Тема 11. Апроксимація. Обробка даних в Ехсег

Постановка задачі апроксимації

Недоліком інтерполяції є то, що для багатьох вузлів утворюється багаточлен високого степеню.

Якщо ж вихідні дані були є неточними, то інтерполююча функція хоча точно проходить через вузлові точки, все ж таки є неточною. В таких випадках слід використовувати апроксимацію - визначення функції, яка найближче (найкраще) підходить до вузлових точок.

Апроксимація — знаходження функції заданого виду y=f(x), яка в точках x0, x1, x2, ..., xn приймає значення як можна більш близькі до значень y0, y1, y2, ..., yn.

Крива *f(x)* називається **апроксимуючою кривої** або лінією **регресії** (тренд).

Види апроксимуючих функцій:

- *y*=*ax*+*b*;
- $y=ax^2+bx+c;$
- $y=ax^m$;
- $y=a \ln(x)+b;$
- *y=x/(ax+b)* та інші.

Параболічна апроксимація за методом найменших квадратів

Для функції f(x), яка задано таблично, знайти функцію F(x) наперед визначеного вигляду, наприклад, багаточлен k-степеню $P_k(x)=a_0+a_1x$ +...+ $a_k x^k$ так, щоб сума квадратів відхилень $S=\Sigma(y_i-y(x_i))^2$ від вузлових точок була **найменшою**. Іншими словами, відшукати коефіцієнти цього багаточлену із умови того, що лінія повинна як **найближче** проходити біля вузлів апроксимації.

Лінійна апроксимація

Вихідні дані:

- задані значення функції f(x) в точках: $f(x_0)=y_0$; $f(x_1)=y_1$; $f(x_2)=y_2$; і $f(x_3)=y_3$;
- порядок шуканого апроксимуючого багаточлена *n*=1.
 Суть методу.

Пряма лінія $P_1(x) = a_0 + a_1 x$ повинна найкраще наближатись до всіх цих точок $(x_o; y_o)$, $(x_1; y_1) a_0 (\sum_{i=1}^{N} y_i^0 y_i^2) \dot{a_1} \sum_{i=1}^{N} y_i^0 y_i^2 \sum_{i=1}^{N} x_i^0 y_i$ $a_0 \sum_{i=1}^{N} x_i^1 + a_1 \sum_{i=1}^{N} x_i^2 = \sum_{i=1}^{N} x_i^1 y_i$

Розв'язуючи цю систему отримаємо коефіцієнти a_0 і a_1 прямої $P_1(x) = a_0 + a_1 x$.

Квадратична апроксимація

Вихідні дані:

- задані значення функції f(x) в точках: $f(x_0)=y_0$; $f(x_1)=y_1$; $f(x_2)=y_2$; і $f(x_3)=y_3$;
- порядок шуканого апроксимуючого багаточлена *n*=2.
 Суть методу.

Графік квадратичної функції $P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ повинен найкраще наближатись до всіх цих $\sum_{i=1}^{N} o^0 \Psi o \sum_{i=1}^{N} (x_0 + y_1) = \sum_{i=1}^{N} (x_0 + y_1), (x_2, y_2)$ і (x_3, y_3) .

$$a_{0}\sum_{i=1}^{N} x_{i}^{1} + a_{1}\sum_{i=1}^{N} x_{i}^{2} + a_{2}\sum_{i=1}^{N} x_{i}^{3} = \sum_{i=1}^{N} x_{i}^{1}y_{i}$$
$$a_{0}\sum_{i=1}^{N} x_{i}^{2} + a_{1}\sum_{i=1}^{N} x_{i}^{3} + a_{2}\sum_{i=1}^{N} x_{i}^{4} = \sum_{i=1}^{N} x_{i}^{2}y_{i}$$

Сплайн апроксимація

Сплайн-апроксимація зводиться до побудови сегментів кривих невисоких порядків (як правило 3-го), які апроксимують задані вузли і стикуються між собою по 1-му чи 2-му порядку гладкості.

Криві Без'є

Криві Безьє цілком лежить в опуклій оболонці своїх опорних точок. Криві Безьє дозволяють здійснювати інтуїтивно зрозуміле управління кривої в графічному інтерфейсі через її опорні точки.

