Тема: СПОСОБИ ПРЕДСТАВЛЕННЯ ФУНКЦІОНАЛЬНОЇ ЗАЛЕЖНОСТІ МІЖ ДВОМА ЗМІННИМИ І МЕТОДИ ВІДШУКАННЯ АНАЛІТИЧНОГО ВИГЛЯДУ ЕМПІРИЧНОЇ ЗАЛЕЖНОСТІ

Мета: вивчити способи представлення функціональної залежності між двома змінними, вміти визначати вид емпіричної залежності, навчитись користуватись способами визначення коефіцієнтів і постійних емпіричних залежностей.

Порядок виконання роботи

1. На підставі виданого завдання вивчити теоретичні відомості.
2. Розв’язати задані приклади.
3. Скласти звіт по лабораторній роботі.

Теоретичні відомості

Сукупність всіх причин, що обумовлюють хід будь-якого явища, процесу, стану і т.д. називають факторами. Кількість факторів може бути досить великою. Причому у багатьох випадках ці фактори не мають постійного значення.

Через це кожний з таких факторів є, звичайно, функцією багатьох змінних (інших факторів).

У аналітичному вигляді це можна виразити так:

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1(y,z,v,u...) \\ y &= f_2(x,z,v,u...) \\ z &= f_3(y,x,v,u...) \\ v &= f_4(x,y,z,u...) \\ u &= f_5(x,y,z,v...) \end{aligned}\right\}, \qquad (1)$$

де x, y, z – змінні значення відповідних факторів.

Але встановити функціональну залежність одночасно між великою кількістю факторів практично неможливо.

Таку залежність можна встановити між обмеженою кількістю факторів. Природно поставити питання – чи можна обмежитися встановленням залежності тільки між декількома факторами, нехтуючи іншими. Виявляється, що у багатьох випадках це цілком можливо. Це можливо у тому випадку, коли, по-перше, такі фактори не роблять будь якого помітного впливу на хід процесу або, по-друге, коли їх вплив тим або іншим чином можна виключити.

Тому задача дослідника полягає перш за все в тому, щоб встановити які фактори, що обумовлюють хід даного процесу, виконують домінуючу роль, а які другорядну і ними можна знехтувати.

Але і в цьому випадку кількість факторів, які необхідно буде вивчати, може виявитися досить великою.

Вивчити їх можна тільки попарно.

$$x = f_1(y); y = f_2(z); z = f_3(v); i\, m.д. \tag{2}$$

Для того, щоб таке попарне вивчення факторів можна було здійснити, решта факторів на цей час виключають або надають їм постійне значення.

Нехай, наприклад, вимагається встановити глибину ходу сошника сівалки залежно від кута установки полиці наральника, тиск на сошник і густину ґрунту. Аналітично шукану залежність можна виразити так

$$h = f(\alpha, q, p); \tag{3}$$

Практично таку залежність можна встановити попарно.

$$\left.\begin{array}{l} h = f_1(\alpha); h = f_2(q); \\ h = f_3(p); \end{array}\right\} \tag{4}$$

де h – глибина ходу сошника;

a – кут нахилу полиці наральника сошника;

q – тиск на сошник;

p – густина ґрунту.

Для встановлення залежностей (4) поступають так: беруть сошник при постійному на нього тиску (q = const, грунт однакової густини (p = const). Потім протягують сошник при значенні кута $\alpha = \alpha_1$, $\alpha = \alpha_2$, $\alpha = \alpha_3$, і т.д. і заміряють глибину його ходу h. На підставі цього встановлюється перша залежність

$$h = f_1(\alpha);$$

Потім, приймаючи α = const і p = const, встановлюють залежність $h = f_2(q)$ і т.д.

Зіставляючи потім одержані залежності роблять відповідні висновки відносно впливу на глибину ходу кожного з розглядуваних факторів окремо і разом взятих.

Цим і пояснюється те, що встановлення характеру залежності між двома змінними є одним з основних методів великої кількості наукових досліджень.

Володіння цим методом є необхідною умовою успішного виконання наукового дослідження.

