками – *контрольною*.

Для опису складних поверхонь часто використовують сплайнові поверхні. Так називаються поверхні, що складені з елементарних фрагментів, якщо ці фрагменти будуються за єдиною схемою. Сплайн – це спеціальна функція, яка найбільше підходить для апроксимації окремих фрагментів поверхні. Для сплайна можна досить просто обчислювати координати точок, оскільки, як правило, використовують бікубічні сплайни. Найрозповсюдженіші сплайн-поверхні – це поверхня Безьє та B-сплайнові поверхні. Ці поверхні використовуються в тих випадках, коли потрібна поверхня естетичного вигляду, що проходить поблизу цих точок. Спосіб задання згладжувальних поверхонь є аналогічним способу задання згладжувальних кривих.

8.3.1. Поверхні Безьє

Узагальнимо криві Безьє на поверхні Безьє. *Згладжуючі поверхні Безьє* будуються у вигляді тензорного добутку. Так називаються поверхні, що описуються параметричними рівняннями вигляду

$$r(u,v)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}a_i^n(u)b_j^m(v)P_{ij}\,,\quad i=0,1,\dots,n,\ j=0,1,\dots,m, \qquad (8.2)$$

де P_{ij} – опорні точки-орієнтири тривимірного простору, $r(u, v)$ = colon($x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$). Якщо ці точки відповідним чином з'єднати прямолінійними відрізками, то одержимо контрольну (опорну) многогранну поверхню (рис. 8.1).

Оскільки співвідношення (8.2) можна переписати у вигляді

$$r(u,v)=\sum_{i=0}^{n}a_i^n(u)s_i(v),$$

де $\quad s_i(v)=\sum_{j=0}^{m}b_j^m(v)P_{ij}\,,\ i=0,1,\dots,\ n,$

то це означає, що на тривимірний випадок можна перенести багато властивостей і результатів, які одержані для сплайнових кривих.

Якщо за функції $a_i^n(u)$ та $b_j^m(v)$ взяти базисні функції Бернштейна:

$$a_i^n(u)=B_i^n(u)=C_n^iu^i(1-u)^{n-i},\qquad C_n^i=\frac{n!}{i!(n-i)!},$$

$$b_j^m(v)=B_j^m(v)=C_m^jv^j(1-v)^{m-j},\qquad u,v\in[0,1],$$

то формулою (8.2) задаються поверхні Безьє.

Бікубічний сплайн Безьє відповідає значенням m = 3, n = 3 і має вигляд

$$r(u,v)=\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3}C_3^iC_3^ju^i(1-u)^{3-i}v^j(1-v)^{3-j}P_{ij}\,,$$

або в матричній формі

$$\begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & u & u^2 & u^3 \end{pmatrix} M^T \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & P_{03} \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{30} & P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix}, \qquad (8.3)$$

де $M = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – базова матриця бікубічної поверхні Безьє.

Зазначимо, що для визначення бікубічної поверхні Безьє необхідно задати 16 опорних точок P_{ij}, $i, j = 0, 1, 2, 3$. Для візуалізації поверхні будують лінії рівнів $r(u, v_0)$, $v_0 = \text{const}$, $r(u_0, v)$, $u_0 = \text{const}$, де v_0, $u_0 \in [0, 1]$ (рис. 8.1).

Елементарна бікубічна поверхня Безьє успадковує багато властивостей елементарної кубічної кривої Безьє. Укажемо найосновніші з них.

Бікубічна поверхня Безьє

- лежить в опуклій оболонці опорних точок;
- проходить через точки P_{00}, P_{01}, P_{10}, P_{11} і дотикається до відрізків, що виходять з цих точок і належать контрольному графу масиву P;
- афінно інваріантна, але проективно неінваріантна;

З елементарних фрагментів поверхонь Безьє можна конструювати складені поверхні Безьє, які є C^0-гладкими поверхнями, коли збігаються чотири контрольні точки двох суміжних фрагментів.

