Тема: МЕТОДИКА ОБРОБКИ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕНЬ МАСОВОГО ХАРАКТЕРУ ЗА ДОПОМОГОЮ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТІ І МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

Мета: вивчити основні положення теорії ймовірності та математичної статистики, за допомогою яких виконується обробка експериментальних результатів дослідження масового характеру.

Порядок виконання роботи

1. На підставі виданого завдання вивчити теоретичні відомості.
2. Розв’язати задані приклади.
3. Скласти звіт по лабораторній роботі.

Теоретичні відомості

Результати дослідів або спостережень прийнято в теорії ймовірності називати подіями.

Таку подію, настання якої наперед не можна гарантувати, називається випадковою подією. Ця подія характеризується тільки тим, що вона можлива.

Одні випадкові події одиничні, тобто вони не повторюються, інші ж мають масовий характер. Так, наприклад, те, що відбулася поломка сошника сівалки при наїзді останньої на перешкоду, подолання якої не передбачене конструкцією сівалки, є одиничною випадковою подією; те, що дана конструкція сівалки забезпечує певний розподіл насіння в ряду, є подією масовою, оскільки число зерен, розподілюване по довжині ряду, є великим (масовим).

Той показник, за допомогою якого оцінюється (вимірюється) випадкова подія, називається випадковою величиною. Так, наприклад, хай при установці лапи культиватора на глибину обробки в 6 см дійсна глибина обробки коливається в межах 5-7 см. Відхилення глибини обробки в одну і іншу сторону і є випадковою величиною.

Сукупність випадкових величин, що відповідають різним значенням просторового або тимчасового параметра, називається випадковим процесом або випадковою функцією. Прикладом такого процесу може служити вібрація вузлів даної машини під час її роботи.

Закономірності, властиві випадковим подіям масового характеру, вивчаються за допомогою математичних дисциплін – теорії ймовірності і математичної статистики. Характерною особливістю статистичного опису є те, що він застосовується не до одиничної події, а до великої кількості подій, тобто при статистичному методі описуються лише ті властивості, якими володіє деяка кількість подій, що розглядаються не окремо, а разом. Так, наприклад, при вивченні рівномірності розподілу насіння в рядку, посіяного сівалкою, вивчається не те, як розташувалося кожне із зерен на заданому відрізку довжини рядка, а те, як розташувалася та або інша кількість зерен на великій кількості таких відрізків по довжині рядка. Кількість так або інакше розташованих по довжині ряду зерен може бути досить великим (масовим).

Випадкові події також детерміновані, як і невипадкові. Особливість їх полягає тільки у тому, що вони обумовлені настільки великою кількістю взаємодіючих факторів, що практично їх врахувати і проаналізувати з такою точністю, на підставі якої можна було б передбачати хід події, не представляється можливим.

Так, наприклад, якби ми захотіли передбачити характер розподілу зерен в ряду, то нам необхідно було б знати, як на це впливають такі фактори, як: конструктивні параметри висіваючого апарату сівалки, насіннєпроводу і сошника, фізичні властивості ґрунту й насіння і т.д. Очевидно, що врахувати всі ці фактори і на підставі цього передбачити наперед характер розподілу насіння в рядку практично досить важко. Тому вивчення цього явища і здійснюється, як правило, статистичними методами.

Випадкові події складають значну частку всіх подій, що відбуваються при виконанні машинами технологічних процесів сільськогосподарського виробництва.

Тому вивчення таких подій за допомогою теорії ймовірності і математичної статистики має велике практичне значення.

Підставою до того, щоб вважати явище (подію) випадковою є наступні ознаки:

1. Неможливість фіксації початкового стану системи, яку вивчають, для того, щоб однозначно визначити кінцевий її стан (наприклад, початковий стан зерна при подачі його висіваючим апаратом в насіннєпровід).

При цьому можуть мати місце три випадки:

а) Випадок, коли дуже невелика зміна початкового стану системи може привести до великої зміни кінцевого її стану, хоча саме явище може мати просту природу.

б) Випадок, коли початковий стан системи настільки складний, що практично неможливо фіксувати його з достатньою точністю для однозначного визначення кінцевого стану, хоча явище і тут може бути простим.

в) Випадок, коли стан системи принципово не може бути виміряний, оскільки саме вимірювання може вносити неконтрольовані зміни в досліджуване явище.

2. Складність явища, що вивчається.

При цьому можуть мати місце наступні випадки:

а) Випадок, коли явище є настільки складним, що практично неможливо обчислити характеристики кінцевого стану, хоча принципова можливість цього в теорії існує.

б) Випадок, коли сама природа причин, що обумовлює дане явище, недостатньо відома.

3. Неможливість обліку багатьох факторів, які можуть мати таке ж вирішальне значення для появи тієї або іншої випадкової події, як і фактори, що піддаються обліку. В цьому випадку кожне фізичне вимірювання більшою чи меншою мірою є випадковою подією, що дає різні результати при повторних вимірюваннях.

Як правило, при вивченні випадкових явищ зустрічаються всі три описані вище ознаки.

1. Поняття частоти і ймовірності

Припустимо, що для вивчення якого-небудь явища була виконана серія дослідів n, тобто зроблено n спостережень. При цьому виявилося, що одна частина цих спостережень відноситься до одного класу, інша частина до іншого і т.д. Позначимо перший клас отриманих величин через А, другий через В, третій через С і т.д. Нехай кількість цих спостережень буде nA, nB, nC і т. д., а кількість всіх спостережень – n. При цьому очевидно, що

$$n = n_A + n_B + n_C + \ldots + n_S \qquad (1)$$

Таким чином в даному випадку відбулися події: подія А, подія В, подія С і т.д.

Числа n_A, n_B, n_C і т. д. називаються абсолютною частотою подій А, В, С і т.д. Відношення

$$P_A = \frac{n_A}{n},$$

$$P_B = \frac{n_B}{n}, \qquad (2)$$

$$P_C = \frac{n_C}{n}$$

називаються відносними частотами подій А, В, С і т.д. у даній серії спостережень.

Отже, відносною частотою або, як це часто скорочено говорять, частотою називається відношення кількості випадків появи даної події до кількості всіх спостережень.

ПРИКЛАД

Нехай при вивченні характеру розподілу насіння даною сівалкою по довжині ряду було встановлено, що серед ста 2-х сантиметрових відрізків по довжині ряду на 20-ти відрізках було по 3 шт. насіння, на 40-ка по 2 штуки, на 30-ти по 1-й штуці і на 10-ти насіння взагалі не виявилося. Отже, абсолютна частота подій буде:

першого $n_A = 20$;

другого $n_B = 40$;

третього $n_C = 30$;

четвертого $n_D = 10$.

Кількість всіх спостережень (дослідів) буде рівне:

$$n = n_A + n_B + n_C + n_D = 20 + 40 + 30 + 10 = 100$$

Відносні частоти даних подій будуть:

$$P_A = \frac{20}{100} = \frac{1}{5} \qquad P_B = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}$$

$$P_C = \frac{30}{100} = \frac{3}{10} \qquad\qquad P_D = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}.$$

Досвід показує, що при обчисленні відносних частот деякої події в різних серіях спостережень одержувані числа дуже мало відрізняються один від одного, якщо кожна серія складається з дуже великого числа спостережень.

Причому, чим більше число спостережень, тим більш постійною і стійкою буде частота.

Властивістю зберігати стійку частоту володіють багато масових випадкових подій у природі й техніці. Закономірність ходу цих подій і є предметом вивчення теорії ймовірності і математичної статистики.

Кількісною характеристикою стійкості частоти служить ймовірність.

Ймовірність – це те число, поблизу якого коливається частота випадкової події при масових випробуваннях. Якщо, наприклад, частота розміщення по дві штуки зерен на довжині рядка в 2 см була: у 5-ти випадках 39, в 10-ти випадках 40 і в 4-х – 41, то очевидно, що дана частота коливається близько 40. Дійсно

$$\frac{39 \cdot 5 + 40 \cdot 10 + 41 \cdot 4}{19} \approx 40.$$

Відносна частота при цьому буде рівна

$$P_{відносн.} = \frac{40}{100} \approx \frac{2}{5},$$

якщо кількість всіх спостережень (дослідів) рівна 100.

Одержане число і є числом, близьким до ймовірності.

2. Аксіоми ймовірності

Ймовірність володіє деякими властивостями, які служать основою для всіх подальших висновків, але самі не можуть бути доведені математично. Ці основи є аксіомами ймовірності.

Аксіома 1. Значення ймовірності - *p* є число, в межах між 0 і 1 або співпадаюче з одним з цих чисел;

$$0 \le p \le 1. \tag{3}$$

Ця аксіома витікає з поняття відносної частоти. Оскільки ця частота рівна

$$P_A = \frac{n_A}{n},$$

$де\ 0 \le n_A \le n,\ то\ 0 \le p_A \le 1$

і, як наслідок, те ж саме потрібно вимагати і від ймовірностей.

Аксіома 2. Ймовірність достовірної події рівна одиниці.

$$p_{дост.} = 1. \tag{4}$$

Дана аксіома витікає з того, що відносна частота достовірної події завжди рівна одиниці

$$p_{дост.} = \frac{n}{n} = 1,$$

отже, те ж саме потрібн вимагати і від його ймовірності.

