Тема: ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОХИБОК

Мета: вивчити методику визначення похибки, оцінювати ймовірну похибку та навчитись розв’язувати обернену теорію похибок

Порядок виконання роботи

1. На підставі виданого завдання вивчити методи визначення похибок.
2. Розв’язати задані приклади.
3. Скласти звіт по лабораторній роботі.

Теоретичні відомості

1. Розв'язування задачі. Джерела і класифікація похибок

Процес розв'язування будь-якої реальної фізичної задачі можна розбити на такі етапи:

1. Побудова математичної моделі (математичне формулювання задачі), що охоплює найважливіші для даної задачі сторони явища.
2. Вибір методу розв'язування. Для деяких найпростіших моделей вдається дістати аналітичні розв'язки задачі, а для складніших здебільшого не вдається. У цих випадках використовують наближені методи, зокрема чисельні.
3. Алгоритмізація процесу. При застосуванні чисельних методів потрібно записати алгоритм розв'язування задачі. Якщо задача розв'язуватиметься на ЕОМ, то треба також скласти програму.
4. Виконання обчислень (на ЕОМ чи вручну).
5. Аналіз результатів (осмислення математичного розв'язку і зіставлення його з експериментальними даними).

Важливо вміти оцінити точність розв'язку задачі, який здебільшого ми дістаємо з похибками. Похибки результатів зумовлюються такими причинами:

1. Математична модель лише наближено відображає реальні явища;
2. Вхідні дані, як правило, — це числа неточні (дані для обчислень часто дістають з експерименту, а кожний експеримент може дати результат лише з обмеженою точністю);

3. Метод розв'язування задачі часто є наближеним. У багатьох задачах точний результат можна дістати лише після нескінченної або досить великої кількості арифметичних операцій, які практично здійснити неможливо. Тому замість точного розв'язку здебільшого доводиться відшукувати на- ближений (наприклад, замість суми ряду беруть суму скінченої кількості його членів, нескінченний ітераційний процес обривають після скінченого числа ітерацій, інтеграл замінюють скінченою сумою і т. п.);

4. Округлення при обчисленнях. Усі обчислення (вручну і на ЕОМ) можна виконувати лише з обмеженою кількістю значущих цифр. Тому при виконанні арифметичних дій потрібно вдаватися до округлень, які зумовлюють похибки, що нагромаджуються в процесі обчислень.

Похибки, що породжуються вищезгаданими причинами, відповідно називаються:

1) похибка математичної моделі;
2) неусувна похибка (вона не залежить від обчислювача);
3) похибка методу;
4) похибка округлень.

Повна похибка результату дорівнює сумі всіх перерахованих похибок.

Зауважимо, що похибок, пов'язаних з особливостями будови математичної моделі, не розглядатимемо. Похибки методів досліджуватимемо в кожному окремому випадку.

При виконанні обчислень потрібно дотримуватися такого правила: у проміжних результатах похибка округлення має бути значно меншою від інших похибок. При обчисленнях вручну це правило забезпечується збереженням запасних цифр. На сучасних ЕОМ числа записуються також з достатньою кількістю значущих цифр, тому похибкою окремого округлення здебільшого можна нехтувати на противагу похибці методу і неусувній похибці. У процесі виконання великої кількості операцій похибка округлень збільшується. До значного нагромадження таких похибок може призвести віднімання близьких за величиною чисел, знаходження коренів многочленів високих степенів тощо.

2. **Похибки наближених чисел**

Часто на практиці з тих чи інших причин доводиться замість точного числа $a^{\sim}$ брати його наближене значення a. При цьому виникає похибка:

$$\Delta a = a^{\sim} - a.$$

Абсолютною похибкою Δ наближеного числа a називають величину

$$\Delta = a^{\sim} - a.$$

Граничною абсолютною похибкою вважають будь-яке число Δ_a , що задовольняє умову:

$$\Delta \le \Delta_a.$$

Це означає, що $\Delta_a \le a^{\sim} - a \le \Delta_a$.