1. Способи представлення функціональної залежності між двома змінними

Для представлення функціональної залежності між двома змінними можуть бути застосовані три способи: табличний, графічний і аналітичний. Кожний з цих способів має свої переваги і недоліки.

1.1. Табличний спосіб

При виконанні експериментальних досліджень табличний спосіб у багатьох випадках є незамінним прийомом.

Цей спосіб застосовується зазвичай, у тому випадку, коли вимірювані під час дослідження величини мають дискретний характер, тобто коли вимірювання здійснюються через певні конкретні інтервали даної незалежної змінної. Так, наприклад тиск повітря на поверхню тіла залежно від швидкості руху останнього представляється табл. 1.

Таблиця 1 – Тиск повітря на поверхню тіла залежно від швидкості руху

№ досліду	Швидкість тіла, м/хв.	Тиск на всю поверхню тіла, кг
1	1	2,5
2	2	10,0
3	3	22,5
4	4	40,0
5	5	62,5
6	6	90,0

До недоліків табличного способу слід віднести те, що:

– він не дає можливості відразу знаходити проміжні значення однієї змінної (залежної) за заданим значенням іншої (незалежної);

– він не дає можливості охопити одним поглядом всієї картини змін однієї змінної залежно від характеру зміни іншої.

Так, наприклад, не можна відразу сказати чому буде рівний тиск на поверхню тіла, якщо швидкість руху тіла буде рівна 1,5; 2,3; 3,7 м/хв. і т.д. Для того, щоб одержати необхідну відповідь, потрібно здійснити певні обчислення.

За даними наведеними в табл. 2.1 не можна також судити про те, як саме зростає (за яким законом) тиск залежно від швидкості тіла.

2.1.2. Графічний спосіб представлення функціональних залежностей

Перевага цього способу полягає у тому, що він дає можливість знаходити будь-яке значення однієї змінної за заданим значенням іншої. Для цього достатньо з даної точки на координатній осі ($x = x_i$), що дає значення заданої змінної, поставити перпендикуляр, продовжити його до перетину з графіком і потім з одержаної точки перетину перпендикуляра з графіком опустити перпендикуляр на другу вісь координат. Точка перетину цього перпендикуляра з віссю ординат, і дає значення другої змінної (рис. 1).

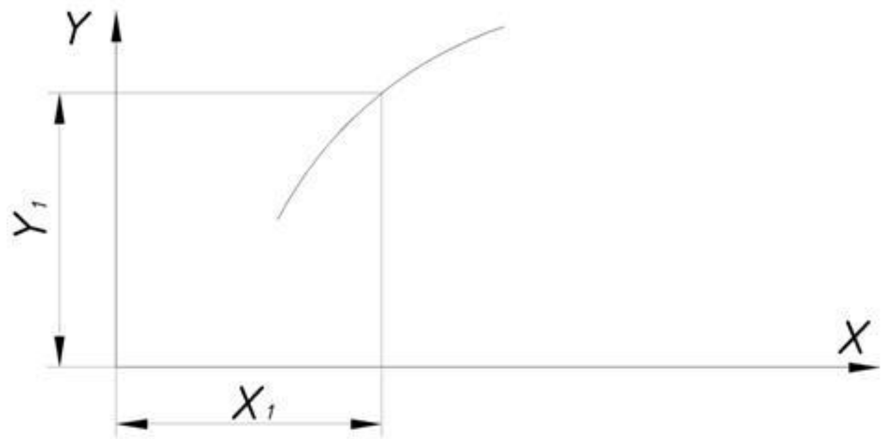

Рисунок 1 – Графічний спосіб представлення функціональних залежностей

Крім того, графік дає можливість одним поглядом охопити всю картину взаємного зв'язку змінних – інтервали їх зростання, максимуму, падіння і мінімуму.

До недоліків графічного способу слід віднести те, що він є недостатньо точним. Одержана за допомогою цього методу точність залежить від якості інструментів, за допомогою яких проводяться виміри на графіках, і досвідченості виконавця.