Аксіома 3. Ймовірність неможливої події рівна нулю

$$p_{\text{неможл.}} = 0 \quad , \tag{5}$$

оскільки частота неможливої події рівна нулю

$$p_{\text{неможл.}} = \frac{0}{n} = 0 \quad .$$

Аксіома 4. Ймовірність настання однієї з двох подій рівна сумі ймовірностей кожної події мінус ймовірність одночасного настання обох подій

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) \tag{6}$$

Аксіома 5 (правило множення ймовірностей). Ймовірність одночасного настання двох подій рівна похідній абсолютної ймовірності однієї з цих подій на умовну ймовірність іншої.

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B) \tag{7}$$

Ці дві аксіоми витікають з наступних передумов. Для двох подій А і В в кожному спостереженні може мати місце одна з наступних можливостей:

1. Подія А наступає, а подія В ні.
2. Подія В наступає, а подія А ні.
3. Наступають обидві події А і В.
4. Ні подія А, ні подія В не наступають.

Позначимо частоти цих подій через n_1, n_2, n_3, n_4, відповідно. При цьому, очевидно, що кількість всіх спостережень буде рівною

$$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n$$

Відносні частоти настання подій будуть

$$P(A) = \frac{n_1 + n_3}{n} \tag{8, a}$$

$$P(B) = \frac{n_2 + n_3}{n} \tag{8, b}$$

$$P(A+B) = \frac{n_1 + n_2 + n_3}{n} \tag{8, c}$$

$$P(AB) = \frac{n_3}{n} \tag{8, d}$$

$$P(A/B) = \frac{n_3}{n_2 + n_3} \tag{8, e}$$

$$P(B/A) = \frac{n_3}{n_1 + n_3} \tag{8, k}$$

Для шести цих величин мають місце наступні співвідношення.

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) = P(B) \cdot P(A/B)$$

які й складають зміст 4-ї та 5-ї аксіом.

Аксіома 6. Ймовірність настання хоча б однієї з протилежних подій рівна одиниці

$$P(A+\overline{A})=1 \tag{9}$$

Дана аксіома витікає з самого поняття ймовірності. Якщо ймовірність даної події рівна $\frac{n_1}{n}$, то ймовірність протилежної події рівна $\frac{n-n_1}{n}$.

Отже, сума ймовірності обох цих подій буде рівна

$$P(A+\overline{A})=\frac{n_1}{n}+\frac{n-n_1}{n}=1.$$

Аксіома 7. Ймовірність настання хоча б однієї з сумісних подій рівна одиниці.

$$P(A_1+A_2+A_3+\ldots+A_i)=1. \tag{10}$$

Дійсно, якщо ймовірність всіх можливих подій з даної серії спостережень рівна

$$\frac{n_1}{n},\ \frac{n_2}{n},\ \frac{n_3}{n}\ \ldots\ \frac{n_i}{n}$$

то ймовірність того, що одне з них наступить, буде рівна

$$p=\frac{n_1}{n}+\frac{n_2}{n}+\frac{n_3}{n}+\ldots+\frac{n_i}{n}.$$

А оскільки абсолютна частота всіх подій рівна кількості спостережень тобто

$$n_1+n_2+n_3+\ldots+n_i=n,$$

то отримаємо

$$p=\frac{n}{n}=1.$$

Аксіома 8. Ймовірність несумісних подій рівна сумі ймовірностей цих подій

$$P(A+B+C+\ldots+S)=P(A)+P(B)+P(C)+\ldots+P(S). \tag{11}$$

Якщо, наприклад, кількість всіх спостережень рівна n, з яких кількість подій n1 відноситься до класу А, кількість подій n_2 відноситься до класу В, а кількість подій n3 відноситься до класу С і т. д., то ймовірність того, що одна з цих подій наступить, буде рівна

$$p=\frac{n_1}{n}+\frac{n_2}{n}+\frac{n_3}{n}+\ldots+\frac{n_s}{n}=\frac{\sum_1^s n_i}{n}.$$

Зазначимо, що умовною ймовірністю P(A/B) події А при настанні події В називається ймовірність події А, обчислена з припущенням, що подія В наступила.

Припустимо

$$P(AB)=\frac{n_1}{n},$$

де n_1 – кількість сумісних подій з числа всіх подій n;

$$P(B)=\frac{n_1+n_2}{n},$$

де n_2 – число появи подій В (подій протилежних подіям А).

Тоді умовна ймовірність буде рівною

$$P(A/B)=\frac{\frac{n_1}{n}}{\frac{n_1+n_2}{n}}=\frac{n_1}{n_1+n_2}.$$

3. Теореми ймовірностей

На підставі аксіом виводяться теореми ймовірності. Основними з таких теорем є наступні:

Теорема 1. Якщо дві події несумісні, то ймовірність настання хоча б однієї з цих подій рівна сумі ймовірності кожної події окремо

$$P(A+B)=P(A)+P(B). \tag{12}$$

Ця теорема витікає з 4-ї аксіоми і має місце тоді, коли ймовірність одночасного настання обох подій рівна нулю

$$P(AB)=0.$$

Теорема 2. Якщо дві події стохастично незалежні, то ймовірність настання обох подій рівна добутку ймовірності кожної події окремо.

Ця теорема витікає з 5-ї аксіоми.

Оскільки події А стохастично не залежать (за умовою) від події В, то Р(А/В)=Р(А). Тому вираз (3.7) приймає такий вигляд:

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B), \tag{13}$$

що і виражає цю теорему.

Теорема 3 (теорема Бернуллі). Відносна частота незалежних спостережень деякої події сходиться по ймовірності, при $n\to\infty$, до ймовірності цієї події Р

$$P_{ВІДН}\xrightarrow[n\to\infty]{ймовір.}P. \tag{14}$$

Теорема 4 (теорема Чебишева). Середнє арифметичне $\bar{x}$ з n незалежних спостережень випадкової величини х з кінцевим середнім значенням μ сходиться по ймовірності з μ при $n\to\infty$

$$\bar{x}\xrightarrow[n\to\infty]{ймовір.}\mu. \tag{15}$$

Зазначимо, що під стохастично залежними подіями розуміють такі події, між якими існує зв'язок, який виявляється у тому, що одна з величин, які характеризують дану подію, реагує на зміну іншої, котра характеризує іншу подію.

Стохастичний зв'язок між випадковими величинами з'являється зазвичай тоді, коли є загальні випадкові фактори, що впливають як на одну, так і на іншу величину, разом з іншими неоднаковими для обох величин випадковими факторами.

Якщо, наприклад,

$$x = f(z_1, z_2, ..., z_n; v_1, v_2, ..., v_n)$$
$$y = \varphi(z_1, z_2, ..., z_n; u_1, u_2, ..., u_n)$$

то оскільки перша та друга функції в числі інших мають однакові величини (z_1, $z_2 ... z_n$), то вони будуть стохастично залежними.

4. Практичне застосування теорії ймовірності

В даний час теорія ймовірності знаходить широке застосування у всіх галузях науки і практики.

1. Теорія ймовірності використовується в статистиці для чисто описових цілей, для вираження статистичного матеріалу у короткому і стислому вигляді, наприклад, для виразу статистичних даних про народонаселення, розвитку промисловості та сільського господарства і т. д.

2. Теорія ймовірності використовується в статистиці для цілей аналізу.

При виконанні експериментальних досліджень накопичується зазвичай багато матеріалів, які з одного боку, необхідно привести в деякий порядок і, з другого боку, порівняти їх між собою. Цю задачу можна виконати за допомогою теорії ймовірності.

При експериментальних дослідженнях прагнуть звичайно до того, щоб виключити всі фактори, окрім одного, для того, щоб можна було вивчити вплив цього фактора на явище, яке вивчається. Але вказані фактори можуть бути випадковими, тобто при повторенні експериментів за одних і тих же умов можуть отримуватися різні результати. Вивчають такі явища статистичними методами.

Якщо, наприклад, потрібно вивчити вплив рівномірності розподілу добрив, який здійснюється різними конструкціями тукових сівалок або їх апаратів на урожайність сільськогосподарських культур, то потрібно узяти однакові за якістю ділянки поля і одночасно внести однакові норми добрива.

Проте, при цьому залишаться неврахованими ще цілий ряд випадкових факторів (мікрорельєф ґрунту, деяка різниця в глибині обробки і т. д.). Через це виникає необхідність встановити, чи є яка-небудь значуща різниця у врожайності залежно від різниці в рівномірності розподілу добрив, окрім тієї різниці, яку необхідно очікувати через наявність неврахованих (випадкових) факторів.

Якщо цього не взяти до уваги, то можна зробити помилкові висновки, приписавши рівномірності розподілу роль, яку вона не відіграє в питанні підвищення врожайності або навпаки.

3. Теорія ймовірності застосовується для встановлення ступені залежності одного явища від іншого, наприклад, товщини зерна від його довжини і ширини і т.д.

Такі залежності використовуються для вирішення важливих практичних задач.

4. Теорія ймовірності використовується для прогнозу майбутнього ходу випадкового явища. Цим широко користуються, наприклад, в страховій справі. Значне застосування в цьому відношенні теорія ймовірності знаходить в різних галузях теоретичної фізики, де буває необхідно передбачити хід експериментів, пов'язаних з кінетичною теорією газів, радіоактивним розпадом або іншими явищами в теорії атома і т.д. Не менш широке використовування знаходить теорія ймовірності для прогнозу ходу випадкових явищ у галузі технічних, сільськогосподарських і біологічних наук.

