

Тема 8. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА В MAPLE. ВЕКТОРНІ ОПЕРАЦІЇ

Лінійна алгебра

Лінійна алгебра - частина алгебри, що вивчає теорії лінійних рівнянь, матриць, векторних просторів та лінійних перетворень.

Історично першим питанням лінійної алгебри було знаходження розв'язки лінійних рівнянь.

Лінійні рівняння як рівняння прямих і площин стали предметом вивчення після винаходу Декартом і Ферма методу координат (близько 1636). Гамільтону (1833) належить авторство терміну «вектор». Теорія матриць була розроблена Келі (1850). Системи лінійних рівнянь вперше з'явилися у роботах Лагерра (1867). Грассман у 1844 та 1862 року вивчає теорією систем алгебри.

Векторним (або лінійним простором) називають множину векторів вектори з будь-яким можливим значенням компонент.

Для того щоб множина векторів складала векторний простір на ній повинен діяти ряд **аксіом**: комутативності, асоціативності,

дистрибутивності, додавання і множення на скаляр, існування нульового і протилежного елемента.

Число n , яке визначає кількість елементів вектора називається **розмірністю** векторного простору. Лінійна алгебра вивчає векторні простори **скінченної** розмірності.

Між двома векторними просторами можна задати **відображення**. Лінійна алгебра вивчає відображення, які називаються **лінійними**. Лінійне відображення пов'язує між собою два векторні простори, побудовані над одним і тим же полем.

Головними об'єктами лінійної алгебри є такі абстрактні поняття, як масиви (*array*), вектори (*vector*) і матриці (*matrix*).

Векторні операції

Вектор - це індексована сукупність чисел або інших математичних об'єктів $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Часто вектор записують у вигляді стовпчика.

Вектор **AB** (або ж **a**) має початок - точку **A** і кінець - точку **B** . Вектор є направлений відрізок прямої.

Пряма, на якій лежить вектор, називається лінією дії вектора.

Два вектори є колінеарні, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих. Якщо вектори колінеарні, то їх відповідні координати пропорційні.

Рівні вектори мають однакові координати.

Нульовий має нульові координати – його початок збігається з кінцем.

Елементи векторів є індексованими змінними – місце кожного елемента вектора визначається його індексом. Виклик i -го елемента вектора $\mathbf{a}$ здійснюється записом $\mathbf{a}[i]$, привласнення нового значення x i -му елементу вектора $\mathbf{a}$ має вигляд $\mathbf{a}[i]=x$.

Операції над векторами

Довжина вектора або модуль вектора визначається за формулою:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(AB)_x^2 + (AB)_y^2 + (AB)_z^2}$$

Сумою двох векторів є вектор, побудований на діагоналі паралелограма. Для двох векторів $\mathbf{a}(a_1, a_2)$ і $\mathbf{b}(b_1, b_2)$ в площині маємо: $(a_1 + b_1, a_2 + b_2)$.

Добутком вектора $\mathbf{a}(a_1, a_2)$ на число k є вектор $\mathbf{c}(k a_1, k a_2)$.

Ортом вектора $\mathbf{a}$ є вектор одиничної довжини, який має той же напрямок, що і вектор $\mathbf{a}$. Орт визначається діленням компонентів вектора на його довжину: $\mathbf{e} = \mathbf{a} / |\mathbf{a}|$.

Векторним добутком двох векторів $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ є вектор, який:

- перпендикулярний площині векторів $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$;
- його модуль рівняється добутку модулів векторів $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ на синус кута між ними;
- векторний добуток двох колінеарних векторів рівняється нулю.

Векторний добуток представляється визначником третього порядку: в першому рядку проставляються базисні вектори декартової системи координат; у другому - координати першого вектора - співмножника, в третьому - координати другого вектора.

Приклад 1. Дано $A_1(7,0,3)$, $A_2(3,0,1)$, $A_3(3,0,5)$. Знайти площу трикутника $A_1A_2A_3$.

Рішення. Знайдемо координати векторів $A_1A_2(-4,0,-2)$ і $A_1A_3(-4,0,2)$.