Надалі ці нерівності скорочено записуватимемо так:

$$a^{\sim} = a \pm \Delta_a .$$

Зауважимо, що найчастіше точне значення $a^{\sim}$ буває невідомим, а тому невідома й похибка Δ наближеного числа a. Наприклад, неможливо точно визначити числа $\pi, \sqrt{2}, e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ тощо, однак досить легко обчислити межі, у яких вони знаходяться. Можна знайти наближені значення їх та граничні абсолютні похибки. Зрозуміло, що чим менша гранична абсолютна похибка, тим точніше число a наближує число $a^{\sim}$. Та гранична абсолютна похибка не завжди достатньо характеризує точність обчислень (чи вимірювань). Так, при вимірюванні величини, значення якої дорівнює $5 \cdot 10^7$, граничну абсолютну похибку 0,01 можна вважати досить малою, однак при вимірюванні величини, значення якої дорівнює $5 \cdot 10^{-5}$, похибка 0,01 завелика. Тому часто використовують відносну похибку наближеного числа a, яка означується рівністю:

$$\delta = \frac{\Delta}{|a|} \, (a \ne 0).$$

Очевидно, похибку δ, як і саме число a, не завжди можна визначити. Тому на практиці здебільшого використовують граничну відносну похибку δ_a, що визначається умовою:

$$\delta \le \delta_a . \qquad \Delta = a \cdot \delta \le a \cdot \delta_a = \Delta_a .$$

Якщо $a \ne 0$, то вважатимемо, що для Δ_a і δ_a справджуються співвідношення

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|}, \;\; \Delta_a = |a|\delta_a .$$

Запишемо додатне число a у вигляді скінченного десяткового дробу:

$$a = \alpha_1 10^m + \alpha_2 10^{m-1} + \cdots + \alpha_n 10^{m-n+1} .$$

Або

$$a = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{m+1}, \alpha_{m+2} \cdots \alpha_n$$

(де всі коефіцієнти $\alpha_i > 0$; a > 0 і менші за число 10).

K-та цифра наближеного числа *a* називається правильною, якщо абсолютна похибка Δ цього числа не перевищує половини одиниці *k*-го розряду, тобто коли

$$\Delta = \left|\tilde{a} - a\right| \le \frac{1}{2}10^{m-k+1}.$$

В іншому випадку цифру *k*-го розряду називають сумнівною.

Зауважимо, що інколи цифру *k*-го розряду називають правильною, якщо абсолютна похибка числа не перевищує одиниці цього розряду. Цифру за останнім означенням називають правильною у широкому розумінні, а за першим – у вузькому. Надалі ми вживатимемо поняття правильних цифр в розумінні першого означення.

Значущими цифрами наближеного числа *a* називатимемо всі його правильні цифри, починаючи з першої зліва, що не дорівнює нулю (її десятковий розряд позначується *m*), до першої сумнівної цифри включно. Усі інші цифри називатимемо незначущими.

Записуючи остаточні результати наближених обчислень, незначущі цифри числа відкидатимемо. При цьому кожне число записуватимемо як добуток деякого степеня числа 10 на число, всі цифри якого значущі. Якщо з наближеними числами виконуватимуться обчислення, то в них, крім значущих, треба зберігати ще одну або дві сумнівні цифри.

На практиці при виконанні обчислень часто виникає потреба округляти числа.

Якщо округляється наближене чи точне число *a* до *n* значущих цифр, то за правилом доповнення число *a* замінюють числом a_1 з *n* значущими цифрами так, щоб похибка округлення не перевищувала половини одиниці роз- ряду, що зберігається, тобто, щоб справджувалась умова:

$$\left|a_1 - a\right| \le \frac{1}{2}10^{m-n+1}.$$

Отже, якщо при округленні числа *a* до *n* значущих цифр відкидається менше ніж – $\frac{1}{2}10^{m-n+1}$, то в числі a_1 зберігаються без зміни всі перші *n* цифр числа *a*. А коли відкидається не менше як – $\frac{1}{2}10^{m-n+1}$, то в числі a_1 остання цифра береться на одиницю більшою, ніж у числі *a*.