5. Математична статистика

Статистика може бути охарактеризована коротко, як наука про методи обробки й аналізу досліджуваного матеріалу.

Той розділ цієї науки, котрий присвячений розробці математичних методів обробки й аналізу досліджуваного матеріалу називається математичною статистикою.

Потреба в такій обробці й аналізі досліджуваного матеріалу обумовлена тим, що, як правило, «сирий» статистичний матеріал, що складається з деякої кількості досліджуваних значень $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ випадкової величини x, подається в такому вигляді, в якому дати їм аналіз неможливо.

Задача статистики полягає в тому, щоб замінити велику кількість досліджуваних величин порівняно невеликою кількістю чисел, що представляють весь матеріал.

Але яка б кількість спостережень не була зроблена, одержані матеріали треба вважати випадковою вибіркою, яка схильна до статистичної флуктуації (відхилення), оскільки якщо провести нові n_i спостереження, то отримаються нові значення.

$$x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$$

Отже навіть в простих випадках витікає необхідність використовувати поняття ймовірності, яка дає підставу випадкову вибірку визнати за представницьку. Тому теорія ймовірності і є неодмінною теоретичною основою математичної статистики.

Зазначимо, що ми як правило цікавимося фактичними емпіричними числами $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ лише для того, щоб на основі них одержати теоретично узагальнені числа. Так, наприклад, при дослідженні вільного падіння тіла $s = \frac{1}{2}gt^2$ емпіричні значення s і t через неминучі помилки вимірювань будуть більш менш розкидані відносно теоретичної кривої.

Тому кожне з таких чисел окремо не дозволяє знайти істинне значення параметра g. І лише статистична обробка всієї сукупності одержаних чисел дозволяє вирішити цю задачу.

Ті числа, за допомогою яких представляється весь великий матеріал (велика кількість спостережень) називають статистичними характеристиками. Саме в можливості за допомогою небагатьох і простих характеристик виразити істотні особливості явищ, які досліджуються (результатів досліджень), а також встановити закономірність їх протікання і полягає цінність статистичних методів їх обробки й аналізу.

6. Статистичні характеристики

В результаті проведення тих чи інших спостережень або дослідів одержують в певних одиницях вимірювання дані про те, як змінювався один параметр (показник) залежно від зміни іншого. Такі дані заносяться в таблицю, в якій в першій графі позначається порядковий номер спостереження або досліду, в другій значення параметра, характер зміни якого задається, а в третій значення досліджуваного параметра (табл. 1).

Таблиця – 1.

Номер досліду	1	2	3	.	.	.	.	*n*
Заданий параметр *x*	x_1	x_2	x_3	.	.	.	.	x_n
Досліджуваний параметр *y*	y_1	y_2	y_3	.	.	.	.	y_n

При цьому на зміну параметра *y* матиме вплив не тільки зміна параметра *x*, але й інших випадкових параметрів, врахувати які практично неможливо. Ряди, що подібні приведеним в таблиці, відображають вплив на деяку величину випадкових обставин, називаються статистичними рядами.

Із статистичних рядів утворюється статистична сукупність. Така сукупність отримується в результаті деякого об'єднання речей або явищ, що представляються параметрами статистичних рядів, в певні класи або групи за певними ознаками. Вся теоретично можлива кількість спостережень називається генеральною сукупністю, а та кількість спостережень, яка здійснена практично, як зазначено вище, називається вибіркою або вибірковою сукупністю.

При цьому ставиться вимога, щоб вибірка найбільшою мірою була схожа на генеральну сукупність. Таку вибірку називають репрезентативною, тобто представляючою генеральну сукупність. Тільки в цьому випадку є підстава прийняти відносну частоту близької до ймовірності досліджуваної події.

6.1. Середнє арифметичне

Однією з основних статистичних характеристик досліджуваних величин є середнє арифметичне.

Якщо в даній серії дослідів набуті значення спостережених величин $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$, то їх середнє арифметичне x буде рівне

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}, \quad (16)$$

або

$$x = \frac{\sum_1^n x_i}{n}, \quad (17)$$

де *n* – кількість всіх досліджуваних величин.

Середнє арифметичне володіє наступними властивостями.

а. Середньоарифметична суми рівна сумі середньоарифметичних

$$\overline{x} = \frac{\sum_1^n (u_i + v_i)}{n} = \frac{\sum_1^n u_i}{n} + \frac{\sum_1^n v_i}{n} = \overline{u} + \overline{v} \tag{18}$$

б. Середньоарифметична суми, в якої один з членів суми є постійною величиною, рівна сумі середнього арифметичного змінної величини і постійної

$$\overline{x} = \frac{\sum_1^n (u_i + a)}{n} = \frac{\sum_1^n u_i}{n} + \frac{a\sum_1^n 1}{n} = \overline{u} + a \tag{19}$$

в. Середньоарифметична суми добутків постійної величини на досліджувані величини рівна добутку цієї постійної на середньоарифметичне досліджуваної величини

$$\overline{x} = \frac{\sum_1^n ax_i}{n} = \frac{a\sum_1^n x_i}{n} = a\overline{x} \tag{20}$$

г. Сума відхилень індивідуальних значень ознаки досліджуваних величин від їх середнього арифметичного рівна нулю

$$\sum_1^n (x_i - \overline{x}) = \sum_1^n x_i - \sum_1^n \overline{x} = \sum_1^n x_i - \overline{x}\sum_1^n 1 =$$

$$= \sum_1^n x_i - \overline{x}n = \sum_1^n x_1 - n\frac{\sum_1^n x_i}{n} = \sum_1^n x_i - \sum_1^n x_i = 0 \tag{21}$$

д. Сума квадратів відхилень від середнього арифметичного менша, ніж сума квадратів відхилень від будь-якої іншої кількості досліджуваної величини

$$\sum_1^n (x_i - \overline{x})^2 < \sum_1^n (x_i - a)^2 \tag{22}$$

Дійсно, оскільки

$$\sum_1^n (x_i - \overline{x})^2 = \sum_1^n x_i^2 - 2\sum_1^n x_i\overline{x} + \sum_1^n \overline{x}^2 =$$

$$= \sum_1^n x_i^2 - 2\overline{x}\sum_1^n x_i + \overline{x}^2\sum_1^n 1 = \sum_1^n x_i^2 - 2\overline{x}n\frac{\sum_1^n x_i}{n} + n\overline{x}^2;$$

$$\sum_1^n (x_i - a)^2 = \sum_1^n x_i^2 - 2\sum_1^n ax_i + \sum_1^n a^2 =$$

$$= \sum_1^n x_i^2 - 2a\sum_1^n x_i + a^2\sum_1^n 1 = \sum_1^n x_i^2 - 2an\frac{\sum_1^n x_i}{n} + na^2$$

I

Оскільки

$$\frac{\sum_{1}^{n} x_i}{n} = \overline{x},$$

то можемо записати

$$\sum_{1}^{n} x_i^2 - 2n\overline{x}^2 + n\overline{x}^2 < \sum_{1}^{n} x_i^2 - 2an\overline{x} + na^2$$

Звідси

$$-\overline{x}^2 < -a(2\overline{x} - a) \text{ або}$$

$$0 < (x-a)^2$$

що і вимагалося встановити.

6.2. Середня зважена

У тому випадку, коли між досліджуваними величинами є однакові величини, що кілька разів повторюються, середнє значення цих величин визначається за так званою середньою зваженою, яка виражається рівнянням:

$$\overline{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 + \ldots + n_S x_S}{n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_S}, \tag{23}$$

Або

$$\overline{x} = \frac{\sum_{1}^{S} n_i x_i}{\sum_{1}^{S} n_i}, \tag{24}$$

де n_i – кількість повторень однакових значень досліджуваних величин.

Зазначимо, що в практиці для обчислення середньої зваженої дуже часто користуються таким виразом

$$\overline{x} = a + \frac{\sum_{1}^{S} n_i (x_i - a)}{\sum n_i}, \tag{25}$$

де a – довільне число, яке підбирають так, щоб різниці $x_1 - a$, $x_2 - a$ і т.д. були якомога меншими.

6.3. Середня для середніх арифметичних

Середня для середніх арифметичних є середньо зваженою з часткових середніх і обчислюється за формулою

$$\overline{x} = \frac{n_1 \overline{x}_1 + n_2 \overline{x}_2 + n_3 \overline{x}_3 + \ldots + n_S \overline{x}_S}{n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_S}, \tag{26}$$

де $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \ldots \overline{x}_S$ – часткові середні;

$n_1, n_2, n_3, \ldots n_S$ – числа повторень часткових середніх.

6.4. Математичне очікування середнього значення випадкових величин

При вивченні багатьох випадкових подій виникає необхідність в тому, щоб визначити середнє значення випадкової величини за наявності закону розподілу ймовірності.

Таке середнє значення випадкової величини носить назву «математичне очікування випадкової величини».

Нехай величина x приймає $x_1, x_2, x_3, \ldots x_i$ дискретних значень. Частота кожного з цих значень величини x нехай буде рівна $p_1, p_2, p_3, \ldots p_i$ (рис. 1).