Афінне перетворення кривої (перенесення, масштабування) може бути здійснене шляхом трансформацій відповідних опорних точок.

Найбільше практичне значення мають криві Безьє другого та третього степенів (квадратичні і кубічні).

Окремі криві Безьє можуть бути послідовно з'єднані один з одним в сплайн Безьє. Для забезпечення гладкості лінії в місці з'єднання двох кривих, три суміжні опорні точки обох кривих повинні лежати на одній прямій.

Лінійні криві

При *n*=1 крива являє собою відрізок прямої лінії, опорні точки *P0* і *P1* визначають його початок і кінець. Крива задається рівнянням:

$$\mathbf{B}(t) = (1-t)\mathbf{P}_0 + t\mathbf{P}_1 \quad t \in [0,1].$$

Параметр t у функції, яка описує лінійний випадок кривої Безьє, визначає, де саме на відстані від P0 до P1 знаходиться B(t). Наприклад, при t=0.25 значення функції B(t) відповідає чверті відстані між точками P0 і P1. Параметр t змінюється від 0 до 1, а B(t) описує відрізок прямої між точками P0 і P1.

Квадратичні криві

Квадратична крива Безьє (n=2) задається трьома опорними точками: P0, P1 i P2.

$$\mathbf{B}(t) = (1-t)^2 \mathbf{P}_0 + 2t(1-t)\mathbf{P}_1 + t^2 \mathbf{P}_2, \quad t \in [0,1]$$

Квадратичні криві Безьє у складі сплайнів використовують для опису форми символів в шрифтах *TrueType* і в *SWF* файлах.

$$\begin{split} t &= \frac{\mathbf{P}_0 - \mathbf{P}_1 \pm \sqrt{(\mathbf{P}_0 - 2\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2)\mathbf{B} + \mathbf{P}_1^2 - \mathbf{P}_0\mathbf{P}_2}}{\mathbf{P}_0 - 2\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2}, \quad \mathbf{P}_0 - 2\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 \neq 0\\ t &= \frac{\mathbf{B} - \mathbf{P}_0}{2(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0)}, \quad \mathbf{P}_0 - 2\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 = 0, \quad \mathbf{P}_0 \neq \mathbf{P}_1\\ t &= \sqrt{\frac{\mathbf{B} - \mathbf{P}_0}{\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1}}, \quad \mathbf{P}_0 = \mathbf{P}_1 \neq \mathbf{P}_2 \end{split}$$

Для побудови квадратичних кривих Безьє потрібно виділити дві проміжні точки Q_0 і Q_1 з умови, щоб параметр *t* змінювався від 0 до 1:

- точка Q_0 змінюється від P_0 до P_1 і описує лінійну криву Безьє.
- точка Q_1 змінюється від P_1 до P_2 і також описує лінійну криву Безьє.
- точка B змінюється від Q_0 до Q_1 і описує квадратичную криву Безьє.

Кубічні криві

У параметричній формі кубічна крива Безьє (n=3) описується: $\mathbf{B}(t) = (1-t)^3 \mathbf{P}_0 + 3t(1-t)^2 \mathbf{P}_1 + 3t^2(1-t)\mathbf{P}_2 + t^3 \mathbf{P}_3, t \in [0,1]$ Чотири опорні точки *P0*, *P1*, *P2* і *P3*, задані в 2- або 3-вимірному просторі визначають форму кривої.

Лінія бере початок з точки *P0* прямуючи до *P1* і закінчується в точці *P3* підходячи до неї з боку *P2*. Тобто крива не проходить через точки *P1* і *P2*, вони використовуються для вказівки її напрямки. Довжина відрізка між *P0* і *P1* визначає, як скоро крива поверне до *P3*.

У матричної формі кубічна крива Безьє записується таким чином:

$$\mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \mathbf{M}_B \begin{bmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{P}_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

де М називається базисною матрицею Безьє.

Для побудови кривих вищих порядків відповідно потрібно і більше проміжних точок. Для кубічної кривої це проміжні точки Q0, Q1 і Q2, що описують лінійні криві, а також точки R0 і R1, які описують квадратичні криві.



