

Тема 9. МАТРИЦІ В MAPLE. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Матриці

Матриця ($m \times n$) – прямокутна двовимірنا таблиця, яка включає m рядків і n стовпчиків елементів.

В матриці A числа a_{ij} називають її елементами, перший індекс означає номер рядка, другий - номер стовпчика, на перетині який знаходиться елемент ($i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n$).

Розмірністю матриці називається вираз $n \times m$, де n - кількість рядків, а m - число стовпців матриці.

Квадратна – кількість рядків рівняється кількості стовпчиків.

Одинична матриця E – квадратна матриця, у якої діагональні елементи дорівнюють 1 , а всі останні 0 .

Транспонована матриця – стовпчики та рядки міняються місцями.

Обернена матриця – матриця, яка помножена на вихідну матрицю, дає одиничну матрицю E .

Матриця є **нульовою**, якщо всі її елементи рівняються нулю.

Матриця A^t , яка отримується з матриці A , якщо всі рядки матриці замінити на відповідних стовпців, називається **транспонованою**.

Квадратна матриця, у якої всі елементи поза головною діагоналлю, дорівнюють нулю, називається **діагональною**.

Дії над матрицями

Добуток матриці A на довільне число α називається матриця, елементами якої служать твори елементів матриці A на α :

$$\alpha \cdot A = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_{11} & \alpha \cdot a_{12} & \dots & \alpha \cdot a_{1n} \\ \alpha \cdot a_{21} & \alpha \cdot a_{22} & \dots & \alpha \cdot a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha \cdot a_{m1} & \alpha \cdot a_{m2} & \dots & \alpha \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

Сумою (різницею) двох однакової розмірності $m \times n$ матриць A і B називається матриця, елементи якої дорівнюють сумам (різницям) відповідних елементів матриць A і B , тобто $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ для суми матриць ($i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n$), де a_{ij} - елементи матриці A , b_{ij} - елементи матриці B

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Добуток матриці розмірності $k \times s$ матриці A розмірності $s \times n$ називається $k \times n$ - матриця, елементи c_{ij} ($i=1, 2, \dots, k; j=1, 2, \dots, n$) якої дорівнюють сумі добутків елементів i - го рядка матриці B на відповідні елементи j - го стовпця матриці A .

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{ks} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^s b_{1i} \cdot a_{i1} & \sum_{i=1}^s b_{1i} \cdot a_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^s b_{1i} \cdot a_{in} \\ \sum_{i=1}^s b_{2i} \cdot a_{i1} & \sum_{i=1}^s b_{2i} \cdot a_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^s b_{2i} \cdot a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^s b_{ki} \cdot a_{i1} & \sum_{i=1}^s b_{ki} \cdot a_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^s b_{ki} \cdot a_{in} \end{pmatrix}.$$

Добуток матриць некоммутативно: $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Для будь-якої матриці A існує єдина матриця Y така, що сума цих матриць дорівнює нульовій матриці: $A + Y = 0$.

Протилежну матрицю позначають $-A = (-1) \cdot A$.

Різницею двох матриць A однакового розміру є така матриця C , для якої справедливо рівність $B+C=A$.

Визначником квадратної матриці називається є число.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{0+0} a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)^{0+2} a_{12}a_{23}a_{31} + (-1)^{0+2} a_{13}a_{21}a_{32} + \\ + (-1)^{3+0} a_{31}a_{22}a_{13} + (-1)^{3+2} a_{32}a_{23}a_{11} + (-1)^{1+0} a_{21}a_{12}a_{33} = \\ = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}.$$

Системи лінійних рівнянь

Система m -лінійних алгебраїчних рівнянь з n змінними $x_1, x_2, \dots, x_n$ у загальному вигляді записується (1):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \equiv \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, (i = \overline{1, n})$$

(1)

де: a_{ij} - коефіцієнти системи; x_j - змінна; b_i - вільні члени; i - номер рядка, j - номер стовпчика.

Вона може бути представлена у матричній формі як:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

або ж у скороченій формі:

$$Ax=B, \quad (2)$$

де: $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ - матриця коефіцієнтів;

$B = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{vmatrix}$ - матриця вільних членів;

$x = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix}$ - шукана матриця.

Коефіцієнти матриць A і B є значеннями дійсних чисел. Якщо матриця A не вироджена:

$$\det A \neq 0,$$

тоді така система має єдиний розв'язок.

Розв'язком системи (1) n рівнянь з n змінними є впорядкована сукупність n чисел на дійсній множині, яка при підстановці в систему (1) замість $x_1, x_2, \dots, x_n$ повертає кожне лінійне рівняння в рівність.