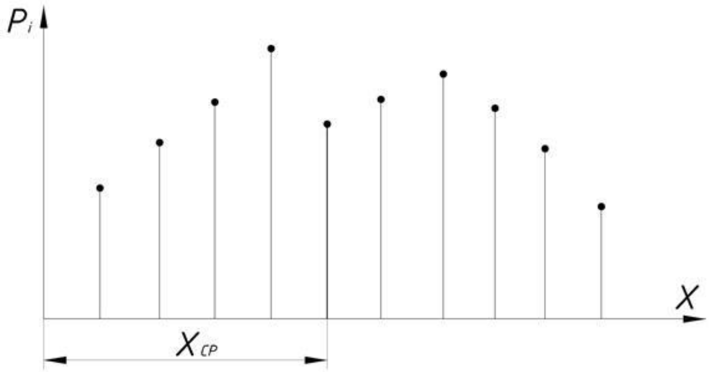

Рисунок 1 – Частота дискретних значень величини x

Тоді середнє значення випадкової величини можна обчислити за рівнянням

$$x_{cp} = \frac{p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + \ldots + p_ix_i}{p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_i} = \frac{\sum_0^n p_ix_i}{\sum_1^n p_i} \tag{27}$$

Але оскільки

$$\sum_1^n p_i = 1$$

то отримаємо

$$x_{cp} = \sum_1^n p_ix_i \tag{28}$$

Таким чином, для того, щоб визначити математичне очікування середнього значення випадкової величини, достатньо просумувати добутки часткових значень випадкової величини на їх частоти.

Зазначимо, що дискретними випадковими величинами називаються такі величини, які можуть приймати лише кінцеву множину значень. Ті ж величини, які можуть приймати будь-які значення в межах відомого інтервалу, називаються безперервними.

Порівняння обчислень за формулами (26) і (27) показує наскільки середня близька до математично очікуваного середнього.

6.5. Функція розподілу

Функція розподілу – це диференціальна крива розподілу, густина розподілу й інтегральна крива розподілу.

Якщо по осі абсцис відкласти значення досліджуваних величин, а по осі ординат їх ймовірність або частоту, то одержимо діаграму, що характеризує зміни ймовірності досліджуваної величини (рис. 2).

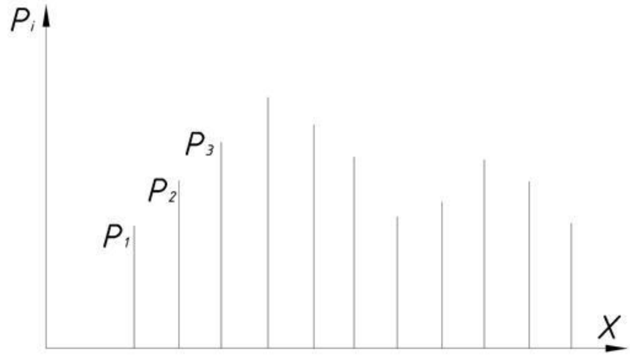

Рисунок 2 – Діаграма частоти досліджуваних величин

Причому, якщо випадкова величина має кінцеві дискретні значення, то графік матиме вигляд гребінки.

Безліч чисел (частот) pi необхідно при цьому підпорядкувати умові

$$\sum_{1}^{n} p_i = 1 \qquad (29)$$

оскільки сума всіх ймовірностей рівна одиниці. Якщо ж значення досліджуваних величин безперервно змінюється, то значення ймовірності приймає вигляд безперервного спектру (рис.3). Замість гребінки кінці відкладених значень ймовірностей утворюють в цьому випадку суцільну криву лінію (криву розподілу).

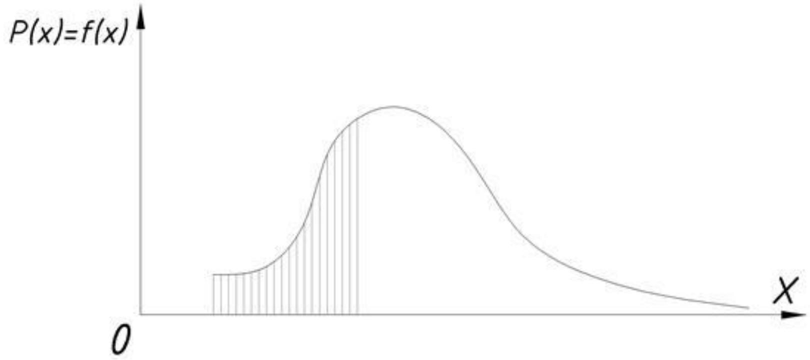

Рисунок 3 – Крива розподілу досліджуваних величин

Ця крива може мати різний характер залежно від характеру розподілу ймовірностей.

Для характеристики випадкової величини, що змінюється безперервно, користуються поняттям густини ймовірності р(х) і поняттям функції розподілу ймовірностей.

Під щільністю ймовірності розуміють границю відношення ймовірності випадкової величини Х, яка знаходиться в межах $x \le X < x + \Delta x$, до величини інтервалу Δх при $\Delta x \to 0$ (рис. 4), тобто

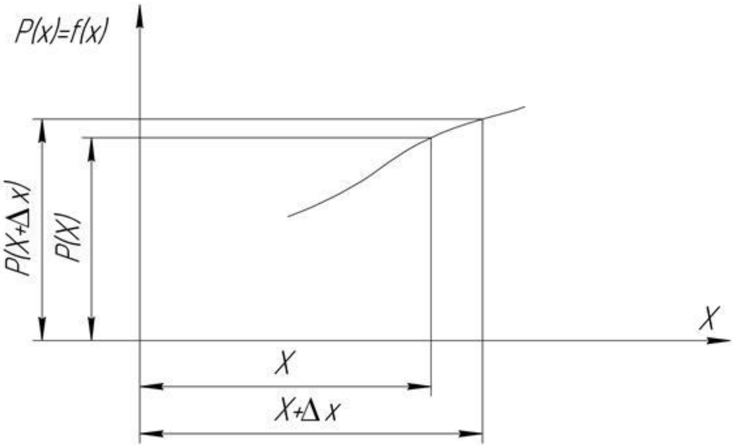

Рисунок 4 – Графічне зображення щільності ймовірності

$$f(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}P\left\{x\le X<x+\Delta x\right\}. \tag{30}$$

Густина ймовірності показує, яку питому вагу займає та або інша частина досліджуваних величин. При цьому також повинна мати місце умова

$$\sum_{-\infty}^{\infty} f(x)\Delta x=1 \tag{31}$$

оскільки сума всіх ймовірностей рівна одиниці.
Якщо ймовірність випадкової величини є безперервною функцією від досліджуваної величини *x*, то густина ймовірності виразиться як похідна від деякої, функції P(x) (функції розподілу) по *x*

$$p(x)=f(x)=\frac{dP(x)}{dx} \tag{32}$$

Умова (32) запишеться в цьому випадку так

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1 \tag{33}$$

Через це криву, яка зображує закон зміни густини ймовірності, називають диференціальною кривою розподілу ймовірності.

Під функцією розподілу ймовірності розуміють функцію, яка визначає ймовірність того, що випадкова величина x при випробуванні прийме значення, менше або рівне відносно змінного дійсного числа *x*.

Якщо випадкова величина є дискретною, то функцію розподілу легко визначити для кожного значення x шляхом додавання ймовірності тих значень, які лежать ліворуч від точки *x*.

Якщо випадкова величина змінюється безперервно, то функція розподілу визначається шляхом інтегрування ймовірностей вказаних значень x. Оскільки в цьому випадку значення ймовірностей виражаються щільністю ймовірностей, то функція розподілу ймовірностей знаходиться як визначений інтеграл від густини ймовірності

$$P(x) = \int_{a}^{xB} f(x)dx \quad . \tag{34}$$

Цей інтеграл є площею, що знаходиться між віссю х в межах від ха до хв, ординат, що зображають ймовірність значень при $x=x_a$ і $x=x_b$, і кривої щільності розподілу ймовірності (рис. 5).

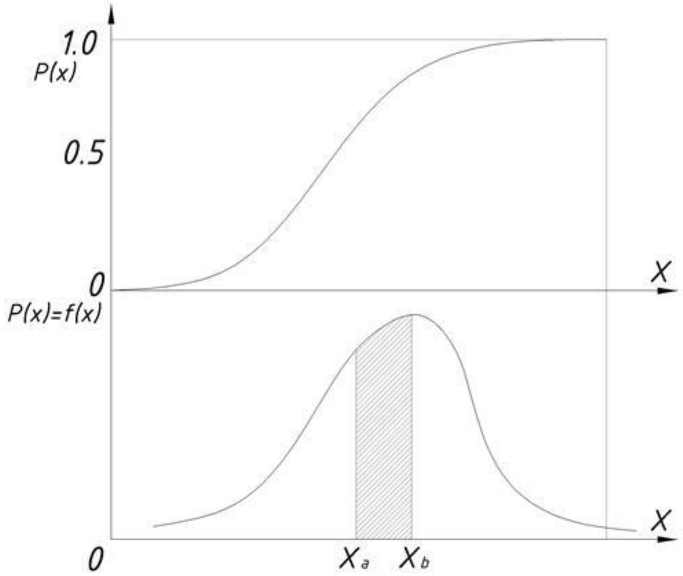

Рисунок 5 – Функція розподілу ймовірностей

Якщо інтегрування здійснюється за всією площею, то матимемо

$$P(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \tag{35}$$

оскільки сума всієї ймовірності рівна одиниці.

