Самостійна робота №1

Тема: «ГРАФІЧНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДВОВИМІРНИХ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ»

Мета заняття: Ознайомити студентів з алгоритмом графічного методу розв'язування задач лінійного програмування

Приклад: Фірма спеціалізується на виробництві офісних меблів, зокрема вона випускає два види збірних книжкових полиць — А та В. Полиці обох видів виготовляють на верстатах 1 та 2. Тривалість обробки деталей однієї полиці кожної моделі подано в табл. 1.

Таблиця 1

Верстат	Тривалість обробки полиці моделі, хв.		Ресурс робочого часу верстатів, год. на тиждень
	А	В	
1	30	15	40
2	12	26	36

Прибуток фірми від реалізації однієї полиці моделі А дорівнює 50 у. о., а моделі В — 30 у. о. Вивчення ринку збуту показало, що тижневий попит на книжкові полиці моделі А ніколи не перевищує попиту на модель В більш як на 30 одиниць, а продаж полиць моделі В не перевищує 80 одиниць на тиждень.

Необхідно визначити обсяги виробництва книжкових полиць цих двох моделей, що максимізують прибуток фірми. Для цього слід побудувати економіко-математичну модель поставленої задачі та розв'язати її графічно.

Побудова математичної моделі. Змінними в моделі є тижневі обсяги виробництва книжкових полиць моделей А та В. Нехай $x1$ — кількість полиць моделі А, виготовлених фірмою за тиждень, а $x2$ — кількість полиць моделі В. Цільова функція задачі — максимум прибутку фірми від реалізації продукції. Математично вона подається так:

$$Z = 50x_1 + 30x_2 \rightarrow \max .$$

Обмеження задачі враховують тривалість роботи верстатів 1 та 2 для виготовлення продукції та попит на полиці різних моделей.

Обмеження на тривалість роботи верстатів 1 та 2 мають вид:

для верстата 1:

$$30x_1 + 15x_2 \leq 2400 \text{ (хв)};$$

для верстата 2:

$$12x_1 + 26x_2 \leq 2160 \text{ (хв)}.$$

Обмеження на попит записуються так:

$$x1 - x2 \leq 30 \text{ та } x2 \leq 80.$$

Загалом економіко-математичну модель цієї задачі можна записати так:

$$Z = 50x_1 + 30x_2 \to \max .$$

за умов:

$$\begin{cases} 30x_1 + 15x_2 \leq 2400; & (1) \\ 12x_1 + 26x_2 \leq 2160; & (2) \\ x_1 - x_2 \leq 30; & (3) \\ x_2 \leq 80. & (4) \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0; \;\; x_2 \geq 0. \qquad (5)$$

Ця економіко-математична модель є моделлю задачі лінійного програмування, що містить лише дві змінні, і тому може бути розв’язана графічно.

Розв’язання. Перший крок згідно з графічним методом полягає в геометричному зображенні допустимих планів задачі, тобто у визначенні такої області, де водночас виконуються всі обмеження моделі. Замінимо знаки нерівностей на знаки строгих рівностей і побудуємо графіки відповідних прямих (рис. 1). Кожна з побудованих прямих поділяє площину системи координат на дві півплощини. Координати точок однієї з півплощин задовольняють розглядувану нерівність, а іншої — ні. Щоб визначити необхідну півплощину (на рис. 1 її напрям позначено стрілкою), потрібно взяти будь-яку точку і перевірити, чи задовольняють її координати зазначене обмеження. Якщо задовольняють, то півплощина, в якій міститься вибрана точка, є геометричним зображенням нерівності. Інакше таким зображенням є інша півплощина.

Умова невід’ємності змінних $x1 \geq 0$, $x2 \geq 0$ обмежує область допустимих планів задачі першим квадрантом системи координат. Перетин усіх півплощин визначає область допустимих планів задачі — шестикутник *OABCDE*.

Координати будь-якої його точки задовольняють систему обмежень задачі та умову невід’ємності змінних. Тому поставлену задачу буде розв’язано, якщо ми зможемо відшукати таку точку багатокутника *OABCDE*, в якій цільова функція *Z* набирає найбільшого значення.