1.3. Аналітичний спосіб представлення функціональних залежностей між двома змінними

Найефективнішим є аналітичний спосіб представлення функціональної залежності між змінними.

Цей спосіб дає можливість не тільки точно визначити значення однієї із змінних при заданому значенні другої, але і відразу робить наочним загальний закон, яким зв'язані між собою змінні.

Крім того, аналітичний спосіб дає можливість екстраполювати функцію, якщо для цього є відповідні підстави. Аналітична форма залежності між досліджуваними змінними величинами володіє ще цілим рядам інших якостей, якими не володіють табличний і графічний способи.

За нею може бути знайдена наростаючим підсумком сума величин, що вивчаються, швидкість їх зміни, значення мінімуму і максимуму цих величин і т.д.

Тому кожен експериментатор прагне, звичайно, до того, щоб результати досліджень були оброблені за допомогою аналітичних методів.

Проте, цим не відкидається доцільність застосування табличного і графічного методів. Тим паче, що у багатьох випадках без табличного методу взагалі не можна обійтися, особливо, в початковій стадії збирання матеріалів. Що ж до графічного методу, то він застосовується для цілей наочності і навіть у тому випадку, коли застосований аналітичний метод. Ці методи супроводять і доповнюють один одного.

2. Визначення виду емпіричної залежності

Перш ніж приступити до остаточної математичної обробки результатів досліджень необхідно встановити аналітичну форму, за якою здійснюватиметься дана обробка, тобто встановити рівняння (формулу), що найточніше відображає функціональну залежність між досліджуваними величинами.

Для цього поступають таким чином. На координатній сітці (*xoy*) наносять значення емпіричних даних. В результаті цього на вказаній сітці одержують ряд точок.

Якщо ці точки розташуються так, що через них можна провести пряму лінію або так, що вони розташуються досить близько від деякої прямої лінії, то можна прийняти, що між досліджуваними величинами має місце прямолінійна залежність. В цьому випадку задача полягатиме в тому, щоб знайти рівняння цієї прямої лінії, тобто знайти значення її кутового коефіцієнта і постійної.

Якщо ж нанесені точки не розташовуються на прямій, то потрібно встановити характер тієї кривої, на якій вони розмістяться.

Для цього поступають таким чином. Через одержані точки проводять криву. При цьому, якщо точки розташовані таким чином, що через них не можна провести плавну криву, то цю криву проводять так, щоб вона можливо близько проходила біля нанесених точок.

Потім, залежно від виду кривої, задаються її рівнянням.

Наступний етап полягає в тому, щоб довести, що це рівняння дійсно відображає одержану емпіричну залежність. Для цього задане рівняння перетворять до такого вигляду, щоб між перетвореними змінними мала місце лінійна залежність. Значення цих перетворених емпіричних змінних наносять на координатну площину. Якщо одержані точки розташуються по прямій лінії, то це значить, що прийняте рівняння кривої відповідає поставленим вимогам.

Якщо ж цю умову не виконано, то потрібно брати інше рівняння, перевіривши його придатність таким же чином як і перше.

Припустимо, наприклад, що рівняння емпіричної кривої передбачається представити у вигляді експоненціальної функції

$$y = ae^{bx} \tag{5}$$

Як перевірити правомірність такого уявлення?

Для цього поступають таким чином.

Прологарифмувавши ліву і праву сторони рівняння (5) одержимо:

$$\ln y = \ln a + bx \tag{6}$$

Припустимо

$$\ln y = \overline{y}; \ln a = \overline{a}$$

рівняння (6) можна написати у такому вигляді

$$\overline{y} = \overline{a} + bx \tag{7}$$

тобто ми одержали рівняння прямої відносно *x* і *y*.

В результаті виконання експериментальних досліджень ми маємо значення *x* і *y*. За цими даними легко також обчислити значення

$$\overline{y} = \ln y.$$

В результаті ми матимемо таблицю емпіричних даних (табл. 2).