Крива, яка зображує зміну функції розподілу, носить назву інтегральної кривої розподілу.

Оскільки ймовірність є величиною додатньою, то функція розподілу завжди зростає при зростанні значення *х* (рис. 5).

Таким чином, ймовірність того, що випадкова величина х прийме значення, що лежить між заданими числами x_a і xb, рівна площі області, обмеженої кривою, віссю х і ординатами, що проходять через точки x_a і xb.

6.6. Квантілі

При описі безперервного розподілу часто використовуються так звані квантілі. Квантілем, що відповідає заданому рівню ймовірності *p*, називають таке значення х=хр, при якому функція розподілу приймає значення, рівне *p*

$$f(x_p) = p$$

Деякі квантілі одержали особливі назви.

а) МОДА. Квантіль, що виражає найбільш ймовірніше значення досліджуваної величини х = хм, називається модою. Інакше кажучи, мода відповідає максимуму на диференціальній кривій розподілу (кривій щільності ймовірності) (рис. 6).

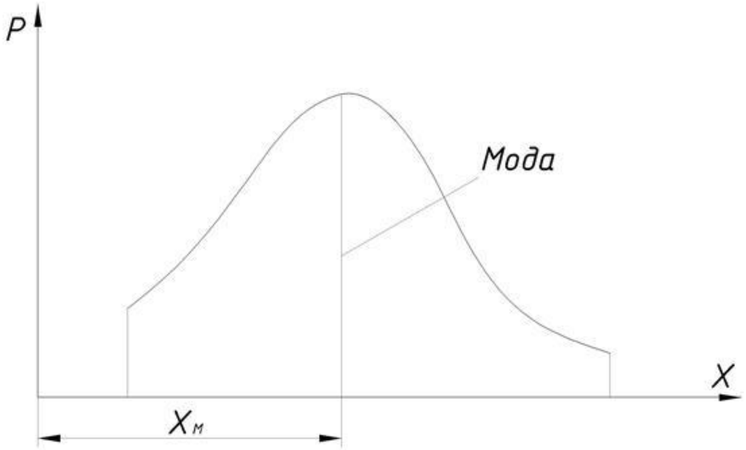

Рисунок 6 – Зображення моди на диференціальній кривій розподілу

б) МЕДІАНА. Квантіль, що відповідає значенню функції розподілу, рівної 1/2, називається медіаною, 1/4 – нижнім і 3/4 верхнім квантілями, (рис. 7).

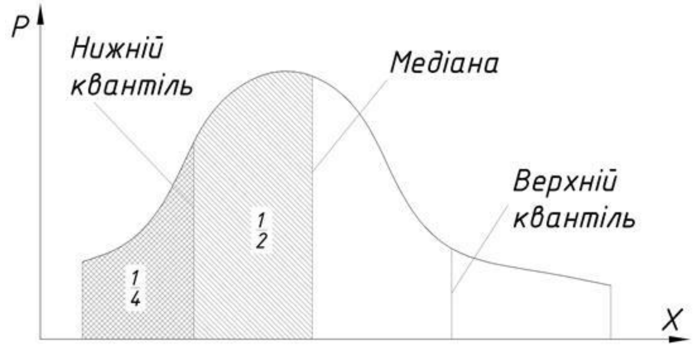

Рисунок 7 – Зображення медіани на диференціальній кривій розподілу

Якщо крива густини ймовірності симетрична, то мода і медіана співпадають.

6.7. Розсіювання і мінливість випадкових величин

Під розсіюванням розуміють міру відмінності випадкової величини від середнього її значення. Розсіювання вказує на більшу або меншу ступінь мінливості величини і вимірюється середнім квадратом відхилень досліджуваних значень величини від їх середньої або квадратним коренем з середнього квадрата.

Середній квадрат відхилень x називається дисперсією і позначається через σ_2

$$\sigma^2 = \frac{n_1(x_1-\bar{x})^2 + n_2(x_2-\bar{x})^2 + n_3(x_3-\bar{x})^2 + \ldots + n_S(x_S-\bar{x})^2}{n_1+n_2+n_3+\ldots+n_S} \quad (36)$$

або

$$\sigma^2 = \frac{\sum_1^S n_i(x_i-\bar{x})^2}{\sum_1^S n_i} \quad (37)$$

Корінь квадратний з диспепсії, взятий з додатним знаком, називається стандартом або середнім квадратичним відхиленням і позначається через σ:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{1}^{S} n_i (x_i - \overline{x})^2}{\sum_{1}^{S} n_i}}$$
(38)

Дисперсія і середнє квадратичне відхилення володіють наступними важливими властивостями.

а. Обидві ці величини характеризують ступінь розсіяння або мінливості; чим більша дисперсія або середнє квадратичне відхилення деякої величини, тим більше розсіяні біля середнього її значення, тобто тим більше вона мінлива.

б. Середнє квадратичне відхилення має розмірність тієї величини, для якої воно обчислене.

в. Для сукупності дослідів n_1, n_2, n_3 при значенні середніх $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3$ і дисперсії $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2$ загальна дисперсія рівна

$$\sigma^2 = \frac{n_1\sigma_1^2 + n_2\sigma_2^2 + n_3\sigma_3^2}{n} + \frac{n_1(x_1 - \overline{x})^2 + n_2(x_2 - \overline{x})^2 + n_3(x_3 - \overline{x})^2}{n}, \qquad (39)$$

де $\overline{x}$ – загальна середня;

$$n = n_1 + n_2 + n_3.$$

6.8. Коефіцієнт варіації або мінливості

При обробці результатів досліджень часто виникає необхідність порівняти мінливість різнорідних величин, наприклад, глибини ходу сошника і тягові його опору в залежності від швидкості руху. Для такого порівняння дисперсія і середнє квадратичне відхилення непридатні, оскільки вони самі в цьому випадку є різнорідними величинами. Для цього потрібна відокремлена міра мінливості, незалежна від одиниць вимірювання порівнюваних величин. В якості такої міри приймається коефіцієнт варіації або мінливості v, рівний середньому квадратичному відхиленню, поділеному на середнє. Як правило, коефіцієнт варіації виражається в процентах

$$v = 100\frac{\sigma}{\overline{x}}. \qquad (40)$$

Якщо, наприклад в одному випадку

$$\sigma_1 = 2,\ \overline{x}_1 = 5,$$

а в іншому

$$\sigma_1 = 0.5,\ \overline{x}_2 = 2,$$

то одержимо

$$v_1 = 40,\ v_2 = 25.$$

Звідси бачимо, що мінливість другого показника нижча мінливості першого показника.

6.9. Череднє квадратичне відхилення середньої або середня помилка

При повторних обчисленнях середні виявляться неоднаковими. Тому необхідно знати яку ми робимо помилку, коли дані середні приймаємо за дійсні середні.

Середня з середніх буде рівна

$$M_{CP} = \frac{M_{1CP} + M_{2CP} + M_{3CP} + \ldots + M_{nCP}}{n} \tag{41}$$

Отже, помилки будуть рівні

$$M_{1CP} - M_{CP};\ M_{2CP} - M_{CP};\ M_{3CP} - M_{CP}\ i\,m.\partial.$$

Але всіх середніх немає, тому і помилки не можуть бути визначені. Зате є квадратичні відхилення від середнього арифметичного.

$$\sigma_1^2 = (M_1 - M_{CP.a})^2;\ \sigma_2^2 = (M_2 - M_{CP.a})^2\ \ i\,m.\partial.$$

Тому замість обчислення похибки за різницями

$(M_{1CP} - M_{CP}),\ (M_{2CP} - M_{CP})$ і т. д.

можна приблизно обчислити похибки за квадратичними відхиленням σ_1, σ_2 і т. д.

Середня похибка при цьому буде рівна

$$m = \sqrt{\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \ldots + \sigma_n^2}{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{42}$$

Очевидно, що чим менша середня похибка, тим точніший отриманий результат, тобто тим вища його достовірність. Якщо при виконанні певної серії дослідів одержано різне і при тому сильно відмінне одне від іншого, значення середньої похибки, то це вказує на те, що порівнювати одержані результати між собою неможливо. Досліди в цьому випадку необхідно повторити, добиваючись отримання більш точних результатів.

7. Характерні функції і густина розподілу ймовірності

7.1. Рівномірний розподіл

В цьому випадку випадкова величина х показує всі значення інтервалу (а – b) з однаковою густиною ймовірності (рис. 8).

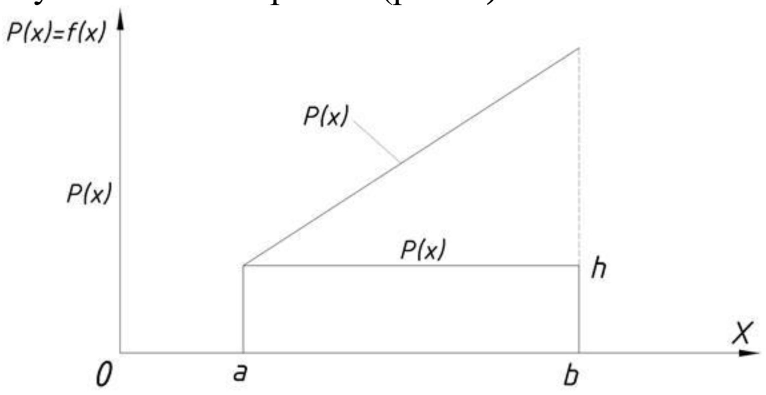

Рисунок – 8.