Властивості кривої Безьє

- безперервність заповнення сегмента між початковою і кінцевою точками;
- крива завжди розташовується всередині фігури, утвореної лініями, що з'єднують контрольні точки;
- при наявності тільки двох контрольних точок сегмент являє собою пряму лінію;
- крива Безьє симетрична, обмін місцями між початковою і кінцевою точками (зміна напрямку траєкторії) не впливає на форму кривої;
- масштабування і зміна пропорцій кривої Безьє не порушує її, оскільки вона з математичної т.з. є «афінно інваріантна»;

- зміна координат хоча б однієї з точок веде до зміни форми всієї кривої Безьє;
- коло не може бути описана параметричним рівнянням кривої Безьє;
- неможливо створити паралельні криві Безьє, за винятком тривіальних випадків.

Інтерполяція та апроксимація в середовищі Maple

Марle має вбудовані функції для підбору інтерполяційних поліномів і натуральних сплайнів. Функція *interp(x, y, v)* повертає інтерполяційний поліном ступеня, меншою або рівною *n*. Функція *spline(x, y, v, n)* повертає натуральний сплайн заданого ступеня n. Аргументи цих функцій:

- x список (вектор) незалежних величин x [1], ..., x [n + 1];
- *у* список (вектор) у залежних величин [1], .., *у* [*n* + 1];
- *v* змінна, яка використовується в поліномі (сплайні);
- *n* ціле число (степінь) або рядок (*linear, quadric, cubic, quartic*).

Приклад.

Підберемо поліном інтерполяції точок (0,0), (1,3), (2,1), (3,3). Для цього введемо команду:

```
with(spline):
spline([0,1,2,3],[0,1,4,3],x,linear);
                                    \{x \ x < 1,
                                 \{-2 + 3 xx < 2
                                 {6 – xotherwise
spline([0,1,2,3],[0,1,4,3],x,cubic);
   Приклад лінійної регресії.
X:=[1,2,3,4,5,6,7]; Y:=[1,4,5,5,4,5,2,8,3,6,5];
regr:=fit[leastsquare[[x,y]]]([X,Y]);
                    regr := y = 2.214285714 + .4214285714 x
```

Обробка даних в Excel

Excel - табличний процесор для створення електронних таблиць і обробки табличних даних.

Електронна таблиця – матриця, розділена на рядки і стовпці, на перетині яких утворюються комірки з унікальними іменами.

Комірки є основним елементом таблиці, в які можуть вводитися дані і на які можна посилатися по іменах комірок.

До даних відносяться: числа, дати, час доби, текст або символьні дані і формули.

До обробки даних відноситься:

- проведення обчислень за допомогою формул і функцій;
- побудова діаграм;
- обробка даних в списках (Сортування, Автофільтр, Розширений фільтр, Форма, Підсумки, Зведена таблиця);

- рішення задач оптимізації (Підбір параметра, Пошук рішення, Сценарії "що - якщо і інші завдання);
- статистична обробка даних, аналіз і прогнозування (інструменти аналізу з надбудови "Пакет аналізу").

Excel є не тільки засобом автоматизації розрахунків, але і засобом моделювання різних ситуацій.

Створення нової робочої книги

При запуску *Excel* відкривається вікно застосування, в якому відображається нова робоча книга, – Книга 1.

Вікно має п'ять основних областей:

- рядок меню;
- панелі інструментів;
- рядок стану;
- рядок введення;



• область вікна робочої книги.

Основна обробка даних здійснюється за допомогою команд з рядка меню. Панелі інструментів Стандартна і Форматування є вбудованими панелями *Excel*, які розташовуються під рядком меню і містять певні набори піктограм (кнопок). Основна частина піктограм призначена для виконання найбільш часто використовуваних команд з меню.

Рядок формул використовується для введення і редагування значень або формул в комірках або діаграмах. Поле імені – це вікно зліва від рядка формул, в якому виводиться ім'я активного комірки. Піктограми: *X*, *V*, *fx*, розташовані зліва від рядка формул, - це кнопки відміни, введення і вставка функції відповідно.