Таблиця 2 – Множина емпіричних даних

№ з/п	*x*	*y*	$\overline{y}$
1	x_1	y_1	$\overline{y}_1$
2	x_2	y_2	$\overline{y}_2$
3	x_3	y_3	$\overline{y}_3$
–	–	–	–
n	x_n	y_n	$\overline{y}_n$

тобто

$$x = x_1; \ \ \overline{y} = \overline{y}_1$$

$$x = x_2; \ \ \overline{y} = \overline{y}_2$$

і т.д.

Наносимо значення цих координат на координатну площину і проводимо через одержані точки лінію. Якщо ця лінія буде прямою, що вимагається за одержаним в результаті перетворення рівняння заданої кривої, то це значить, що дана крива підібрана правильно. Якщо ж ці точки не розташуються на прямій, то це значить, що задана крива не відображає одержаної емпіричної залежності і потрібно шукати іншу криву.

Після вибору аналітичного виду емпіричної кривої приступають до визначення її коефіцієнтів і постійних.

3. Способи визначення коефіцієнтів і постійних емпіричних залежностей

Залежно від бажаної точності для визначення коефіцієнтів і постійних емпіричних залежностей застосовують різні способи.

Найширше застосування одержали наступні три способи:

– спосіб вибраних точок;

– спосіб найменшої середньої помилки;

– спосіб найменших квадратів.

Розглянемо коротко зміст і методику застосування цих способів.

3.1. Спосіб вибраних точок

Суть цього способу полягає в наступному. На координатну площину наносять значення відповідних табличних даних (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) і т. д., одержаних в результаті експериментальних досліджень. Вказаним вище способом проводять криву і вибирають вид (формулу) емпіричної залежності. Вибрана формула міститиме коефіцієнти і постійні.

Але числові значення останніх залишаються поки невідомими. Щоб знайти їх значення, поступають таким чином.

Беруть на вибраній кривій стільки точок, скільки в її рівняння входять коефіцієнтів і постійних, і пишуть рівняння кривої для цих точок. При цьому очевидно, що у всіх цих рівняннях значення коефіцієнтів і постійних одні і ті ж, значення ж координат (для різних точок) різні. Отже, ми одержимо стільки рівнянь, скільки невідомих. Невідомими тут є коефіцієнти і постійні. Вирішуючи потім ці рівняння одержимо значення коефіцієнтів і постійних.

Нехай, наприклад, рівняння вибраної кривої має вигляд

$$y = ax^2 + bx + c. \qquad (8)$$

Тоді для визначення значень *a, b* і *c* пишемо три рівняння

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= ax_1^2 + bx_1 + c \\ y_2 &= ax_2^2 + bx_2 + c \\ y_3 &= ax_3^2 + bx_3 + c \end{aligned}\right\}, \qquad (9)$$

де (y_1, x_1), (y_2, x_2), (y_3, x_3) – значення координат в трьох точках на вибраній кривій.

Вирішуючи ці рівняння відносно *a, b і c* і підставивши отримані їх значення в рівняння (2.8), знайдемо шукане рівняння кривої в кінцевому вигляді.

3.2. Спосіб найменшої середньої помилки

За цим способом постійні і коефіцієнти вибраної емпіричної формули визначаються так, щоб алгебраїчна сума всіх розбіжностей між дійсним розташуванням точок і тими, що визначаються за формулою була близька або рівна нулю, тобто

$$\Sigma(y_{i\,дійсн.} - y_{i\,знайден.}) = 0 \quad . \tag{10}$$

Припустимо, що вибраним емпіричним рівнянням є рівняння прямої, що проходить через початок системи координат

$$\left.\begin{aligned} y &= ax \\ y - ax &= 0 \end{aligned}\right\} , \tag{11}$$

де *a* – коефіцієнт, що підлягає визначенню.