Крива густини ймовірності є ступінчастою лінією

$$p(x) = f(x) = \begin{cases} h \text{ для } a \le x < b \\ 0 \text{ для } x < a \ i \ x \ge b \end{cases} \tag{43}$$

Причому, оскільки сума всіх ймовірностей рівна одиниці, тобто

$$\sum_{1}^{n} p_i = 1$$

і в нашому випадку

$$\sum_{1}^{n} p_i = h(b-a) = 1,$$

то

$$f(x) = h = \frac{1}{b-a} = const.$$

Функція розподілу ймовірностей *P(x)* відобразиться в цьому випадку прямою лінією.

7.2. Нормальний розподіл

Густина нормального розподілу виражається функцією

$$f(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 (x-a)^2} \tag{44}$$

і носить назву розподілу Лапласа або розподілу Гауса.

Крива щільності розподілу ймовірності має вигляд дзвоноподібної симетричної кривої, що має максимум в точці $x = a$, яку називають центром розподілу, і асимптотично наближається до нуля при $(x) \to \infty$. При великих значеннях параметра *h* крива круто падає і швидко наближається до осі *x*. При малих значеннях *h* крива поблизу максимуму більш полога і підходить до осі *x* повільніше (рис. 9).

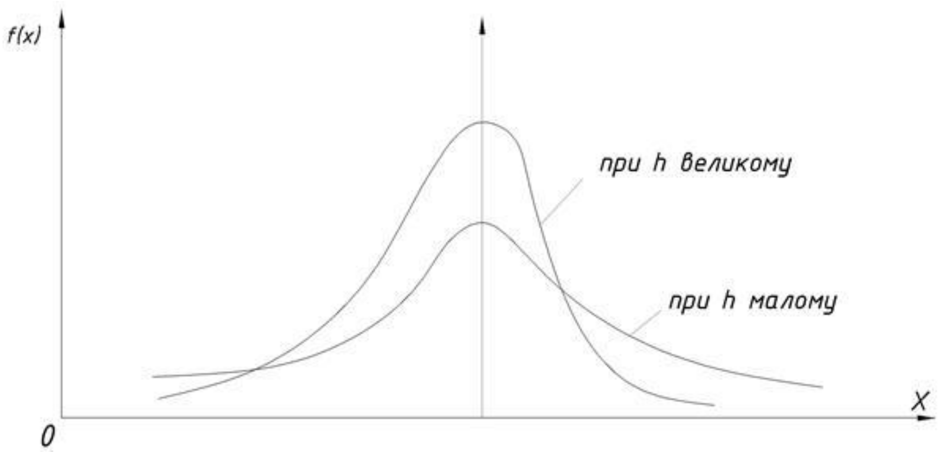

Рисунок 9 – Крива нормального розподілу

При цьому очевидно, що функція нормального розподілу повинна бути нормованою, тобто повинна дотримуватися умова

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

Дійсно

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2(x-a)^2}dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-1^2}dt =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt$$

,

де $t^2 = h^2(x-a)^2$.

Отриманий інтеграл носить назву інтеграла Пуассона.

Оскільки

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

то

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt = 1,$$

що і вимагалося встановити.

Нормальний розподіл виконує першорядну роль в математичній статистиці. Йому підкоряються багато випадкових величин масових явищ.

При нормальному характері розподілу випадкової величини найбільш ймовірніше значення цієї величини співпадає з середнім арифметичним даних спостережень – *a*.

Параметр *h* в цьому випадку рівний

$$h = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}},$$

де σ – середнє квадратичне відхилення.

Тому густину ймовірності нормального розподілу можна записати так:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \qquad (45)$$

де *x* – дане значення досліджуваної величини;

a – середнє арифметичне досліджуваної величини $(a = \bar{x})$.

Характерною особливістю нормального розподілу є те, що ймовірність або частота значень *x*, що знаходяться в межах від *a* – 3σ до *a* + 3σ (рис. 10) складає 0,997, тобто близька до одиниці, а лише 0,003 ймовірності лежить за межами цієї величини.

Інтегральна крива *P(x)* функції нормального розподілу має вигляд кривої, приведеної на рис. 10.

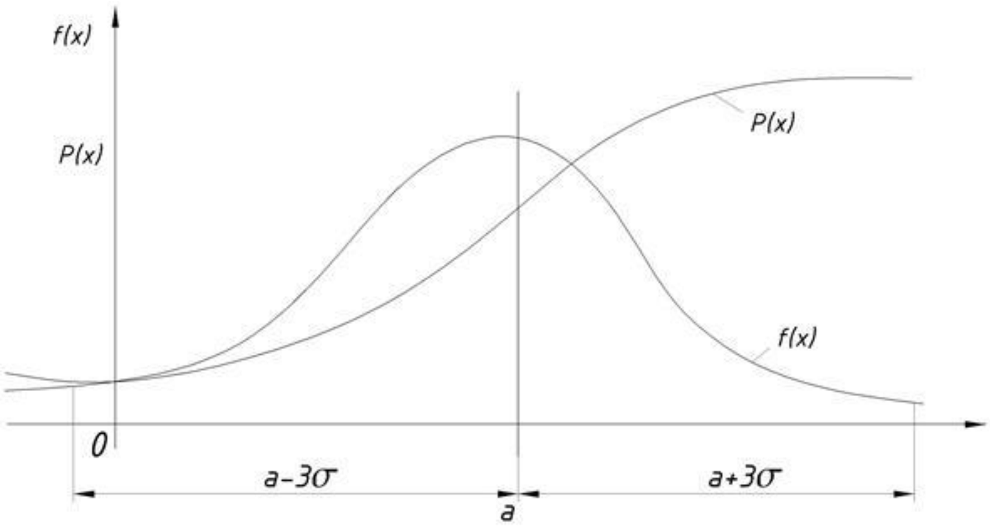

Рисунок 10 – Межі кривої нормального розподілу

7.3. Розподіл Коші

Щільність ймовірності цього розподілу виражається формулою

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{h}{1+h^2x^2}. \tag{46}$$

Ця функція має максимум в точці x=0 і асимптотично наближається до нуля при $x \to \infty$ (рис. 11).

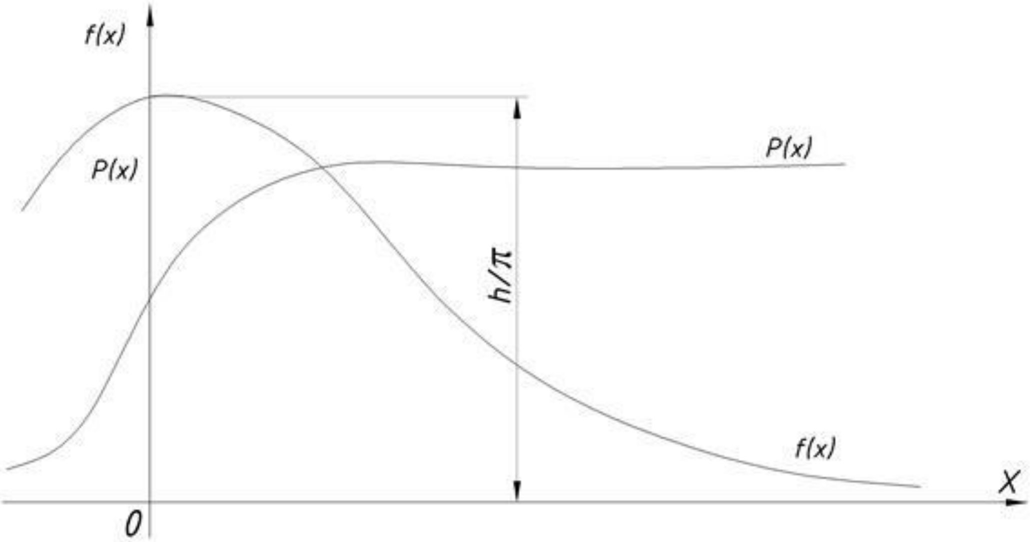

Рисунок – 11 – Щільність ймовірності розподілу Коші

Інтегральна крива функції розподілу *P(x)* тут має вигляд кривої, приведеної на рис. 11.

7.4. Розподіл Пуассона

Густина ймовірності цього розподілу має вигляд

$$f(x) = \frac{a^x e^{-a}}{x!}, \tag{47}$$

де *a* – середнє значення випадкової величини, *a*;
x – досліджуване значення цієї величини.

Застосовується при обробці даних з малим значенням ймовірностей.

7.5. Розподіл Шарлье

Розподіл Гауса є симетричним. В практиці дуже часто мають місце розподіли частот несиметричного характеру, коли частота в одну сторону зменшується швидше, ніж в іншу. До таких розподілів відноситься вищенаведений розподіл Пуассона, а також розподіл Шарлье.