Рядок стану розташований в нижній частині екрану. Ліва частина рядка стану указує зведення про стан робочої області електронної таблиці (Готово, Введення, Правка, Вкажіть). Крім того, в лівій частині рядка стану стисло описуються результати виконаної команди. У правій частині рядка стану виводяться результати обчислень (при виконанні автоматичних обчислень за допомогою контекстного меню рядка стану) і відображаються натиснуті клавіш Ins, Caps Lock, Num Lock, Scroll Lock.

Робоча книга (документ Excel) складається з робочих листів, кожний з яких є електронною таблицею. При необхідності в книгу можна додати робочі листи або видалити їх з книги. Кнопки прокрутки ярличків здійснюють прокрутку ярличків робочої книги. Крайні кнопки здійснюють прокрутку до першого і останнього ярличка робочої книги. Внутрішні кнопки здійснюють прокрутку до попереднього і наступного ярличка робочої книги.

Основні поняття електронної таблиці: заголовок стовпця, заголовок рядка, комірка, ім'я комірки, маркер виділення, маркер заповнення, активний комірка, рядок формул, поле імені, активна область листа.

Робоча область електронної таблиці складається з рядків і стовпців, що мають свої імена. Імена рядків — це їх номери. Нумерація рядків починається з 1 і закінчується максимальним числом, встановленим для даної програми. Імена стовпців — це букви латинського алфавіту спочатку від A до Z, потім від AA до AZ, BA до BZ тощо. Максимальна кількість рядків і стовпців визначається особливостями використовуваної програми і об'ємом пам'яті комп'ютера, наприклад, в табличному процесорі Excel 256 стовпців і більше 16 тисяч рядків.

Перетин рядка і стовпця утворює елемент таблиці, що має свою унікальну адресу. Для вказівки адрес комірок у формулах використовуються посилання (наприклад, *A6* або *D8*).

Комірка – область, що визначувана перетином стовпця і рядка електронної таблиці, має свою унікальну адресу. Адреса комірки визначається ім'ям (номером) стовпця і ім'ям (номером) рядка, на перетині яких знаходиться комірка, наприклад *А10*. Посилання – вказівка адреси комірки. Активна комірка - це виділена комірка, ім'я якої відображається в полі імені.

Активна область листа - область, яка містить введені дані. У електронних таблицях можна працювати як з окремими комірками, так і з групами комірок, які утворюють блок. Блок комірок – група суміжних комірок.

Редагування і форматування робочих листів Microsoft Excel

Будь-яка обробка інформації починається з її введення в комп'ютер. У електронні таблиці MS Excel можна вводити текст, числа, дати, час, послідовні ряди даних і формули.

Введення даних здійснюється в три етапи:

- виділення комірки;
- введення даних;
- підтвердження введення (натиснути клавішу Enter).

Після того, як дані введені, їх потрібно представити на екрані в певному форматі. Для подання даних в MS Excel існують різні категорії кодів форматів.

Для редагування даних в комірці необхідно двічі клацнути на комірці і провести редагування або виправлення даних.

До операцій редагування відносяться:

• видалення і вставка рядків, стовпців, осередків і листів;

- копіювання і переміщення осередків і блоків осередків;
- редагування тексту і чисел в осередках
 До операцій форматування відносяться:
- зміна числових форматів або форми подання чисел;
- зміна ширини стовпців;
- вирівнювання тексту і чисел в осередках;
- зміна шрифту і кольору;
 Вибір типу і кольору межі
 Заливка осередків
 Введення чисел і тексту

Будь-яку інформацію, яка обробляється на комп'ютері, можна представити у вигляді чисел або тексту. Числа і текст за умовчанням Excel вводить у форматі Загальний.

Введення тексту

Текст - це будь-яка послідовність введених в комірку символів, яка не може бути інтерпретована Excel як число, формула, дата, час доби. Введений текст вирівнюється в комірці по лівому краю.