Зауважимо, що внаслідок округлення наближеного числа *a* до *n* значущих цифр похибка округлення Δ_0 може досягти величини $0{,}5\cdot 10^{m-n+1}$. Якщо врахувати ще й похибку Δ_a числа *a*, то *n*-а цифра округленого числа може вже бути неправильною. Та коли похибка Δ_a досить мала порівняно з максимально можливим значенням похибки округлення Δ_0 (наприклад, Δ_a=

$0{,}5 \cdot 10^{m-n}$), то похибкою Δ_a можна знехтувати і n-у цифру числа a після округлення вважати правильною, навіть якщо похибка округлення досягає $0{,}5 \cdot 10^{m-n+1}$.

Отже, щоб знайти результат з точністю до $0{,}5 \cdot 10^{m-n+1}$, треба виконувати обчислення так, щоб дістати результат з точністю принаймні до $0{,}5 \cdot 10^{m-n}$, тобто з $n+1$ правильними цифрами. Тоді після округлення можна буде вважати, що результат має n правильних цифр.

Легко встановити зв'язок відносної похибки наближеного числа a з кількістю правильних значущих цифр. Якщо додатне наближене число a має n правильних значущих цифр, то його відносна похибка δ задовольняє співвідношення:

$$\delta \le \frac{1}{\alpha_1}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1},$$

де α_1 – перша значуща цифра наближеного числа a.

Справді,

$$\Delta \le \frac{1}{2} \cdot 10^{m-n+1},$$

тому

$$\delta = \frac{\Delta}{a} \le \frac{\frac{1}{2} \cdot 10^{m-n+1}}{\alpha_1 10^m + \alpha_2 10^{m-1} + \cdots + \alpha_n 10^{m-n+1} - \frac{1}{2} \cdot 10^{m-n+1}} \le \frac{10^{m-n+1}}{\alpha_1 10^m} = \frac{1}{\alpha_1}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}.$$

Таким чином, за граничну відносну похибку можна взяти

$$\delta_a = \frac{1}{\alpha_1}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}.$$

Якщо число a має більше ніж дві правильні значущі цифри, то на практиці можна користуватись оцінкою

Навпаки, за відносною похибкою δ можна визначити кількість правильних цифр числа a. Для цього знаходимо граничну абсолютну похибку Δ_a із співвідношення (1.2.1), після чого кількість правильних цифр числа a легко встановлюється.

Приклади

1. Якою буде гранична відносна похибка, якщо замість числа $\sqrt{2}$ взяти 1,41?

Маємо: $n = 3$, $\alpha_1 = 1$. Отже $\delta_a = \frac{1}{1}\left(\frac{1}{10}\right)^{3-1} = 0{,}01$.

2. Знайти наближено $\sqrt{50}$ так, щоб відносна похибка не перевищувала 0,001 (або 0,1 %).

Маємо: $\alpha_1 = 7$. Отже, повинно справджуватись співвідношення $\delta_a = \frac{1}{7}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} \le 0{,}001$. Звідки $n-1 \ge 3$ і $n \ge 4$.

Отже, щоб відносна похибка не перевищувала 0,001, $\sqrt{50}$ треба взяти не менше як з чотирма правильними цифрами.

3. Число 7432 має граничну відносну похибку δ_a=0,01 (1%). Скільки в ньому правильних цифр?