Для цього побудуємо вектор $N=(c_1; c_2)$, координатами якого є коефіцієнти при змінних у цільовій функції задачі. Вектор N завжди виходить із початку координат і напрямлений до точки з координатами ($x_1 = c_1$; $x_2 = c_2$). У нашій задачі вектор $N=(50; 30)$. Він задає напрям зростання значень цільової функції Z, а вектор, протилежний йому, — напрям їх зменшення. Побудуємо лінію, що відповідає, наприклад, значенню $Z = 0$. Це буде пряма $50x_1 + 30x_2 = 0$, яка перпендикулярна до вектора N і проходить через початок координат. Оскільки в даному прикладі необхідно визначити найбільше значення цільової функції, то пересуватимемо пряму $50x_1 + 30x_2 = 0$ паралельно самій собі згідно з напрямом вектора N доти, доки не визначимо вершину багатокутника, яка відповідає оптимальному плану задачі.

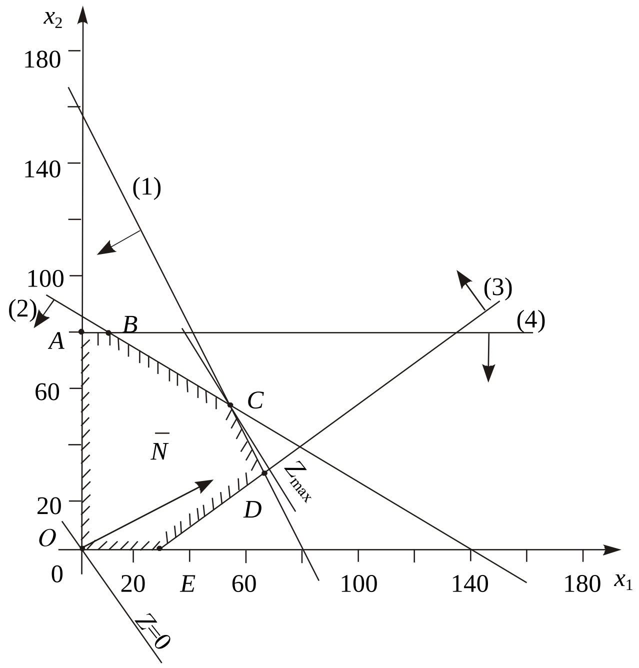

Рис. 1

Із рис. 1 видно, що останньою спільною точкою прямої цільової функції та багатокутника *OABCDE* є точка *C*. Координати цієї точки є оптимальним планом задачі, тобто такими обсягами виробництва книжкових полиць видів А та В, що забезпечують максимум прибутку від їх реалізації за даних умов.

Координати точки *C* є розв'язком системи рівнянь:

$$\begin{cases} 30x_1 + 15x_2 = 2400; \\ 12x_1 + 26x_2 = 2160, \end{cases}$$

звідси маємо: $x_1 = 50$; $x_2 = 60$.

Отже, $X^* = (50; 60)$; $Z_{max} = 50 \cdot 50 + 30 \cdot 60 = 4300$.

Це означає, що коли фірма щотижня виготовлятиме 50 збірних книжкових полиць моделі А та 60 — моделі В, то вона отримає максимальний прибуток — 4300 у. о. Це потребуватиме повного використання тижневих ресурсів робочого часу верстатів 1 та 2.

Завдання для самостійного виконання:

1. Фермер прийняв рішення вирощувати озиму пшеницю і цукрові буряки на площі 20 га, відвівши під цукрові буряки не менше як 5 га. Техніко-економічні показники вирощування цих культур маємо у табл. 2:

ПОКАЗНИКИ ВИРОЩУВАННЯ СІЛЬСЬКОГОСПОДАРСЬКИХ КУЛЬТУР

Показник (із розрахунку на 1 га)	Озима пшени ця	Цукро ві буряки	Наявний ресурс
Затрати праці, людино-днів	5	25	270
Затрати праці механізаторів, людино-днів	2	8	80
Урожайність, тонн	3,5	40	—
Прибуток, тис. грн	0,7	1	—

Визначити оптимальний розподіл площ фермерського господарства, взявши за критерій оптимальності максимізацію прибутку.