Щоб ввести текст, виділіть комірку і наберіть текст з клавіатури. Комірку може вміщати до 255 символів. Якщо потрібно ввести деякі числа як текст, то для цього виділите комірки, а потім виберіть команду Формат / Комірки. Далі виберіть вкладку "Число" і в списку форматів, що з'явився, виберіть Текстовий. Ще один спосіб введення числа як тексту – це ввести перед числом символу апострофа. Якщо текст не поміщається в комірку, то необхідно збільшити ширину стовпця або вирішити перенесення по словах (Формат / Комірки, вкладка Вирівнювання).

Введення чисел

Числові дані – це числові константи: 0 - 9 +, -, /,*, Е %, крапка і кома. При роботі з числами необхідно уміти змінювати вид чисел, що

вводяться: число знаків після коми, вид цілої частини, порядок і знак числа.

Excel самостійно визначає чи відноситься введена інформація до числа. Числа в Excel відображаються в категоріях Числовий, Експоненціальний, Фінансовий, Грошовий, Процентний, Дріб.

Форматування даних

Дані в MS Excel виводяться на екран в певному форматі. За умовчанням інформація виводиться у форматі Загальний. Можна змінити формат поданняінформації у виділених осередках. Для цього виконаєте команду Формат / Комірки.

З'явиться вікно діалогу "Формат осередків", в якому потрібно вибрати вкладку "Число". У лівій частині вікна діалогу "Формат осередків" в списку "Числові формати" приведені назви всіх використовуваних в Ехсеl форматів.



Для формату кожної категорії приводиться список його кодів. У правому вікні "Тип" ви можете проглянути всі коди форматів, які використовуються для уявлення на екрані інформації. Для поданняданих ви можете використовувати вбудовані коди форматів MS Excel або ввести свій (призначений для користувача) код формату. Для введення коду формату виберіть рядок (всі формати) і введіть символи коду формату в поле введення "Тип".

Навчання роботі з формулами, функціями і діаграмами в Excel

Формули – це вираз, що починається із знаку рівності і складається з числових величин, адрес осередків, функцій, імен, які сполучені знаками арифметичних операцій. До знаків арифметичних операцій, які використовуються в Ехсеl відносяться: складання; віднімання; множення; ділення; піднесення до ступеня.

Деякі операції у формулі мають вищий пріоритет і виконуються в такій послідовності:

• піднесення до степеня і вирази в дужках;

- множення і ділення;
- складання і віднімання.

Результатом виконання формули є значення, яке виводиться в осередку, а сама формула відображається в рядку формул. Якщо значення в осередках, на які є посилання у формулах, змінюються, то результат зміниться автоматично.

Внесення змін до формули

Для внесення змін до формули клацніть мишею на рядку формул або клавішу F2. Потім внесіть зміни і натисніть кнопку Введення в рядку формул або клавішу Enter. Якщо ви хочете внести зміни до формули безпосередньо в осередку, де вона записана, то двічі клацніть мишею на осередку з цією формулою. Для відміни змін натисніть кнопку Відміна в рядку формул або клавішу Esc.

Використання посилань

Посилання однозначно визначає комірку або групу осередків робочого листа. За допомогою посилань можна використовувати у формулі дані, що знаходяться в різних місцях робочого листа, а також значення одного і того ж осередку в декількох формулах. Можна також посилатися на комірки, що знаходяться на інших листах робочої книги, в іншій робочій книзі, або навіть на дані іншого застосування. Посилання на комірки інших робочих книг називаються зовнішніми. Посилання на дані в інших застосуваннях називаються видаленими.

Переміщення і копіювання формул

Після того, як формула введена в комірку, ви можете її перенести, скопіювати або розповсюдити на блок осередків. При переміщенні формули в нове місце таблиці посилання у формулі не змінюються, а комірку, де раніше була формула, стає вільним. При копіюванні формула переміщається в інше місце таблиці, при цьому абсолютні посилання не змінюються, а відносні посилання змінюються. При копіюванні формул можна управляти зміною адрес осередків або посилань. Якщо перед всіма атрибутами адреси осередку поставити символ "\$" (наприклад \$A\$1), то це буде абсолютне посилання, яке при копіюванні формули не зміниться. Зміняться тільки ті атрибути адреси комірки, перед якими не коштує символ "\$", тобто відносні посилання. Для швидкої установки символів "\$" в посиланні її необхідно виділити у формулі і натиснути клавішу F4.