Отже, в рівняння (10) замість $y_{i\ знайден.}$, можна підставити значення ax_i. Коефіцієнт *a* потрібно при цьому визначити так, щоб

$$\left.\begin{aligned} &\Sigma(y_i - ax_i) = 0 \\ &\Sigma y_i - a\Sigma x_i = 0 \\ &a = \frac{\Sigma y_i}{\Sigma x_i} \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Припустимо, що при проведенні експериментальних досліджень були одержані наступні цифрові дані значень *x* і *y*, наприклад, залежності опору робочого органу ґрунтообробного знаряддя від глибини ходу (табл. 3).

Якщо нанести значення *x* і *y* на координатну площину, то одержимо точки, які приблизно будуть розташовані на прямій лінії, що проходить через початок координат (рис. 2).

Необхідно визначити значення коефіцієнта *a*.

Виконаємо це за способом найменшої середньої помилки. Згідно з рівнянням (13) і табл. 3, маємо

$$a = \frac{\Sigma y_i}{\Sigma x_i} = \frac{1577.0}{235} = 6.711$$

Таблиця 3 – Залежності опору робочого органу ґрунтообробного знаряддя від глибини ходу

№ з/п	x	y	xy	x^2
1	10	67,0	6700	100
2	15	101,0	1515,0	225
3	25	168,0	4200,0	625
4	30	202,2	6066,0	900
5	45	301,0	13545,0	2025
6	50	334,0	16700,0	2500
7	60	404,0	24240,0	3600
	$\Sigma x_i = 235$	$\Sigma y_i = 1577.0$	$\Sigma x_i y_i = 66936.0$	$\Sigma x_i^2 = 9975$

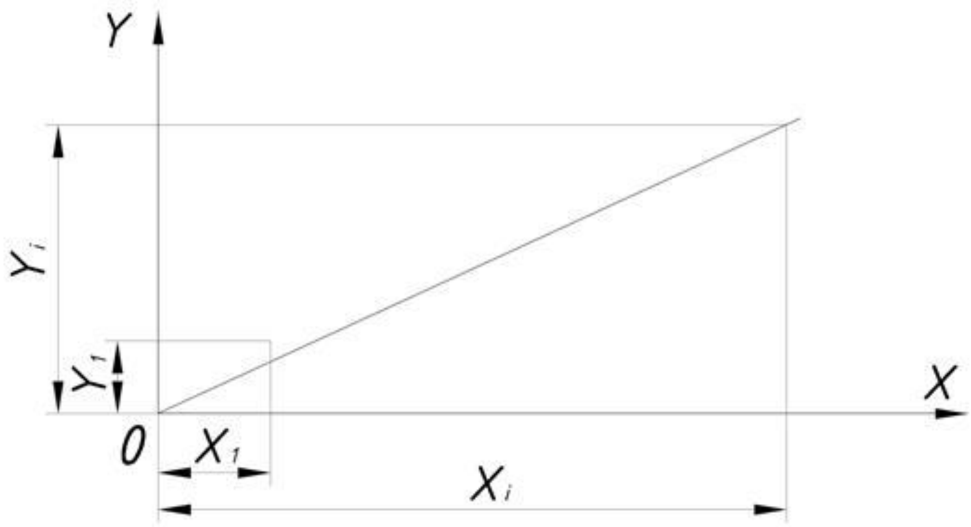

Рисунок 2 – Графічна залежність змінних *x* і *y*

Отже, можна допустити, що між *y* і *x* має місце лінійна залежність вигляду

$$y = ax \qquad (13)$$

Таким чином емпірична залежність (13) матиме такий вигляд

$$y = 6.711x. \qquad (14)$$

3.3. Спосіб найменших квадратів

Згідно теорії найменших квадратів, найменше відхилення обчислених значень від досліджуваних має місце тоді, коли

$$\Sigma(y_{i\,дійсн.} - y_{i\,знайден.})^2 = \min. \qquad (15)$$

Якщо прийнята емпірична залежність представляється прямою, яка проходить через початок системи координат, то слід припустити

$$y = ax\,,$$

$$y_{i\,знайден.} = ax_{i\,дійсн.} \tag{16}$$

Коефіцієнт *a* необхідно при цьому визначити так, щоб виконати умову (15), яка через вираз (16) приймає такий вигляд

$$\Sigma(y_i - ax_i)^2 = \min\,, \tag{17}$$

де індекс «*дійсн.*» – опущений для скороченого запису.