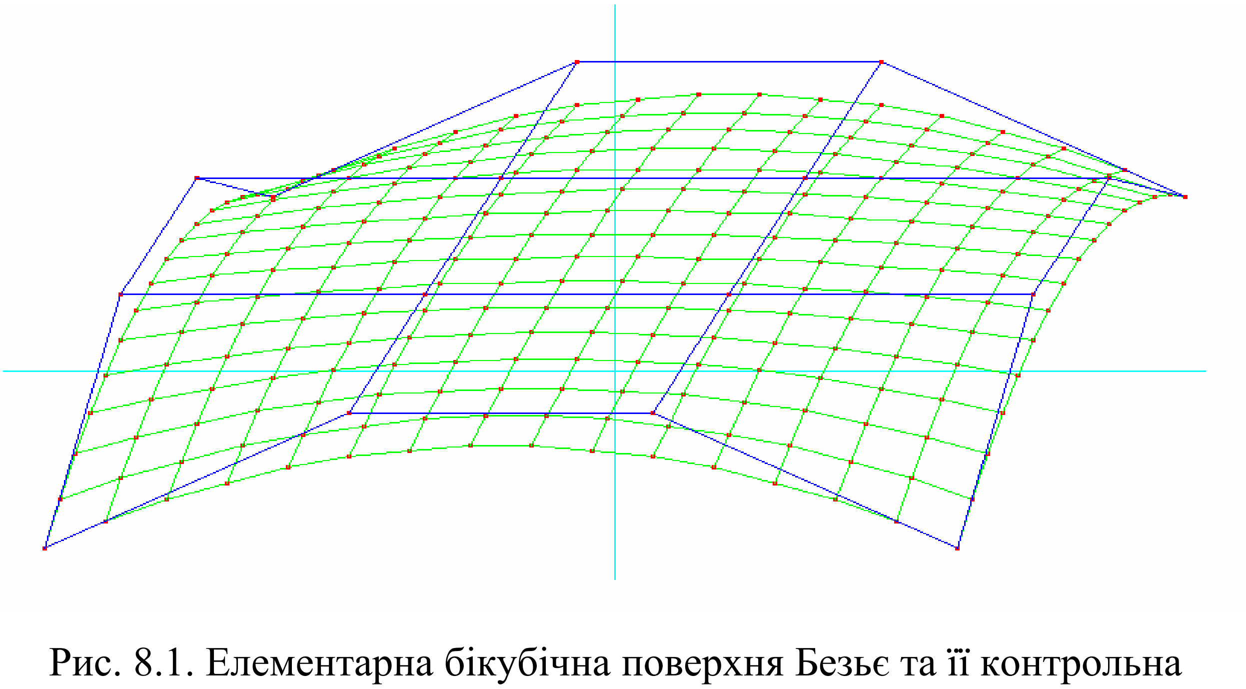

Рис. 8.1. Елементарна бікубічна поверхня Безьє та її контрольна поверхня

8.3.2. В-сплайнові поверхні

Векторне параметричне рівняння елементарного фрагмента бікубічної В-сплайнової поверхні, що задана на масиві точок P_{ij}, $i, j = 0, 1, 2, 3$ має вигляд

$$r(u, v) = \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} n_i^3(u) n_j^3(v) P_{ij}, \quad u,v \in [0,1],$$

де $n_0^3(u) = \frac{1}{6}(1-u)^3$, $n_1^3(u) = \frac{1}{6}(3u^3 - 6u^2 + 4)$,

$$n_2^3(u) = \frac{1}{6}(-3u^3 + 3u^2 + 3u + 1), \quad n_3^3(u) = \frac{1}{6}u^3, \quad u \in [0, 1].$$

Як і бікубічна поверхня Безьє, елементарна бікубічна В-сплайнова поверхня наслідує багато властивостей елементарної кубічної В-сплайнової кривої. Об'єднуючи елементарні бікубічні В-сплайни, одержуємо складену В-сплайнову поверхню, для якої на границях двох фрагментів автоматично забезпечується належність класу C^2.