Функції Ехсеl

Функції Excel - це спеціальні, наперед створені формули для обчислень, в які користувач повинен ввести тільки аргументи.

Функції складаються з двох частин: імені функції і одного або декількох аргументів. Ім'я функції описує операцію, яку ця функція виконує, наприклад, СУМ.

Аргументи функції Excel - задають значення або комірки, використовувані функцією, вони завжди поміщені в круглі дужки. Відкриваюча дужка ставиться без пропуску відразу після імені функції. Наприклад, у формулі «=СУММ(А2;А9)», СУМ — це ім'я функції, а А2 і А9 її аргументи.

Введення функцій в робочому листі

Ви можете вводити функції в робочому листі прямо з клавіатури або за допомогою команди Функція меню Вставка. Якщо ви виділите комірку і виберете команду Вставка/Функція, Ехсеl виведе вікно діалогу Майстер функцій – крок 1 з 2. Відкрити це вікно можна також за допомогою кнопки Вставка функції на рядку введення формул.

Мастер функций - шаг 1 из 2 🛛 🔹 💽
оиск функции:
Введите краткое описание действия, которое нужно <u>Н</u> айти выполнить, и нажмите кнопку "Найти"
Категория: 10 недавно использовавшихся 💙
Выберите функцию:
MAKC (P3HAVA
СРЭНАЧ
СУММ(число1;число2;) Суммирует аргументы.
Справка по этой функции ОК Отмена

У цьому вікні спочатку виберіть категорію в списку Категорія і потім в алфавітному списку Функція вкажіть потрібну функцію.

Excel введе знак рівності (якщо ви вставляєте функцію на початку формули), ім'я функції і круглі дужки. Потім Excel відкриє друге вікно

діалогу майстра функцій, в якому необхідно встановити аргументи функції (у нашому випадку посилання на A2 і A9).

Діаграми в Excel

За допомогою Microsoft 2003 можна створювати складні діаграми даних робочого листа. Діаграма – графічне зображення залежності між величинами. Діаграми є наочним засобом подання даних робочого листа. Діаграму можна створити на окремому листі або помістити як упроваджений об'єкт на лист з даними.

Подання даних на діаграмі

Діаграма пов'язана з даними, на основі яких вона створена, і оновлюється автоматично при зміні даних.

Значення осі. Ехсеl створює значення осі на основі вказаних даних. В даному випадку значення осі змінюються від 0 до 70, що відповідає значенням осередків діапазону на листі.

Імена категорій. Як імена осі категорій Excel використовує заголовки стовпців або рядків даних. У приведеному прикладі як імена осі категорій відображаються заголовки рядків, відповідні першому кварталу, другому кварталу тощо.

Імена рядів даних діаграми. Excel також використовує заголовки стовпців або рядків даних як імена рядів даних. Імена рядів відображаються в легенді діаграми. У приведеному прикладі як імена рядів виступають заголовки стовпців планованих і фактичних значень.

Маркери даних. Маркери даних одного кольору представляють один ряд даних. Кожен маркер відповідає одному значенню даних листа. У приведеному прикладі найправіший маркер даних відповідає фактичному значенню за четвертий квартал, рівному 60.

Створення діаграми

Щоб створити діаграму, необхідно, перш за все, ввести дані для діаграми на лист. Потім виділите будь-які комірки, які містять початкові дані діаграми. Далі в меню Вставка виберіть команду Діаграма або натисніть кнопку Майстер діаграм на стандартній панелі інструментів. У будь-якому випадку Ехсеl виведе на екран перше вікно майстра діаграм.

Створення діаграми за один крок. Найшвидший спосіб для створення листа діаграми, що використовує стандартний тип діаграми, виділіть необхідні дані і натисніть клавішу F11. В цьому випадку лист діаграми – це лист книги, що містить тільки діаграму.

- Крок 1. Вибір типу діаграми.
- Крок 2. Завдання початкових даних діаграми.
- Крок 3. Завдання параметрів діаграми.
- Крок 4. Розміщення діаграми.