Як відомо з диференціального числення, мінімум даної функції має місце тоді, коли перша похідна від неї за аргументом рівна нулю, а друга похідна має додатне значення.

Як змінна величина функції (17) є коефіцієнт *a*.

Наша задача полягає в тому, щоб із всіх можливих значень цього коефіцієнта встановити таке, при якому виконувалася б умова (17).

Для цього беремо похідну по *a* і прирівнюємо її до нуля.

$$\frac{\partial}{\partial a}\Sigma(y_i - ax_i)^2 = 0 \tag{18}$$

Отримаємо

$$\frac{\partial}{\partial a}\Sigma(y_i - ax_i)^2 = 2\Sigma(y_i - ax_i)(-x_i) = 0$$

Або

$$\Sigma\, y_i x_i - a\Sigma\, x_i^2 = 0$$

Звідси

$$a = \frac{\Sigma y_i x_i}{\Sigma x_i^2} \tag{19}$$

Користуючись табл. 3, одержимо

$$a = \frac{\Sigma y_i x_i}{\Sigma x_i^2} = \frac{66939,0}{9975,0} = 6,709 \tag{20}$$

Підставивши тепер значення *a* в рівняння (16), остаточно одержимо

$$y = 6,709x \tag{21}$$

4. ПРИКЛАДИ

4.1. Загальний випадок прямої лінії

$$y = ax + b \tag{22}$$

4.1.1. Визначення коефіцієнта і постійної за способом вибраної точки

В цьому випадку як вибрані точки, необхідні для визначення коефіцієнта і постійної, буде дві точки: точка, вибрана на осі ординат

$$y_i = b$$

і одна з точок, взята на прямій,

$$x = x_2$$

$$y = y_2$$

Коефіцієнт *a* визначиться з рівняння

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2} \tag{23}$$

4.1.2. Визначення коефіцієнта і постійної за способом найменшої середньої помилки

В цьому випадку розділяємо дані таблиці спостережень на дві частини і складаємо два рівняння

$$\sum_{1}^{n_1} (y_i - ax_i - b) = 0$$

$$\sum_{n_1}^{n_2} (y_i - ax_i - b) = 0$$

Розв'язавши ці рівняння знайдемо значення шуканих коефіцієнтів.

4.1.3. Визначення коефіцієнтів і постійної за способом найменших квадратів

В цьому випадку, згідно виразу (17), матимемо:

$$\Sigma (y_i - ax_i - b)^2 = \min \tag{24}$$

Знаходимо похідні по *a* і по *b* та прирівнюємо їх до нуля:

$$\frac{\partial}{\partial a} \Sigma (y_i - ax_i - b)^2 = 2 \Sigma (y_i - ax_i - b)(-x_i) =$$

$$= 2(-\Sigma y_i x_i + a\Sigma x_i^2 + b\Sigma x_i) = 0 \quad ; \tag{25}$$

$$\frac{\partial}{\partial b}\Sigma(y_i - ax_i - b)^2 = 2\Sigma(y_i - ax_i - b)(-1) =$$
$$= 2(-\Sigma y_i + a\Sigma x_i + bn) = 0 \quad , \qquad (26)$$

де $n = \Sigma 1$ – кількість досліджуваних величин.

Рівняння (25) і (26) є двома рівняннями з двома невідомими (*a* і *b*).

Розв'язавши ці рівняння, знайдемо значення шуканих коефіцієнтів *a* і постійної *b*, які потім і підставляємо в рівняння (22).

4.2. Параболічна залежність

$$y = ax^b \qquad (27)$$

4.2.1. Визначення коефіцієнта a і показника степеня b способом вибраних точок

Беремо на побудованій кривій дві точки: (x_1, y_1) та (x_2, y_2) і складаємо два рівняння

$$y_1 = ax_1^b, \qquad y_2 = ax_2^b. \qquad (28)$$

Звідси

$$b = \frac{\ln\frac{y_1}{y_2}}{\ln\frac{x_1}{x_2}} \qquad (29)$$

$$a = \frac{y_1}{x_1^b} \qquad (30)$$

Обчисливши за цими формулами значення *a* і *b*, підставляємо їх у формулу (27).