Площа трикутника рівняється половині площі паралелограма:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |A_1A_2 \times A_1A_3| = \frac{1}{2} \sqrt{0^2 + 16^2 + 0^2} = 8$$

або ж через скалярний добуток:

$$\begin{aligned} S_{\text{парал}} &= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \theta \rightarrow S_{\text{парал}}^2 = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cdot \sin^2 \theta \rightarrow S_{\text{парал}}^2 = \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2 (1 - \cos^2 \theta) \rightarrow \\ &\rightarrow S_{\text{парал}}^2 = \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2 - \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2 \cdot \cos^2 \theta = \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = \begin{vmatrix} \vec{a}^2 & \vec{a} \cdot \vec{b} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} & \vec{b}^2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

або ж

$$S_{\text{парал}} = \sqrt{\begin{vmatrix} \vec{a}^2 & \vec{a} \cdot \vec{b} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} & \vec{b}^2 \end{vmatrix}}$$

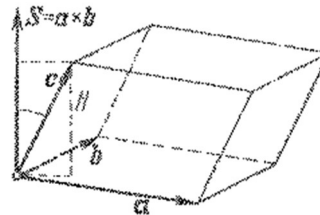
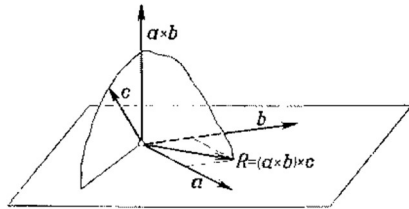
Добутки трьох векторів

Найпростішим добутком трьох векторів є множенням скалярного добутку двох векторів $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ на третій вектор $\mathbf{c}$: $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c}$.

Векторно-векторний добуток трьох векторів є вектор: $\mathbf{r} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$. Вектор $\mathbf{r}$ перпендикулярний до вектора $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ і до вектора $\mathbf{c}$.

Векторно-скалярним або **мішаним** добутком трьох векторів називається величина, яка одержується із скалярного множення векторного добутку $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ двох векторів на третій вектор $\mathbf{c}$: $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$.

Мішаний добуток є скаляр. Позначивши $\mathbf{S} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, отримаємо $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{c} = S c \cos(\mathbf{S}, \mathbf{c})$. Мішаний добуток дорівнює нулю, коли вектори компланарні - об'єм паралелепіпеда дорівнює нулю, наприклад, два множника однакові: $(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$.



Пакет лінійної алгебри *linalg*

В *Maple* виконання перетворень лінійної алгебри можна виконати за допомогою двох пакетів:

- *linalg* – для виконання абстрактних обчислень над матрицями і векторами;
- *LinearAlgebra* – робота з числовими матрицями.

В пакеті *linalg* вектори та матриці побудовані на основі масиву *array*. Кількість функцій пакету *linalg* містить понад сто назв.

>with(linalg);

[BlockDiagonal, GramSchmidt, JordanBlock, LUdecomp, QRdecomp, Wronskian, addcol, addrow, adj, adjoint, angle, augment, backsub, band, basis, bezout, blockmatrix, charmat, charpoly, cholesky, col, coldim, colspace, colspan,

Приклади.

a:=vector([6,2,1]);b:=vector([0,-1,2]);

[6, 2, 1]

[0, -1, 2]

```
c:=matadd(a, b, 2, -1);
```

[6, 1, 3]

```
norm(c,2);
```

13

Побудувати зображення векторів векторного добутку

```
restart: with(linalg): with(plots):
```

```
a:=vector([-5,-7,-4]):
```

```
b:=vector([-9,-10,-2]):
```

```
c:=crossprod(a,b): arrow([a,b,c]):
```

Мішаний добуток трьох векторів:

```
>with(linalg):
```

```
a:=vector([-5,-7,-4]):
```

```
b:=vector([-9,-10,-2]):
```

```
ec:=vector([-2,-11,3]):
```

```
dotprod(crossprod(a,b),c);
```

-373