Густина ймовірності розподілу Шарлье має такий вигляд:

$$f(x)=\frac{nh}{\sigma}Z_t\left[1+\frac{K}{6}(t^3-3t)+\frac{E}{24}(t^4-6t^2+3)\right], \qquad (48)$$

де h – величина класу (інтервалу);

σ – середнє квадратичне відхилення;

$$t=\frac{x-\bar{x}}{\sigma};$$

$$Z_t=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}},$$

x – досліджуване значення величини;

$\bar{x}$ – середнє значення досліджуваної величини;

$$K=\frac{1}{n\sigma^3}\sum n_x(x-\bar{x})^3;$$

$$E=\frac{1}{n\sigma^4}\sum n_x(x-\bar{x})^4-3,$$

n_x – кількість досліджуваних величин з даним показником і;

n – кількість всіх величин.

Якщо, наприклад, розподіл Шарлье застосовується для встановлення розподілу терміну служби електричних лампочок, то:

x – строк служби лампочок в годинах;

h – інтервал часу, за яким класифіковані лампочки за часом служби, наприклад, 0 – 5 годин, 50 – 100 годин, 100 – 150 годин і т. д.;

n_x – кількість лампочок, що перегоріли до даного терміну;

n – кількість всіх лампочок;

x – середній термін служби лампочок;

σ – середнє квадратичне відхилення.

7.6. Розподіл біноміальний

Як випадкова величина може бути частота, з якою може з'являтися подія при повторенні випробувань. Побудуємо для неї диференціальну функцію розподілу. Така функція має вигляд:

$$p_m=C_n^m p^m q^{n-m}, \qquad (49)$$

де

$$q=1-p,\ C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}$$

p – ймовірність події; *m* – кількість разів здійснення даної події при проведенні *n* випробувань.

Такий розподіл називається біноміальним внаслідок того, що p^m формально є *m*-й член бінома $(p + q)^n$.

Задачу, що вирішується біноміальним розподілом можна сформулювати так: якщо при кожному випробуванні ймовірність події є *p*, то ймовірність того, що при *n* випробуваннях ця подія здійсниться *m* раз, рівна

$$C_n^m p^m q^{n-m}$$

7.7. Гіпергеометричний розподіл

Даний розподіл ймовірності виражається рівнянням

$$p_m = \frac{n(n-1)...(n-m+1)pN(pN-1)...(pNm+1)}{m!(qN-n+1)...(qN-n+m)} p_0 , \qquad (50)$$

де

$$p_0 = \frac{qN...(qN-n+1)}{N...(N-n+1)}$$

При цьому розв'язується, наприклад, така задача: з якою ймовірністю p^m з'явиться біла кулька при *n* вийманнях з урни при тій умові, що вийнята кулька в урну не повертається.

Згідно позначень: *N* – кількість всіх кульок в урні, *n* – кількість виймань кульок, *Np* – загальна кількість білих кульок, *m* – кількість вибраних білих кульок, *n* - *m* – кількість вибраних чорних кульок з числа всіх чорних *N* – *Np*. *P* – ймовірність вийняти білу кульку, *q = 1 – P*.

При великому значенні *N*

$$p_m = C_n^m p^m q^{n-m} \left[1 + \frac{1}{2N} \left(n^2 - \frac{m^2}{P} - \frac{(n-m)^2}{q} \right) \right] \qquad (51)$$

При $N \to \infty$ це рівняння приймає вигляд біноміального розподілу (49).

За аналогією з цією задачею можуть розв'язуватися подібні задачі виробничого значення.

7.8. Розподіл швидкостей молекул газу (формула Максвела)

Цей розподіл має вигляд:

$$f(v) = \frac{4h^3}{\sqrt{\pi}} v^2 e^{h^2 v^2}; \ (h = const) , \qquad (52)$$

де *v* –- швидкість молекули газу.

7.9. Розподіл швидкостей молекул газу (формула Максвела - Больцмана)

$$f(v) = \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\frac{m}{KT} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{m}{2KT} v^2} , \qquad (53)$$

де K – постійна Больцмана, рівна $1.37 \cdot 10^{-6} \frac{ерг}{град}$;
m – маса газу;
T – температура газу.

Формули (52) і (53) виражають закон розподілу ймовірності швидкості руху молекули в просторі.

Як зазначено вище, при обробці результатів досліджень можуть мати місце різні форми кривих функцій і густини розподілів.

Деякі з таких кривих були одержані англійським біологом Пірсоном і одержали назву кривих розподілу Пірсона (табл. 2).

Таблиця 2 – Закон розподілу ймовірностей

№ з/п	Закон розподілу ймовірностей (рівняння кривої щільності ймовірності)	Інтервали x	
		від	до
1	$f(x) = (a+x)^m (b-x)^n$	- a	b
2	$f(x) = (a+x)^m (b-x)^n$	b	∞
3	$f(x) = (x+a)^m e^{-kx}$	- a	∞
4	$f(x) = (x+a)^m$	- a	0
5	$f(x) = (a^2+x^2) - me^{-varctg\frac{x}{2}}$	- ∞	∞
6	$f(x) = (a^2+x^2)^{-m}$	- ∞	∞
7	$f(x) = x^{-m} e^{-\frac{v}{x}}$	0	∞
8	$f(x) = e^{-v^2}$	0	∞
9	$f(x) = e^{-k^2x^2}$	- ∞	∞

8. Статистичні зв'язки

8.1. Поняття про статистичний зв'язок

Однією з важливих задач досліджень є встановлення зв'язків між кількісними і якісними ознаками явищ, що вивчаються. У багатьох випадках ці зв'язки не є такими точними і визначеними як, наприклад, в механіці. Оскільки у багатьох випадках вказані ознаки обумовлені численними випадковими причинами, то вони не є різко вираженими і є в тому або іншому ступені наближеними. Такі зв'язки називаються статистичними.

При статистичних зв'язках одна з величин реагує на зміни іншої зміною свого закону розподілу. Такий зв'язок носить ще назву стохастичної ймовірності. Стохастичний зв'язок появляється тоді, коли є загальні випадкові фактори разом з іншими неоднаковими для обох величин випадковими факторами.

Розділ математичної статистики, який вивчає стохастичні зв’язки між випадковими величинами, називається теорією кореляцій.

Задача цього розділу полягає в тому, щоб встановлювати межі, в яких з наперед заданою надійністю знаходитиметься величина, що нас цікавить, якщо інші, пов'язані з нею величини, набувають певних значень. Так, наприклад, нас може цікавити як змінюється вага зерна залежно від того або іншого його розміру, як впливає ступінь калібрування насіння кукурудзи на точність висіву і т.д.

Найбільш простим і практично найважливішим стохастичним зв'язком, що допускає числову характеристику, є кореляційна залежність, коли одна з величин реагує на зміну іншої змінами свого математичного очікування.

8.2. Лінійна кореляційна залежність

Показником лінійної кореляційної залежності двох випадкових величин служить коефіцієнт кореляції, що визначається співвідношенням

$$r = \frac{C_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}, \qquad (54)$$

де

$$C_{xy} = \frac{\sum n_{xy}(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{n}$$

σ_x і σ_y – середнє квадратичне відхилення випадкових величин;
n_{xy} – частота деякої пари значень x і y;
n – загальна кількість досліджень;
$x-\bar{x}$ і $y-\bar{y}$ – відхилення значень x і y від їх середніх $\bar{x}$ і $\bar{y}$.

При цьому для зручності значення σ_x і σ_y можна обчислювати за формулами

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\Sigma n_x x}{n} - x^{-2}}, \qquad \sigma_y = \sqrt{\frac{\Sigma n_y y}{n} - y^{-2}}$$

в яких n_x і n_y означають частоти відповідних значень x і y.

Вираз C_{xy} називається коваріацією.

Якщо досліджувані ознаки знаходяться між собою в прямолінійній залежності, то користуючись коефіцієнтом кореляції і середніми квадратичними відхиленнями ознак, можна написати рівняння цього зв'язку. Це рівняння має вигляд

$$\bar{y}_x - \bar{y} = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\bar{x}), \qquad (55)$$

де $\bar{y}_x$ – позначає часткову середню значення y, що відповідає заданому значенню x;

$\bar{y}$ і $\bar{x}$ середні арифметичні.

Рівняння (55) показує, що відхилення часткових середніх значень у від їх загальної середньої пропорційні відповідним відхиленням величини *x* від її середньої.

Коефіцієнт пропорційності при цьому рівний

$$S_y = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x} \tag{56}$$

і називається коефіцієнтом регресії *y* на *x*.

Рівняння (55) називають рівнянням регресії *y* на *x*. Це рівняння в загальному вигляді можна записати так

$$\bar{y}_x = ax + b \tag{57}$$

припустивши

$$r\frac{\sigma_y}{\sigma_x} = a \ і - \left(r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\bar{x} - \bar{y} \right) = b$$

Якщо статистичний зв'язок *x* і *y* не є точним прямолінійним кореляційним зв'язком, то часткові середні будуть наближеними часткових середніх, що відповідають заданим значенням *x*.

8.3. Властивості коефіцієнта кореляції

а. Значення коефіцієнта кореляції завжди знаходиться між -1 і +1.