Знайдемо граничну абсолютну похибку:

$$\Delta_a = |a|\delta_a = 7432 \cdot 0{,}01 < 0{,}75 \cdot 10^2 .$$

Отже, число 7432 має лише одну правильну цифру (друга цифра сумнівна). Його треба записати так: $0{,}74 \cdot 10^4$, або $74 \cdot 10^2$, або $7{,}4 \cdot 10^3$ і т. д.

1.3 Загальна формула для обчислення похибки

Нехай потрібно обчислити значення функції $\tilde{y} = f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \cdots \tilde{x}_n)$ при заданих значеннях незалежних змінних.

Якщо при цьому замість точних значень $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \cdots \tilde{x}_n$, які нам не відомі, підставляються їх наближені значення $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \cdots \tilde{x}_n$(причому $\tilde{x}_i = x_i + \Delta x_i$, $i = 1.2, \cdots, n$), то при обчисленні значення функції виникає похибка

$$\Delta y = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \cdots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

Припустивши, що функція $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ диференційовна (достатню кількість разів), Δy можна подати у вигляді:

$$\Delta y = \frac{\partial f(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\partial x_2}\Delta x_2 + \cdots + \frac{\partial f(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\partial x_n}\Delta x_n \quad (1.3.1)$$

плюс члени другого і вищих порядків відносно Δx_i.

Якщо похибки Δx_i за абсолютною величиною досить малі, то членами другого і вищих порядків у виразі (1.3.1) можна знехтувати. Тоді для абсолютної похибки наближеного значення матимемо:

$$|\Delta y| \le \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\partial x_i} \right| \cdot \Delta x_i ,$$

де через Δx_i позначені граничні абсолютні похибки аргументів. Таким чином,

$$\Delta y = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\partial x_i} \right| \cdot \Delta x_i .$$

Для граничної відносної похибки δ_y маємо:

$$\delta_y = \frac{\Delta y}{|y|} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \cdot \Delta x_i}{|y|} = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\frac{\partial f}{f x_i}}{f} \right| \Delta x_i ,$$

або

$$\delta_y = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} \ln f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \right| \Delta x_i .$$

З формули (1.3.2) випливає, що ***гранична абсолютна похибка суми наближених чисел $a_1+a_2+\ldots+a_n$... дорівнює сумі їх граничних абсолютних***

При цьому відносна похибка різниці $\delta_a = \dfrac{\Delta_{a_1} + \Delta_{a_2}}{|a|}$ може виявитись досить великою, якщо числа a_1 та a_2 між собою мало відрізняються і їх різниця близька до нуля. У цьому випадку для забезпечення потрібної точності треба мати в зменшуваному і від'ємнику достатню кількість цифр, щоб гранична абсолютна похибка різниці a була меншою від самої різниці. Тому, по можливості, слід уникати віднімання близьких чисел.

Для похибки добутку додатних чисел $a = a_1a_2\ldots\, a_n$ з (1.3.3) маємо:

$$\delta_a = \frac{\Delta_{a_1}}{a_1} + \frac{\Delta_{a_2}}{a_2} + \cdots + \frac{\Delta_{a_n}}{a_n},$$

тобто ***гранична відносна похибка добутку кількох наближених додатних чисел, що відрізняються від нуля, дорівнює сумі граничних відносних похибок цих чисел***.

Легко переконатись, що ***гранична відносна похибка частки дорівнює сумі граничних відносних похибок діленого і дільника***.

Справді, нехай $a = \dfrac{a_1}{a_2}$ ($a_1,a_2 > 0$). Тоді з (1.3.3) маємо:

$$\delta_a = \frac{\Delta_{a_1}}{a_1} + \frac{\Delta_{a_2}}{a_2} = \delta_{a_1} + \delta_{a_2}.$$

Можна переконатися також, що відносна похибка k-то степеня числа a у k раз більша, ніж відносна похибка числа a. Аналогічно, відносна похибка кореня k-го порядку з числа a у k раз менша, ніж відносна похибка числа a.

1.4 Поняття про ймовірну оцінку похибки.