Число елементарних операцій при вирішенні систем з n змінними пропорційна приблизно n^3 .

Методи вирішення системи лінійних алгебраїчних рівнянь поділяються на **прямі** (точні) і **ітераційні** (наближені).

Прямі методи дозволяють за визначену кількість дій одержати точне (з точки зору алгоритму) вирішення системи.

Ітераційні методи ґрунтуються на побудові ітераційної обчислювальної послідовності, яка збігається до шуканого вирішення. В цьому випадку, виконуючи визначене число ітерацій, можна одержати наближене вирішення системи з наперед заданою похибкою ε .

Методи вирішення системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Прямі (точні)

- за формулами Крамера
- метод Гауса

Ітераційні (наближені)

- простих ітерацій
- метод Зейделя

Формули Крамера використовується для системи лінійних рівнянь розмірністю не більше 4, інакше кількість обчислювальних операцій зростає по закону $N(n) = (n^2 - 1)n! + n$.

Метод Гауса є одним із найбільш ефективних і універсальних методом вирішення лінійних алгебраїчних систем.

Вибір того чи іншого методу вирішення системи лінійних рівнянь визначається факторами: особливостями матриці $[A]$, порядком системи n , характером задачі, яка вирішується тощо.

В таблиці (нижче) наведено число операцій в залежності від методу і розмірності системи рівнянь.

Метод	Крамера	Гауса
$n=5$	2885	65
$n=10$	$360 \cdot 10^6$	430

Всі алгоритми вирішення систем лінійних рівнянь базуються на елементарних операціях над елементами матриць A , X і B :

1. Множенню всіх елементів якого не-будь рядка на одне і теж число.
2. Додавання чи віднімання елементів між рядками.
3. Перестановку рядків.

Формули Крамера

Вихідні дані:

- система лінійних рівнянь виду $a_{ij} x_j = b_i (i=1, n; j=1, n)$ при $n < 4$;
- визначник Δ матриці $a_{ij} (i=1, n; j=1, n) \equiv (a_{ij})_{n,n}$ не рівняється нулю;

Необхідно знайти значення матриці $x_i (i=1, n) \equiv (x_i)_n$.

Суть методу. Визначити визначники: Δ - головний і Δ_i - допоміжні.

Допоміжні визначники визначаються для матриць, в яких кожен j -стовпчик матриці $(a_{ij})_{n,n}$ замінити матрицею - стовпчиком $(b_i)_n$ вільних членів. Якщо головний визначник рівняється нулю, тоді система особлива - рішення може мати безліч варіантів, або не мати жодного. Якщо ж головний визначник не рівняється нулю, тоді коефіцієнти шуканої матриці $x_i (i=1, n) \equiv (x_i)_n$ будуть визначатися по формулі: $x_i = \Delta_i / \Delta, (i=1, n)$.

Послідовність обчислення:

1. Визначити головний визначник Δ . Якщо значення головного визначника рівняється нулю, тоді «кінець обчислення», інакше перейти до пункту 2.
2. Визначити допоміжні визначники Δ_i і перейти до пункту 3.
3. Визначити корені системи лінійних рівнянь по формулі: $x_i = \Delta_i / \Delta, (i=1, n)$ і перейти до пункту 4.
4. Вивести значення коренів x_i .

Метод Гауса (послідовного виключення)

Вихідні дані:

- система лінійних рівнянь виду $Ax=b$;
- визначник матриці $[A]$ не рівняється нулю.

Необхідно знайти значення x_i .

Суть методу. Метод послідовного виключення шуканих змінних $x_i(i=1,n)$ є одним із найбільш ефективним і універсальних методів вирішення систем лінійних рівнянь.

Процес вирішення по методу Гауса складається із двох етапів. На першому етапі (прямий хід) система (1) приводиться до трикутного виду, а на другому (зворотній хід) - виконується послідовне визначення шуканих значень цієї трикутної системи.

Розглянемо метод Гауса вирішення системи із 3-х лінійних рівнянь.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{12}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{13}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (1)$$

Будемо рахувати, що коефіцієнт a_{11} , який називається **ведучим елементом першого кроку**, відмінний від нуля. Поділимо перший рядок системи на коефіцієнт $-a_{11}$ і будемо складувати його з наступними рядками системи, причому спочатку його потрібно помножити на коефіцієнт a_{11} . Одержимо систему виду:

$$\begin{cases} a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (1)$$

Такий же підхід реалізуємо для останніх двох рядків системи, після чого одержимо трикутну систему виду:

$$\begin{cases} a_{22}^2x_2 + a_{23}^2x_3 = b_2^2 \\ a_{33}^2x_3 = b_3^2 \end{cases} \quad (3)$$

Звідси, значення $x_3 = b_3^2 / a_{33}^2$. Якщо це значення підставити в другий рядок, тоді можна визначити і x_2 . Підставляючи x_3 , x_2 в перший рядок системи, одержимо і значення x_1 .

