

Тема 13. МЕТОДИ ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ТА ІНТЕГРУВАННЯ

Чисельне диференціювання

У ряді задач необхідно знайти похідні від функції $y(x)$, заданої таблично. Або ж функція має складний аналітичний вираз і диференціювання є складним. У таких випадках вдаються до наближеного диференціювання за допомогою чисельних методів.

Основні методи наближеного диференціювання:

- використання кінцевих різниць;
- диференціювання на основі інтерполяційних формул.

Метод кінцевих різниць.

Наприклад, для функції $y = ax^2 + bx + c$ перша кінцева різниця $\Delta y = 2ahx + ah^2 + h$. Її відношення до кроку $h \in \Delta y/h = 2ax + ah + b$.

Точне значення похідної знаходиться за формулою $dy/dx = 2ax + b$.

Ці формули відрізняються лише доданком ah , яке можна зробити досить малим, вибираючи малий крок h .

Сутність другого методу полягає в заміні $y(x)$ на відрізку $[a, b]$ функцією (поліномом) $P_n(x)$ і допущенні, що $y'(x) = P'(x)$.

Наближені методи інтегрування

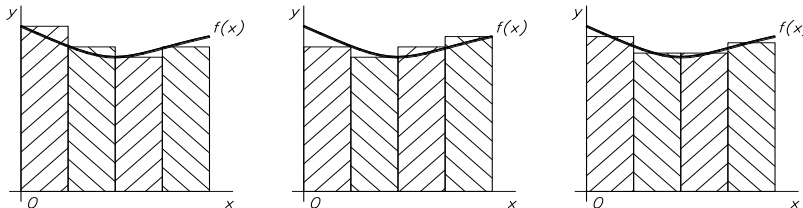
Визначений інтеграл є площа підінтегральної функції.

Визначення інтеграла можна звести до знаходження суми безкінечно великого числа нескінченно малих площадок.

Підінтегральна сума залежить від двох складових: 1) вибору величини h і 2) вибору x на цьому проміжку по формулі.

Формула прямокутників

Вихідні дані: 1) підінтегральна функція $f(x)$; 2) інтервал інтегрування; 3) наперед задана кількість проміжків інтегрування.



Суть методу. Для наближеного визначення інтегралу $\int_a^b f(x)dx$ відрізок $[a;b]$ ділять на n рівних частин точками $a=x_0 < x_1 < \dots < x_n=b$ так, що $h=x_{i+1}-x_i=(b-a)/n (i=0,1,\dots,n-1)$. Тоді точки $x_0=a$, $x_1=a+h$, $x_n=a+nh=b$ утворюють арифметичну прогресію з різницею h і називаються вузлами інтегрування з кроком інтегрування h . В цих вузлах визначають ординати $y_0, y_1, \dots, y_n$. На елементарних відрізках $[x_i; x_{i+1}]$ знаходять площу прямокутника як добуток $f(x_i) \cdot h$. Сума таких прямокутників є наближеним значенням інтеграла.

Якщо $f(x_i)$ визначають в лівих кінцях відрізків $[x_i; x_{i+1}]$, тоді одержують формулу лівих прямокутників виду:

$$\int_a^b f(x)dx \approx I_l = \frac{b-a}{n} (y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i).$$

Якщо ж $f(x_i)$ визначають в правих кінцях відрізків $[x_i; x_{i+1}]$, тоді одержують формулу правих прямокутників виду:

$$\int_a^b f(x)dx \approx I_r = \frac{b-a}{n} (y_1 + y_2 + \dots + y_n) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i).$$

Якщо ж $f(x_i)$ визначають в середині відрізків $[x_i; x_{i+1}]$, тоді одержують формулу середніх прямокутників виду:

$$\int_a^b f(x)dx \approx I_l = \frac{b-a}{n} (y_{1/2} + y_{3/2} + \dots + y_{n-1/2}) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i + \frac{h}{2}\right).$$

Формула трапецій

Вихідні дані:

- підінтегральна функція $f(x)$;
- інтервал інтегрування;
- наперед задана кількість проміжків інтегрування.

Суть методу. Відмінність між методом прямокутників в тому, що на кожному елементарному відрізку $[x_i; x_{i+1}]$ будується трапеція. Тоді формула площ трапецій буде мати вид:

$$\int_a^b f(x)dx \approx I_l = \frac{b-a}{2n} (y_0 + 2y_1 + \dots + 2y_{n-1} + y_n).$$

Формула Сімпсона

Формулу Сімпсона одержують також, як і формулу прямокутників, яка буде мати вид:

$$\int_a^b f(x)dx \approx I_l = \frac{b-a}{6n} ((y_0 + y_{2n}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + 2y_{2n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1}))$$

Цю формулу можна переписати:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx \approx I_l &= \frac{b-a}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}) = \\ &= \frac{b-a}{3} (y_0 + y_{2n} + \sum_{i=1}^{2n-1} (3 + C_i)y_i), \text{ де } C_i = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i \text{ не парне} \\ -1, & \text{якщо } i \text{ парне} \end{cases} \end{aligned}$$

яка називається узагальнююча формула Сімпсона.

13.1. Інтегрування в середовищі Maple

В системі *Maple* є досить потужні засоби чисельного інтегрування.

Основна є функція *int* має наступний синтаксис: *int*(*p*(*x*), *x*=*a*..*b*), де *p*(*x*) - підінтегральна функція змінної *x*; *a*, *b* - межі інтегрування.

Ця функція нерідко видає точне значення інтеграла. При цьому для визначення первісної може використовуватися великий набір спеціальних функцій, які «знає» Maple.

Підінтегральна функція:

$$f(x) := \exp(x^2);$$

Необхідно обчислити визначений інтеграл в межах від 1 до 2

$$\text{Int}(f(x), x=1..2);$$

Первісна виражається через функцію

$$B := \text{int}(f(x), x);$$

Функції найпростіших квадратур вбудовані в пакет *student*.

with(student):

Для метода прямокутників відповідно лівих, правих і середніх:

leftsum(f(x), x=a..b, n);

$$\frac{(b-a) \left(\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + \frac{i(b-a)}{n}\right) \right)}{n}$$

rightsum(*f*(*x*),*x*=*a*..*b*,*n*);

$$\frac{(b-a) \left(\sum_{i=1}^n f\left(a + \frac{i(b-a)}{n}\right) \right)}{n}$$

middlesum(*f*(*x*),*x*=*a*..*b*,*n*);

$$\frac{(b-a) \left(\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + \frac{\left(i + \frac{1}{2}\right)(b-a)}{n}\right) \right)}{n}$$

Для метода трапецій:

trapezoid(*f*(*x*),*x*=*a*..*b*,*n*);

$$\frac{1}{2} \frac{(b-a) \left(f(a) + 2 \left(\sum_{i=1}^{n-1} f\left(a + \frac{i(b-a)}{n}\right) \right) + f(b) \right)}{n}$$

Формула Сімпсона:

simpson(*f*(*x*),*x*=*a*..*b*,*n*);

$$\frac{1}{3} \frac{(b-a) \left(f(a) + f(b) + 4 \left(\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} f\left(a + \frac{(2i-1)(b-a)}{n}\right) \right) + 2 \left(\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} f\left(a + \frac{2i(b-a)}{n}\right) \right) \right)}{n}$$

Адаптивні методи використовують змінний крок розбиття інтервалу інтегрування, застосовуючи меншу довжину кроку для ділянок, де появляють сильні коливання функції.