4.2.2. Визначення коефіцієнта a і показника степеня b способом найменшої середньої помилки і за способом найменших квадратів

Прологарифмувавши рівняння (27), одержимо:

$$\ln y = \ln a + b\ln x \qquad (31)$$

Підставивши

$$\ln y = \bar{y}$$
$$\ln a = a_0$$
$$\ln x = \bar{x}$$

рівняння (31) можемо переписати так

$$\bar{y} = b\bar{x} + a_0 \qquad (32)$$

тобто ми одержимо рівняння прямої.

Потім значення коефіцієнта b і постійної a_0 знаходимо таким же способом, як в загальному випадку прямої лінії.

Особливість полягатиме тільки у тому, що у формули для обчислення коефіцієнтів замість значень y_i і x_i необхідно буде підставити їх логарифми

$$\ln y_i = \bar{y}_i \quad \text{і} \quad \ln x_i = \bar{x}_i$$

Для обчислення цих логарифмів і їх сум в таблиці емпіричних даних додають дві графи: графу значень $\ln y_i$, і графу значень $\ln x_i$.

Необхідно при цьому врахувати також те, що визначивши значення коефіцієнта a_0 в рівняння (27) необхідно підставити значення

$$a = e^{a_0}$$

де e – основа натурального логарифма.

5. Види емпіричних залежностей

Найширше застосовуються для вираження емпіричних залежностей наступні формули:

1) $y = ax$ – рівняння прямої лінії, що проходить через початок координат.
2) $y = ax + b$ – рівняння прямої лінії в загальному випадку.
3) $y = ax^b$ – рівняння параболи, якщо $b > 0$ і рівняння гіперболи, якщо $b < 0$.
4) $y = ax^b + c$ – рівняння параболи, якщо $b > 0$ і рівняння гіперболи, якщо $b < 0$.
5) $y = ae^{bx}$ – рівняння експоненціальної кривої (де e – основа натурального логарифма).
6) $y = ae^{bx} + c$ – рівняння експоненціальної кривої з наявністю постійної.
7) $y = \dfrac{x}{a + bx}$ – рівняння кривої типу гіперболи.

8) $y = \dfrac{x}{a+bx} + c$ – рівняння кривої типу гіперболи з наявністю постійної.

9) $y = a + bx + cx^2$ – рівняння кривої, подібній параболі.

10) $y = a + bx + x^c$

11) $y = a + bx + kx^c$

12) $y = a + bx + e^x$

13) $y = a + bx + ce^x$

14) $y = a + bx + ce^{kx}$

15) $y = \dfrac{x}{a+bx} + ce^{dx}$

16) $y = ae^{bx} + ce^{dx}$

17) $y = a + bx + cx^2 + \quad + dx^3 + ex^4 + \ldots + kx^{n-1} + lx^n$.

Формули 10 – 17 це рівняння комбінованих кривих.

Зміст звіту

1. Назва роботи.
2. Мета роботи.
3. Розрахунки значень заданих прикладів.
4. Висновки.
5. Література.

Література

1. Кане М.М. Основы научных исследований в технологии машиностроения. – Минск: Высш. Школа, 1987. – 231 с.

2. Селиванов А.И. Артемьев Ю.Н. Теоретические основы ремонта и надежности сельскохозяйственной техники. – М.: Колос, 1978.– 248 с.

3. Михацев С.В., Васильев П.М., Погорелый Л.В. Основы научных исследований. – К., Вища школа, 1985.– 266 с.

4. Статистические методы обработки эмпирических данных. – М.: Издательство Стандартов, 1978.–232 с.

5. Артемьев Ю.Н. Качество ремонта и надежность машин в сельском хозяйстве. – М.: Колос, 1981.– 239 с.