Раціональна (елементарна) бікубічна В-сплайнова поверхня за заданим масивом точок P_{ij}, $i, j = 0, 1, 2, 3$ визначається рівнянням

$$r(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} \omega_{ij} n_i^3(u) n_j^3(v) P_{ij}}{\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} \omega_{ij} n_i^3(u) n_j^3(v)}, \quad u,v \in [0,1], \qquad (8.4)$$

де $\omega_{ij} \geq 0$ $(\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} \omega_{ij} > 0)$ – вагові коефіцієнти.

Раціональні В-сплайнові поверхні, які в англомовній літературі називають ще NURBS-поверхнями, широко застосовуються на практиці, наприклад в інженерних системах для моделювання складних поверхонь зі складними межами та дірками, для моделювання людського тіла та тіла тварин, оскільки ними можна описувати довільні геометричні форми.

Тут ми зупинилися лише на деяких способах побудови згладжувальних поверхонь і побачили, наскільки це непроста задача. Реалістичне зображення гладкої поверхні на екрані дисплея – складна задача, вона полягає в розрахунку її форми на основі правильного визначення освітленості видимих точок поверхні, матеріалу поверхні тощо. Спрощена побудова поверхні $r = r(u, v)$ полягає в зображенні її каркаса – сукупності ліній, що передають форму поверхні. Для цього виконується дискретизація неперервних параметрів

$$u = u_0, u_1, \ldots, u_n, \; v = v_0, v_1, \ldots, v_m$$

і організація вкладених циклів виведення каркасних ліній $r(u_i, v)$ і $r(u, v_j)$. Перетин ліній дає комірки трикутної або чотирикутної форми, які апроксимують поверхню.

Контрольні питання та завдання

1. Як аналітично можна задавати поверхні? В чому перевага та недоліки параметричної форми?
2. Наведіть приклади параметрично заданих поверхонь.
3. Які поверхні називаються бікубічними? Які вони мають переваги?
4. Як задати білінійну/лінійчасту поверхню?
5. Як задати секторну поверхню?
6. Назвіть властивості інтерполяційного бікубічного сплайна.
7. Як визначається елементарна бікубічна поверхня Безьє?
8. Які властивості має складена бікубічна поверхня Безьє?
9. При яких умовах на граничні контрольні точки складена поверхня Безьє належить класу C^1?
10. Як визначається елементарна бікубічна В-сплайнова поверхня?
11. Які властивості має складена бікубічна В-сплайнова поверхня?
12. Що таке NURBS-поверхні?

Вправи і задачі для самостійного виконання

1. Записати рівняння лінійчастої поверхні, що проходить через діагональ куба і бічне ребро, яке не має з діагоналлю спільних точок.
2. Записати в матричній формі рівняння квадратичної поверхні Безьє. Довести, що ця поверхня проходить через крайні кутові точки заданої матриці точок P_{ij} ($i, j = 0, 1, 2$).
3. Побудувати параметричне рівняння поверхні Безьє за такими контрольними точками

$$
\begin{array}{llll}
P_{00}(0,0,0) & P_{01}(1,1,0) & P_{02}(2,1,0) & P_{03}(3,0,0) \\
P_{10}(0,1,1) & P_{11}(1,2,1) & P_{12}(2,2,1) & P_{13}(3,1,1) \\
P_{20}(0,1,2) & P_{21}(1,2,2) & P_{22}(2,2,2) & P_{23}(3,1,2) \\
P_{30}(0,0,3) & P_{31}(1,1,3) & P_{32}(2,1,3) & P_{33}(3,0,3).
\end{array}
$$

4. Розробити алгоритм обчислення вектора нормалі до поверхні Безьє в точці $P(u,v)$.
5. Записати параметричні рівняння елементарної бікубічної В-сплайнової поверхні в матричній формі.
6. Побудувати параметричне рівняння В-сплайнової поверхні за контрольними точками з прикладу 3.
7. Узагальнити рівняння кривих Ерміта на поверхні Ерміта.
8. Задати квадратичну поверхню в матричному виді. Як зміниться матриця квадратичної поверхні, якщо над нею здійснити афінні перетворення з матрицею F. Записати координати нормалі до поверхні другого порядку.