

Тема 10. ІНТЕРПОЛЯЦІЯ

Постановка задачі інтерполяції

В практиці необхідно вирішувати дві взаємно обернені задачі:

- **табулювання** функції - по аналітичному завданні функції одержати значення для конкретних її аргументів (скласти таблицю значень функції в її точках);
- **інтерполяції** - по заданим табличним значенням одержати проміжне значення (визначити значення функції для заданого аргументу за аналітичним виразом).

Нехай деяка функція $y=f(x)$ задана таблично - для заданих значень аргументу x_i задані значення функції $y_i=f(x_i)$, $i=0,..n$.

Необхідно знайти аналітичний вираз деякої функції, яка б співпадала з даною функцією $f(x_i)$ - в точках x_i приймала значення y_i , $i=0..n$.

З геометричної т. з. задача інтерполяції зводиться до знаходження рівняння кривої $y=P(x)$, яка проходить через точки (x_i, y_i) , $i=0..n$.

Інтерполювання (або інтерполяція) - наближена заміна функції $y=f(x)$ на відрізку $[a, b]$ заданою функцією $y=P(x)$, так щоб функція $y=P(x)$ в точках x_i , $i=0..n$ набувала тих самих значень, що й функція $y=f(x)$, тобто $P(x_i)=y_i$ $i=0..n$.

Точки x_i , $i=0..n$ називають **вузлами** інтерполяції, функцію $y=P(x)$ - **інтерполюючою**, а формулу $f(x) \approx P(x)$ - **інтерполяційною** формулою.

Інтерполяційний багаточлен будують у випадках:

- функцію задано таблично для деяких значень аргументу, а потрібно знайти її значення для аргументу, який відсутній у таблиці;
- функцію задано графічно, а потрібно знайти її наближений аналітичний вираз;
- функцію задано складним аналітичним виразом, який не зручний для інтегрування, диференціювання.

Види інтерполуючих функції $y=P(x)$:

- **параболічна** (алгебраїчні поліноми) - лінійна, квадратична і т.д.
- **трансцендентна** (тригонометричні).

При інтерполяції розв'язують наступні задачі:

- вибір найбільш задовільного способу побудови інтерполяційного багаточлена заданої функції для кожного конкретного випадку;
- оцінка похибки при заміщенні $P_n(x) \approx f(x)$ для $x \in]a; b[$;
- оптимальний вибір вузлів інтерполяції для зменшення похибки.

Задача **екстраполяції** - знаходження значення функції для аргументу який знаходиться за межами таблиці визначення функції.

Недоліком інтерполяції є те, що для багатьох вузлів утворюється багаточлен високого степені. Якщо ж вихідні дані були одержані неточно, то інтерполуюча функція хоча точно проходить через вузлові точки, все ж таки є неточною. В таких випадках слід використовувати **апроксимацію** - визначення функції, яка найближче (найкраще) підходить до вузлових точок.

Параболічна інтерполяція

Інтерполяція алгебраїчними поліномами називається параболічною інтерполяцією. Постановка параболічної інтерполяції має вигляд:

- для заданих значень $f(x_i)=y_i$, $i=0..n$ побудувати багаточлен $y=P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+..+a_n$, де n - степені і який задовольняє вимоги:
- в точках x_i , $i=0..n$ значення багаточлена $P_n(x_i)$ співпадають із значенням даної функції $f(x_i)$, тобто $P_n(x_i)=f(x_i)=y_i$, $i=0..n$;
- в будь-якій іншій точці $x \in]x_0; x_n[$ виконується наближено рівність $P_n(x) \approx f(x)$.

Геометрична сутність параболічної інтерполяції є в тому, що графік однієї функції $f(x)$ заміщується графіком багаточлена P степеня n , причому ці два графіки мають $(n+1)$ загальну точку.

Для параболічної інтерполяції кількість вузлів інтерполяції формує порядок поліному на одиницю менший.

Лінійна інтерполяція

Вихідні дані:

- задані значення функції $f(x)$ в двох точках: $f(x_0)=y_0$ і $f(x_1)=y_1$;
- порядок шуканого інтерполуючого багаточлена $n=1$.

