Тема: МАТЕМАТИЧНЕ ПЛАНУВАННЯ ЕКСПЕРИМЕНТІВ З ВИКОРИСТАННЯМ СИМПЛЕКС-МЕТОДУ

Мета: Освоєння методики та набуття практичних навиків по дослідженню процесів оптимізації з використанням симплекс-методу.

Порядок виконання роботи

1. На підставі виданого завдання вивчити теоретичні відомості.
2. Виконати заданий приклад.
3. Скласти звіт по лабораторній роботі.

Теоретичні відомості

Симплексний метод задачі лінійного програмування оснований на пере- ході від одного опорного плану до іншого, при якому значення цільової функції збільшується. Вказаний перехід можливий, якщо відомий який-небудь початковий опорний план. Розглянемо задачу, для якої цей план можна записати.

Нехай необхідно знайти максимальне значення функції

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$$

за умов:

$$x_1 + a_{1m+1} x_{m+1} + \ldots + a_{1n} x_n = в_1$$

$$x_2 + a_{2\,m+1} x_{m+1} + \ldots + a_{2\,n} x_n = в_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_m + a_{mm+1} x_{m+1} + \ldots + a_{mn} x_n = в_m$$

$$x_j \geq 0,\ (j = 1, n).$$

Тут a_{ij}, $в_i$ і c_j - ($i = 1, m$; $j = 1, n$) – задані постійні числа ($m<n$ і $в_i>0$).

Векторна форма даної задачі має такий вигляд: знайти максимум функції

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

За умов:

$$x_1P_1 + x_2P_2 + \ldots + x_mP_m + \ldots + x_nP_n = P_0,$$
$$x_j \geq 0, (j = \overline{1,n}),$$

де

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \cdots; P_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$F_{m+1} = \begin{pmatrix} a_{1m+1} \\ a_{2m+1} \\ \vdots \\ a_{mm+1} \end{pmatrix}; P_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}; P_0 = \begin{pmatrix} в_1 \\ в_2 \\ \vdots \\ в_m \end{pmatrix}.$$

Оскільки

$$в_1P_1 + в_2P_2 + \ldots + в_mP_m = P_0,$$

то за означенням опорного плану $x=(в_1;в_2;\ldots;0;\ldots;0)$ є опорним планом даної задачі. План $x=(в_1;в_2;\ldots;в_n)$ називається опорним планом основної задачі лінійного програмування, якщо система векторів P_j з додатними коефіцієнтами $в_j$, лінійно незалежна. Цей план визначається системою одинич- них векторів P_1, P_2, ..., P_m, які створюють базис m-вимірного простору. Тому кожний з векторів P_1, P_2, ..., P_n а також вектор P_0 можуть бути подані у вигляді лінійної комбінації векторів даного базису. Нехай

$$P_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij}P_i, \ (j = \overline{0,n}).$$

Покладемо: $z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i x_{ij}, \ (j = \overline{1,n}); \ \Delta_j = z_j - c_j, \ (j = \overline{1,n})$.

Оскільки вектори P_1, P_2, ..., P_m – одиничні, то:

$$x_{ij} = a_{ij} \text{ і } z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}, \text{ а } \Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} - c_j.$$

Ознаку оптимальності опорного плану визначають за теоремами:

Теорема 1.

Опорний план $X^*=(x_1^*, x_2^*,..., x_m^*;0;...,0)$ задачі є оптимальним, якщо $\Delta_j \geq 0$ для будь-якого j(j =1,k).

Теорема 2.

Якщо $\Delta_k \le 0$ для деякого j = k і серед чисел a_{ik} ($j=\overline{1,m}$) немає додатних

($a_{ik} \le 0$) , то цільова функція задачі не обмежена на множині її планів.

Теорема 3.

Якщо опорний план X задачі невироджений $\Delta_k \le 0$, але серед чисел a_{ik} є додатні (не всі $a_{ik} \le 0$), то існує опорний план X' такий, що $F(X') \ge F(X)$.

Дослідження опорного плану на оптимальність, а також подальший обчислювальний процес зручно вести, якщо умову задачі і початкові дані отримані після визначення відповідного опорного плану в таблиці 1.