Обчислення без точного врахування похибок

Наближене число a може відхилятися від точного числа $\tilde{a}$ в той чи інший бік на певну величину. Тому наближене число можна розглядати як випадкову величину з математичним сподіванням $M[a] = \tilde{a}$. Сама похибка $\Delta a = \tilde{a} - a$ також є випадковою величиною з математичним сподіванням, що дорівнює нулю, $M[\Delta_a] = 0$.

Розглянемо суму наближених чисел $a=a_1+a_2+\ldots+a_n$. Гранична абсолютна похибка суми $\Delta_a = \Delta_{a_1} + \Delta_{a_2} + \cdots + \Delta_{a_n}$.

Вважатимемо, що випадкові величини $\Delta_{a_1}, \Delta_{a_2}, \cdots, \Delta_{a_n}$ мають один і той самий нормальний розподіл ймовірностей з математичним сподіванням, що дорівнює нулю, і середнім квадратичним відхиленням σ. Тоді, як відомо з курсу теорії ймовірностей, математичне сподівання суми випадкових величин дорівнює сумі їх математичних сподівань, тобто $M[\Delta_a] = 0$. Дисперсія суми незалежних випадкових величин дорівнює сумі дисперсій цих величин, тобто $D[\Delta_a] = D[\Delta_{a_1}] + D[\Delta_{a_2}] + \cdots + D[\Delta_{a_n}] = n\sigma^2$ (нагадаємо, що за означенням середнє квадратичне відхилення $\sigma[X]$ випадкової величини X дорівнює $\sqrt{D[X]}$, де $D[X]$ - дисперсія випадкової величини X, а тому $\sigma[\Delta_a] = \sigma\sqrt{n}$.

Сума незалежних випадкових величин з нормальним розподілом ймовірностей також має нормальний розподіл ймовірностей. Як відомо, випадкова величина з нормальним розподілом ймовірностей з імовірністю 0,997 відхиляється в той чи інший бік від свого математичного сподівання не більш як на три середніх квадратичних відхилення. Отже, якщо практично $|\Delta_{a_i}| < 3\sigma \left(P(|\Delta_{a_i}| < 3\sigma) \approx 0{,}997 \approx 1\right)$, то $|\Delta_{a_i}| < 3\sigma\sqrt{n}$.

Таким чином, абсолютна похибка суми наближених чисел $a = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ пропорційна числу $\sqrt{n}$, а не числу n, як це випливало з формули (1.3.2). Це пояснюється тим, що практично похибки різних чисел можуть частково «гасити» одна одну, в той час як формула (1.3.2) передбачає, так би мовити, крайній випадок.

Аналогічно приходимо до висновку, що й відносна похибка добутку наближених чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ зростає пропорційно числу $\sqrt{n}$, а не числу n.

Точний підрахунок похибок результатів обчислень наближених чисел досить громіздкий. Тому здебільшого на практиці точно не враховують похибок, а користуються правилами підрахунку цифр за В. М. Брадісом:

1. При додаванні і відніманні наближених чисел молодший збережений розряд результату має бути найбільшим серед розрядів, що виражаються останніми значущими цифрами вихідних даних.
2. При множенні і діленні наближених чисел у результаті потрібно зберегти стільки значущих цифр, скільки їх має наближене дане з найменшою кількістю значущих цифр.
3. При піднесенні до квадрата або до куба в результаті треба зберегти стільки значущих цифр, скільки їх має число, яке підносять до степеня.
4. При добуванні кореня в результаті слід брати стільки значущих цифр, скільки їх у підкореневому виразі.
5. При обчисленні проміжних результатів потрібно брати на одну-дві цифри більше, ніж рекомендують попередні правила.
6. Якщо дані можна брати з довільною точністю, то, щоб знайти результат з k правильними цифрами, дані треба брати з такою кількістю цифр, яка забезпечує k + 1 правильну цифру в результаті відповідно до правил 1-4.