Матричний спосіб вирішення систем лінійних рівнянь

Систему лінійних алгебраїчних рівнянь можна подати в матричному вигляді:

$$A \cdot X = B.$$

Якщо матриця A не особлива ($|A| \neq 0$), то існує обернена їй матриця A^{-1} . Помножимо матричне рівняння на обернену матрицю:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B,$$

звідки:

$$E \cdot X = A^{-1} \cdot B,$$

або ж:

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Таким чином, для знаходження коренів системи лінійних рівнянь потрібно обчислити обернену матрицю A^{-1} та виконати її множення на вектор вільних коефіцієнтів B .

Пакет *LinearAlgebra*

Пакет *LinearAlgebra* є новим і дозволяє працювати з матрицями великих розмірів, використовуючи наближені розрахунки *Numerical Algorithms Group (NAG)*.

Пакет *LinearAlgebra* побудований на основі спеціальних конструкторів *Vector()* і *Matrix()* або ж короткої нотації $\langle a, b, c \rangle$.
with(LinearAlgebra);

[&x, *Add, Adjoint, BackwardSubstitute, BandMatrix, Basis, BezoutMatrix, BidiagonalForm, BilinearForm, CARE, CharacteristicMatrix, CharacteristicPolynomial, Column, ColumnDimension, ColumnOperation, ColumnSpace, CompanionMatrix, CompressedSparseForm, ConditionNumber,*

Команди роботи зі структурою матриць і векторів:

- *rowdim(M)* число рядків матриці *M*.
- *coldim(M)* число стовпців матриці *M*.
- *vectdim(v)* число елементів вектора *v*.
- *convert(list, vector)* перетворення змінної типу *list* в вектор.

- $row(M, i)$ виділення i -го рядка з матриці M .
- $col(M, i)$ виділення i -го шпальти з матриці M .
- $concat(M1, M2)$ з'єднання матриць $M1$ і $M2$.

Математичні операції з матрицями і векторами:

- $add(u, v)$ або ж $evalm(u+v)$ додавання двох векторів або матриць.
- $multiply(M1, M2)$ або $evalm(M1 \& * M2)$ множення матриць $M1$ і $M2$.
- $dotprod(v1, v2)$ скалярний добуток векторів $v1$ і $v2$.
- $crossprod(v1, v2)$ векторний добуток векторів $v1$ і $v2$.
- $angle(v1, v2)$ обчислення кута між векторами $v1$ і $v2$.
- $inverse(M)$ або $evalm(1/M)$ обчислення оберненої до M матриці.
- $det(M)$ обчислення визначника матриці.
- $transpose(M)$ транспонування матриці.
- $linsolve(M, v)$ рішення лінійної системи рівнянь $Mx=v$.
- $gausselim(M)$ метод Гауса для матриці M .

Приклади.

Завдання матриць:

with(linalg):

$A := \text{matrix}(3,3,[1,4,2,2,1,-2,0,1,-1]);$

$B := \text{matrix}([[4,6,-2],[6,10,-1],[2,4,-5]]);$

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad B := \begin{bmatrix} 4 & 6 & -2 \\ 6 & 10 & -1 \\ 2 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

Обчислення квадрата матриці A (добуток матриці A на себе):
 $\text{evalm}(A \& * A);$

$$\begin{bmatrix} 9 & 10 & -8 \\ 4 & 7 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Добуток матриці A на матрицю B :
 $\text{multiply}(A,B);$

$$\begin{bmatrix} 32 & 54 & -16 \\ 10 & 14 & 5 \\ 4 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

Транспонування матриці A :

transpose(A);

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Розв'язок системи лінійних рівнянь в Maple

with(linalg);

eqns:= {x+5y-z=1, x+y=5, x+z=7};

#задання системи лінійних рівнянь

sols:= solve(eqns);

#вирішення системи

$$\{x = -17/7, y = 18/7, z = 66/7\}$$

subs(sols, eqns);

#перевірка рішення підстановкою в систему

$$\{7 = 7, 5 = 5, 1 = 1\}$$

linsolve(A, B);

рішення системи $A X=B$, де A - матриця, B - стовпець вільних членів