2. Для невеликої птахоферми потрібно розрахувати оптимальний кормовий раціон на 1000 курчат, яких вирощують з 4-х до 8-тижневого віку. Нехтуючи тим, що потижневі витрати кормів для курчат залежать від їхнього віку, вважатимемо, що за 4 тижні курча споживає не менше 500 г суміші. Крім цього, кормовий раціон курчат має задовольняти певні вимоги щодо поживності. Сформулюємо ці вимоги у спрощеному вигляді, беручи до уваги лише дві поживні речовини: білок і клітковину, що містяться у кормах двох видів — зерні та соєвих бобах. Вміст поживних речовин у кожному кормі та їх вартість маємо у табл. 2.5.

ПОЖИВНІСТЬ ТА ВАРТІСТЬ КОРМІВ

Корм	Вміст поживних речовин в 1 кг корму, %		Вартість 1 кг корму, у. о.
	білку	клітковин и	
Зерно	10	2	0,40
Соєві боби	50	8	0,90

Готова кормова суміш має містити не менше як 20 % білка і не більш як 5 % клітковини. Визначити масу кожного з двох видів кормів, що утворюють кормову суміш мінімальної вартості, водночас задовольняючи вимоги до загальної маси кормової суміші та її поживності.

3. Кошти можуть бути використані для фінансування двох проектів. Проект А гарантує отримання прибутку 70 коп. на вкладену гривню через рік. Проект Б гарантує отримання прибутку у розмірі 2 грн. на кожну вкладену гривню, але через два роки. При фінансування проекту Б період інвестицій має бути кратним двом рокам.

Як слід розмістити капітал у 100 тис. грн., щоб максимізувати сумарну величину прибутку, який можна отримати через три роки після початку інвестування?

4. Підприємство складає автомашини «Таврія» і «Славута». Для добового випуску у наявності є наступні матеріали: 20 комплектів заготовок металоконструкцій, що необхідні для складання автомашин у кількості 5 і 3 одиниці відповідно; 14 комплектів підшипників (відповідно 1 і 2 одиниці); 9 двигунів з арматурою і електрообладнанням, що необхідні по одному для кожної машини «Таврія»; 10 двигунів з арматурою і електрообладнанням, необхідні по одному для кожної машини «Славута». Вартість «Таврії» 70 тис. грн., а «Славути» – 62 тис. грн. Добовий об’єм випуску «Таврії» не повинен перевищувати добового об’єму випуску «Славути» більш ніж на 6 автомашин.

Сформулювати та розв’язати економіко-математичну модель задачі для знаходження плану складання машин, що дає підприємству максимальний виторг (Умову цілочисловості змінних не враховувати).

5. Підприємство має запаси 4-х видів ресурсів (борошно, жири, цукор, фінанси), з яких може виготовляти 2 види продуктів (хліб, батон). У таблиці 4 задані норми витрат ресурсів на виготовлення одиниці продукції; запаси ресурсів та ціни продуктів.

Ресурси	Витрати ресурсів		Запас
	Хліб	*Батон*	
Борошно	0,6	0,5	**120**
Жири	0,05	0,09	**75**
Цукор	0,2	0,6	**50**
Фінанси	2	2,4	**500**
Ціна	**3,2**	**3,7**	

Визначити оптимальний план виробництва, за яким загальний виторг від реалізації продукції буде максимальним (Умову цілочисловості змінних не враховувати).

6. Для перевезення вантажу використовують машини типів А і Б. Вантажопідйомність машини кожного типу – 3 т. за один рейс машина А витрачає 1,5 кг мастила і 50 л бензину, а машина Б – відповідно 2 кг і 30 л. На базі є 35 кг мастила і 900 л бензину. Витрати на експлуатацію машини А – 8 у.о., а машини Б – 5 у.о. Потрібно перевезти 60 т вантажу. Скільки потрібно використати машин типів А і Б, щоб експлуатаційні витрати були мінімальними? (Умову цілочисловості змінних не враховувати).