Суть методу. Графік лінійної функції $P_1(x)=a_0x+a_1$ повинен проходити через дві точки $(x_0;y_0)$ і $(x_1;y_1)$. Тому шукані коефіцієнти a_0 і a_1 можна визначити із системи лінійних рівнянь:

$$P_1(x_i) = f(x_i) = y_i (i = 0,1), \quad c \begin{cases} a_0 x_0 + a_1 = y_0 \\ a_0 x_1 + a_1 = y_1 \end{cases}.$$

Вирішення цієї системи відносно a_0 і a_1 одержуємо:

$$a_0 = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}; \quad a_1 = \frac{x_0 y_1 - x_1 y_0}{x_0 - x_1}.$$

Тоді інтерполяційний багаточлен можна записати у вигляді:

$$P_1(x) = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} \cdot x + \frac{x_0 y_1 - x_1 y_0}{x_0 - x_1} = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \cdot y_0 + \frac{x_0 - x}{x_0 - x_1} \cdot y_1.$$

Таким чином функцію $f(x)$ можна перезадати наближено поліномом виду $P_1(x)$, який називається формулою лінійної інтерполяції.

З геометричної точки зору, формули лінійної інтерполяції заміщають дугу кривої $y=f(x)$ на інтервалі $[x_0; x_1]$ відрізком прямої лінії $y=P_1(x)$, який проходить через точки $(x_0; y_0)$ і $(x_1; y_1)$ виду:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$$

звідки:

$$y = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} (x - x_0) + y_0$$

Лінійну інтерполяцію використовують при роботі з таблицями при знаходженні значення функції для проміжних значень аргументів.

Квадратична інтерполяція

Вихідні дані:

- задані значення функції $f(x)$ в трьох точках: $f(x_0)=y_0$; $f(x_1)=y_1$; і $f(x_2)=y_2$;
- порядок шуканого інтерполюючого багаточлена $n=2$.

Суть методу. Графік квадратичної функції $P_2(x)=a_0x^2+a_1x+a_2$ повинен проходити через всі три $(x_0;y_0)$, $(x_1;y_1)$ і $(x_2;y_2)$.

Тому шукані коефіцієнти a_0 , a_1 і a_2 можна визначити із системи лінійних рівнянь:

$$P_2(x_i) = f(x_i) = y_i \ (i = 0,1,2), \quad \begin{cases} a_0x_0^2 + a_1x_0 + a_2 = y_0 \\ a_0x_1^2 + a_1x_1 + a_2 = y_1 \\ a_0x_2^2 + a_1x_2 + a_2 = y_2 \end{cases}.$$

Після вирішення цієї системи одержуємо інтерполяційний багаточлен виду $P_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \cdot y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \cdot y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \cdot y_2$.

З геометричної точки зору, формули квадратичної інтерполяції заміщають дугу кривої $y=f(x)$ на інтервалі $[x_0; x_1; x_2]$ параболічною кривою $y=P_2(x)$, яка проходить через точки $(x_0;y_0)$, $(x_1;y_1)$ і $(x_2;y_2)$.

Інтерполяційна формула Лагранжа

Вихідні дані:

- значення невідомої функції $f(x)$ в двох і більше точках: $f(x_0)=y_0$; $f(x_1)=y_1$; ...; $f(x_n)=y_n$;
- порядок інтерполюючого багаточлена $(n-1)$.

Суть методу. В якості інтерполюючого багаточлена візьмемо поліном виду:

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n,$$

причому значення $P_n(x)$ у вузлах інтерполяції повинні співпадати із значеннями даної функції $f(x)$, тобто: $P_n(x) = f(x_i) = y_i (i=0, 1, 2, \dots, n)$.

Розглянемо допоміжний багаточлен $F(x)$, який у вузлу інтерполяції x_0 приймає значення $F_0(x_0)=1$, а у всіх інших вузлах $x_i (i=1, 2, \dots, n)$ значення цього полінома рівняється нулю: $F_0(x_1)=F_0(x_2)=\dots=F_0(x_n)=0$.