б. В тому випадку коли $r = \pm 1$ величини *x* і *y* зв'язані між собою точним прямолінійним зв'язком вигляду

$$y = ax + b;$$
$$x = cy + d.$$

в. Коли $r = 0$, то це значить, що між x і y відсутній кореляційний зв'язок, але криволінійна може існувати, тобто якщо $r = 0$, то часткові середні $\bar{y}_x$ або не змінюються із зміною *x*, або змінюються але не за прямолінійним законом.

г. Чим ближчий r до +1 або до -1, тим точніше і тісніше прямолінійний кореляційний зв'язок між x і y. Якщо *r* наближається до 0, то цей зв'язок слабшає.

8.4. Криволінійні статичні зв'язки

Мірою сили нелінійного кореляційного зв'язку між двома величинами служить співвідношення

$$\eta_y = \frac{\sigma(\bar{y}_x)}{\sigma_y}, \tag{58}$$

$$\sigma(\bar{y}_x) = \sqrt{\frac{1}{n}\sum n_x(\bar{y}_x - \bar{y})^2} \tag{59}$$

де $\bar{y}_x$ – часткові середні біля загального середнього значення $\bar{y}$.

8.5. Основні властивості нелінійного кореляційного зв'язку

а) Кореляційне відношення (58) завжди додатне і знаходиться між 0 і 1.

б) Кореляційне відношення (58) завжди не менше числового значення відповідного коефіцієнта кореляції.

в) Коли $\eta_y = 1$, регресія у на х точно лінійна.

г) Якщо між у і х нема кореляційного зв'язку, то $\eta_y = 0$ і якщо у пов'язано з *x* однозначним зв'язком, то $\eta_y = 1$.

д) Чим η_y ближче до 1, тим кореляційний зв'язок *y* з *x* тісніший, і чим ближче до 0, тим цей зв'язок слабший.

Приклад нелінійної кореляційної залежності (випадок параболічної регресії).

Загальне рівняння параболічної регресії має вигляд:

$$\overline{y}_x = a + bx + cx^2 , \qquad (60)$$

де $\overline{y}_x$ – часткові середні значення *y*, що відповідають різним заданим значенням *x*; *a, b* і *c* – постійні коефіцієнти.

Значення цих постійних, коли залежність між *x* і *y* дана у вигляді кореляційної таблиці, можна знайти з рівнянь одержуваних в результаті застосування методу найменших квадратів.

$$\left.\begin{aligned} na + b\Sigma n_x x^2 + c\Sigma n_x x^2 &= \Sigma n_x \overline{y}_x \\ a\Sigma n_x x + b\Sigma n_x x^2 + c\Sigma n_x x^3 &= \Sigma n_x x \overline{y}_x \\ a\Sigma n_x x^2 + b\Sigma n_x x^3 + c\Sigma n_x x^4 &= \Sigma n_x x^2 \overline{y}_x \end{aligned}\right\} \qquad (61)$$

Вирішивши ці рівняння відносно *a, b і c* та підставивши значення останніх в (60), одержимо необхідне рівняння параболічної регресії з числовими коефіцієнтами.

Оцінка параболічної регресії здійснюється за допомогою параболічного коефіцієнта регресії

$$R = \frac{\sigma(\overline{y}_x)}{\sigma_y} ,$$

де σ_y – середнє квадратичне відхилення,

$$\sigma(\overline{y}_x) = +\sqrt{\frac{1}{n}\Sigma n_x (\overline{y}_x - \overline{y})^2}$$

$\overline{y}_x$ – значення, обчислене за рівнянням (60);

$\overline{y}$ – значення загальної середньої.

Чим ближче значення *R* до одиниці, тим тісніший зв'язок *y* з *x* і чим ближче до 0, тим цей зв'язок слабший.

9. Статистична перевірка гіпотез

При розробці тих або інших наукових проблем виходять з яких-небудь припущень, правильність яких ще не доведена.

Такі припущення називають гіпотезами. Задача теоретичного і експериментального дослідження полягає в тому, щоб висунуту гіпотезу довести або спростувати.

У багатьох випадках такі гіпотези відносяться до явищ, обумовлених випадковими факторами, тобто тими що мають статистичний характер.

Але дані статистичного характеру вимагають наявності великої кількості спостережень (дослідів). Для виконання такої великої кількості спостережень (дослідів) потрібні великі затрати часу і матеріальних засобів. Тому природно поставити таке питання: чи не можна за певних умов за обмеженою кількістю спостережень (дослідів) робити висновок про достовірність запропонованої гіпотези. Математична статистика дає позитивну відповідь на дане питання.

При вирішенні цієї задачі необхідно опиратися на аналогічну статистичну схему подібного роду явищ, статистичні характеристики яких відомі.

Дана задача розв'язувалась би досить просто, якби ми мали в своєму розпорядженні значення середнього арифметичного (a) випадкового явища, прийнятого як статистична схема, і середнього арифметичного (a_2) випадкового явища, що вивчається нами.

Зіставляючи ці середні арифметичні, можна було б судити про правильність запропонованої гіпотези. Але середнього арифметичного a_2 нема. Тому ми можемо тільки гіпотетично допустити, що генеральні середні рівні між собою $a_1 = a_2 = a$, тобто що який-небудь новий процес, наприклад, рівномірність висіву насіння по довжині ряду новою сівалкою, є такою ж, як і рівномірність висіву, що забезпечується сівалкою, яка раніше застосовувалася.

Припустимо тепер, що були поставлені досліди і при цьому виявилося, що $a_2 \neq a_1$. Через це виникає питання – відрізняється новий процес від старого (чи кращий від нього), тобто чи є розбіжність в середніх арифметичних істотною, такою, яку не можна пояснити лише випадковими обставинами даної вибірки.

Якщо це встановлено, то гіпотетичне припущення про рівність середніх $a_1 = a_2 = a$, необхідно відкинути.

Для встановлення цього користуються, так званим «довірчим інтегралом».

Такий довірчий інтеграл має наступний вигляд:

$$\overline{x} - \varepsilon < x_0 < x + \varepsilon ,$$

де $\overline{x}$ – середнє арифметичне;

x_0 – середнє відхилення (математичне сподівання);

$$\varepsilon = t_\alpha S_x$$

$$S_x = \frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$S = \sqrt{\frac{\Sigma(x_i - \overline{x})^2}{n-1}}$$

Значення t_a обчислюється за спеціальною таблицею при заданій ймовірності і заданій кількості спостережень *n*. Якщо задана ймовірність рівна 0,95 то значення t_a рівні величинам приведених в табл. 5.

Довірчий інтеграл показує, що невідоме значення відхилення середньої лежить в інтервалі

$$a > \bar{x} - \varepsilon;$$

$$a < \bar{x} - \varepsilon.$$

Якщо одержимо, що відхилення середньої нового процесу знаходиться у вказаному інтервалі, то це значить, що немає підстави до того, щоб новий процес вважати відмінним від першого, тобто що одержана розбіжність в значеннях відхилення середніх, обчислених за довірчим інтегралом, і за дійсними дослідженнями, є випадковим і тому немає підстав новий процес вважати досконалішим, ніж старий. Якщо ж відхилення середньої виходить за межі вказаного інтервалу, то це свідчить про те, що відмінність нового процесу від старого не є випадковою. Це говорить про те, що новий процес має переваги або недоліки перед старим.

Таблиця 3.5 – Множина обчислених значень t_a

n-1	t_a	*n-1*	t_a	*n-1*	t_a
1	12.71	12	2.18	23	2.07
2	4.30	13	2.16	24	2.06
3	3.18	14	2.14	25	2.06
4	2.78	15	2.13	26	2.06
5	2.57	16	2.12	27	2.05
6	2.45	17	2.11	28	2.05
7	2.35	18	2.10	29	2.05
8	2.30	19	2.09	30	2.04
9	2.26	20	2.09	40	2.02
10	2.24	21	2.08	60	2.00
11	2.20	22	2.07	120	1.98
				∞	1.96

Ступінь цієї переваги визначиться ступенем розбіжності відхилень від нижнього або верхнього значення вказаного інтервалу.

Статистична перевірка гіпотез заслуговує більшої уваги, оскільки вона дає можливість в значній мірі економити час і засоби, необхідні для проведення експериментальних досліджень. У галузі наукових досліджень, що стосуються, наприклад, механізації сільського господарства, статистична перевірка гіпотез може надати істотну користь при порівняльній оцінці кількісних і якісних показників роботи існуючих і нових конструкцій сільськогосподарських машин, нових технологічних прийомів обробки ґрунту, посіву сільськогосподарських культур, збирання врожаю і інших технологічних процесів.

Зміст звіту

1. Назва роботи.
2. Мета роботи.
3. Розрахунки значень заданих прикладів.
4. Висновки.
5. Література.

Література

1. Кане М.М. Основы научных исследований в технологии машиностроения. – Минск: Высш. Школа, 1987. – 231 с.
2. Селиванов А.И. Артемьев Ю.Н. Теоретические основы ремонта и надежности сельскохозяйственной техники. – М.: Колос, 1978.– 248 с.
3. Михацев С.В., Васильев П.М., Погорелый Л.В. Основы научных исследований. – К., Вища школа, 1985.– 266 с.
4. Статистические методы обработки эмпирических данных. – М.: Издательство Стандартов, 1978.–232 с.
5. Артемьев Ю.Н. Качество ремонта и надежность машин в сельском хозяйстве. – М.: Колос, 1981.– 239 с.