7. При обчисленнях одночленних виразів за допомогою логарифмів слід підрахувати кількість значущих цифр у тому наближеному даному, у якому їх найменше, і взяти таблицю логарифмів з кількістю знаків на одиницю більшою. У кінцевому результаті остання цифра відкидається.

Зауважимо, що в основу цих правил покладено принцип академіка О.М. Крилова – основний принцип звичайних обчислень, тобто обчислень без строгого врахування похибок: наближене число слід писати так, щоб у ньому всі цифри, крім останньої, були правильними і лише остання була сумнівною, притому не більш як на одну одиницю.

1.5 Обернена задача теорії похибок

Досить часто доводиться розв'язувати таку задачу: визначити допустимі похибки аргументів $x_1, x_2, \cdots, x_n$ так, щоб гранична абсолютна похибка функції не перевищувала заданої величини Δy.

Користуючись формулою (1.3.2), помічаємо, що ця задача не визначена, оскільки, по-різному вибравши значення Δx_i, можна дістати одне й те саме значення Δy.

Отже, задачу можна розв'язувати кількома способами:

1. Доберемо Δx_i так, щоб в (1.3.2) всі величини $\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|\Delta_{x_i}$ були рівними між собою (принцип рівних впливів).

Тоді, очевидно, $\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|\Delta_{x_i} = \frac{\Delta_y}{n}$ і $\Delta_{x_i} = \dfrac{\Delta_y}{n\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|}$.

2. Поклавши, що всі Δx_i рівні між собою, дістанемо:

$$\Delta_{x_i} = \frac{\Delta_y}{\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|}.$$

3. Вважаючи всі відносні похибки аргументів рівними між собою

$$\frac{\Delta_{x_1}}{|x_1|} = \frac{\Delta_{x_2}}{|x_2|} = \cdots = \frac{\Delta_{x_n}}{|x_n|} = \sigma,$$

та підставляючи в (1.3.2) вирази для Δx_i, дістанемо:

$$\Delta_y = \delta\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \cdot |x_i|.$$

Визначивши δ, для Δx_i матимемо:

$$\Delta_{x_i} = |x_i|\delta = \frac{|x_i|\Delta_y}{\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right||x_i|}.$$

При розв'язуванні задачі можуть бути використані і деякі інші варіанти.
Аналогічно можна розв'язувати і другу обернену задачу теорії похибок, коли потрібно підібрати граничні абсолютні чи відносні похибки аргументів так, щоб відносна похибка функції не перевищувала наперед заданої величини.

Зміст звіту

1. Назва роботи.
2. Мета роботи.
3. Розрахунки значень заданих прикладів.
4. Висновки.
5. Література.

Література

1. Эндрюс Дж., Мак-Лоун Р. Математическое моделирование – М.: Мир, 1979. - 217 с.
2. Вознесенский В.А., Лященко Т.В., Огарков Б.Л. Численные методы решения строительно-технологических задач на ЭВМ. – К.: Вища школа, 1989. - 328 с.
3. Борщ И.М., Вознесенский В.А., Мукин В.З. и др. Процессы и аппара- ты в технологии строительных материалов. – К.: Вища школа, 1981. - 296 с.
4. Подвальный А.М., Проценко А.М. Исследование проницаемости на математических моделях // Защита строительных конструкций зданий от коррозии. – М.: Стройиздат, 1973. – С. 149-156.
5. Вознесенский В.А., Лященко Т.В., Иванов Я.П., Николов И.И. ЭВМ и оптимизация композиционных материалов. – К.: Будівельник, 1989. - 240 с.
6. Моисеев Н.Н., Иванилов Ю.П., Столярова Е.М. Методы оптимизации.
   – М.: Наука, 1978. - 272 с.
7. Самарский А.А. Введение в численные методы. – М.: Наука, 1983. - 272 с.
8. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975.- 266 с.