Такий багаточлен буде мати вигляд:

$$F_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_n)}.$$

Вузли інтерполяції $x_1, x_2, \dots, x_n$ є коренями багаточлена $F_0(x_0)$, а в точці $x=x_0$ чисельник рівняється знаменнику, а значить, $F_0(x_0)=1$.

Аналогічний багаточлен побудуємо і для вузла $x=x_1$, вид якого:

$$F_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)}.$$

Такі ж багаточлени можна побудувати і для всіх інших вузлових точок інтерполяції. В загальному вигляді багаточлени $F_i(x)$, $(i=0,1,2,\dots,n)$ можна записати:

$$F_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}.$$

Тоді шуканий інтерполяційний багаточлен буде мати вигляд:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n F_i(x) y_i = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)} y_i.$$

Добуток $F_i(x)y_i$ $(i=0,1,2,\dots,n)$ рівняється нулю у всіх вузлах інтерполяції, крім вузла x_i , де вони рівняються y_i . Причому, порядок багаточлена $P_n(x)$ рівняється n .

Багаточлен $P_n(x)$ є **інтерполяційним** багаточленом Лагранжа.

Формулу Лагранжа можна надати іншого вигляду:

$$L_n(x) = \prod_{i=0}^n \frac{y_i}{(x - x_i) \prod'_{n+1}(x_i)},$$

де $\prod_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$, $\prod'_{n+1}(x_i)$ - значення похідної від функції $\prod_{n+1}(x)$ у точці $x = x_i$.

Інтерполяційна формула Лагранжа для визначення значень функцій в проміжних точках $x \in]x_0; x_n[$, $x \neq x_i$ ($i = 0, 1, \dots, n$) має вигляд:

$$f_n(x) \approx \sum_{i=0}^n \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)} y_i.$$

В частковому випадку, коли є два вузли інтерполяції, то ця формула представляє формулу лінійної інтерполяції, для трьох вузлів - формулу квадратичної інтерполяції.

Похибка параболічній інтерполяції залежить від: 1) багаточлена; 2) похибок вузлів інтерполяції, а також 3) похибки обчислення.

Сплайн інтерполяція

При інтерполюванні функцій з великою кількістю вузлів інтерполюючий поліном має високу степінь, що спричиняє його коливання між вузлами. Щоб зменшити степінь поліному всі вузли інтерполювання можна розбити на групи і будувати інтерполяційні поліноми з меншою кількістю вузлів. Але в цьому разі на стиках з'являються точки розриву похідних.

Сплайн на проміжку між вузлами інтерполювання є поліном невисокого степеню ($n=2, 3, 4$). Сплайн є неперервним на всьому заданому відрізку $[a, b]$.

Нехай на відрізку $[a; b]$ задано сітку, у вузлах якої відомі значення y_i ($i=1, 2, \dots, n$) функції $f(x)$, визначеної на відрізку $[a; b]$. Будемо шукати функцію $S(x)$, яка задовольняє вимоги:

- на кожному з відрізків $[x_i; x_{i+1}]$, $i=1, 2, \dots, n-1$ функція $S(x)$ є кубічним поліномом:

$$S(x) = S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$$

- функція $S(x)$ неперервна на $[a; b]$ разом із своїми похідними до другого порядку включно, тобто

$$S_i^{(p)}(x_k) = S_{i+1}^{(p)}(x_k), \quad k = 2, 3, \dots, n-1, \quad p = 0, 1, 2$$

- у вузлах x_i виконуються рівності

$$S(x_i) = y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Функцію $S(x)$, яка задовольняє ці умови, називають інтерполяційним **кубічним** сплайном.

Степенем сплайна називається максимальна степінь многочленів, а дефектом сплайна - різниця між степенем сплайна і порядком найвищої безперервної на $[a, b]$ похідної.

Наприклад, безперервна ламана є сплайном ступеня 1 з дефектом 1 (сама функція - неперервна, а перша похідна вже розривна).

Наочний приклад сплайна - це **лекала**.