Таблиця 1.

i	Базис	$C_б$	P_0	C_1	C_2	…	C_r	…	C_m	C_{m+1}	…	C_k	…	C_n
				P_1	P_2	…	P_r	…	P_m	P_{m+1}	…	P_k	…	P_n
1	P_1	c_1	$в_1$	1	0	…	0	…	0	a_{1m+1}	…	a_{1k}	…	a_{1n}
2	P_2	c_2	$в_2$	0	1	…	0	…	0	a_{2m+1}	…	a_{2k}	…	a_{2n}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮		⋮	⋮		⋮		⋮
r	P_r	c_r	$в_r$	0	0	…	1	…	…	a_{rm+1}	…	a_{rk}	…	a_{rn}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮		⋮	⋮		⋮		⋮
m	P_m	c_m	$в_m$	0	0	…	0	…	1	a_{mm+1}	…	a_{mk}	…	a_{mn}
$m+1$			F_0	0	0		0			Δ_{m+1}		Δ_k		Δ_n

В стовпці $C_б$ цієї таблиці записують коефіцієнти при невідомих цільової функції, які мають такі ж індекси, що і вектори даного базису. В стовпці P_0 записують додатні компоненти опорного плану, в ньому ж в результаті роз- рахунків отримують додатні компоненти опорного плану. Стовпці векторів P_j являють собою коефіцієнти розкладання цих векторів за векторами даного базису.

В таблиці перші m рядків визначаються даними задачі, а показники (m+1)-ого рядка визначають. В цьому рядку в стовпці вектора P_0 записують значення цільової функції, які вона приймає при даному опорному плані, а в стовпці P_j – значення $\Delta_j = z_j - c_j$.

Значення z_j знаходяться як скалярний добуток вектора P_j ($j = \overline{1, m}$) на вектор $C_б$=(c_1;c_2;...;c_m):

$$z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}, \quad \left(j = \overline{1,n}\right).$$

Значення F_0 дорівнює скалярному добутку вектора P_0 на вектор $C_б$:

$$F_0 = \sum_{i=1}^{m} c_i в_i .$$

Після заповнення таблиці опорний план перевіряють на оптимальність. Для цього переглядають елементи $(m+1)$-ого рядка таблиці. В результаті можуть мати місце такі випадки:

1) $\Delta_j \geq 0$ для $j = m+1, m+2, ..., n$ (при $j = \overline{1, m}$ $z_j = c_j$). Тому в даному випадку числа $\Delta_j \geq 0$ для всіх j від 1 до n;

2) $\Delta_j \leq 0$ для деякого j, і всі відповідні цьому індексу величини $a_{ij} \leq 0$ $(i = \overline{1, m})$;

3) $\Delta_j \leq 0$ для деяких індексів j, і для кожного такого j у крайньому випадку одне з чисел a_{ij} додатне.

Перший випадок є оптимальним. В другому випадку цільова функція не обмежена зверху на множині планів, а в третьому випадку можна перейти до нового опорного плану, при якому значення цільової функції збільшиться. Цей перехід від одного опорного плану до другого відбувається вилученням з базису якого-небудь з векторів, введенням в нього нового вектора.

Як новий можна взяти будь-який з векторів P_j, для якого $\Delta_j \leq 0$. Нехай, наприклад, $\Delta_k < 0$, і введемо в базис вектор P_k.

Для визначення вектора, який належить вилученню з базису, знаходять min $(в_i / a_{ik})$ для всіх $a_{ik} > 0$. Нехай цей мінімум досягається при $i = r$. Тоді з базису вилучають вектор P_r, а число a_{rk} називають елементом розв’язку.

Стовпці, на перетині яких знаходиться елемен розв’язку, називають напрямними.

Після виділення напрямного рядка і напрямного стовпця знаходять новий опорний план, коефіцієнти розкладу векторів P_j через вектори нового базису, відповідного новому опорному плану. Це реалізується методом Жордана-Гаусса. При цьому додатні компоненти нового опорного плану обчи- слюються за формулами:

$$в_i' = \begin{cases} в_i - (в_r / a_{rk}) \cdot a_{ik}, & при \quad i \neq r, \\ в_r \; / a_{rk}, & при \quad i = r, \end{cases}$$

а коефіцієнти розкладу векторів P_j – через вектори нового базису, відповідного новому опорному плану, за формулами:

$$a'_{ij} = \begin{cases} a_{ij} - (a_{rj} / a_{rk}) \cdot a_{ik}, & при \quad i \neq r, \\ a_{rj} / a_{rk}, & при \quad i = r. \end{cases}$$

Метод Жордана-Гаусса полягає в тому, що після приведення відповідної матриці до трикутного вигляду продовжують елементарні перетворення ря- дків останньої до діагональної форми. В результаті за методом Жордана-Гаусса розрахунок відбувається аналогічно способу Гаусса, але розв’язок системи отримується одразу без зворотного ходу (в лівій частині буде оди- нична матриця).

Після знаходження $\text{в}'_i$ і a'_{ij} їх значення заносять в таблицю 2. Елементи ($m+1$) - го рядка цієї таблиці можуть бути визначені за формулами:

$$F'_0 = F_0 - (\text{в}_r / a_{rk}) \cdot \Delta_k,$$
$$\Delta'_j = \Delta_j - (a_{rj} / a_{rk}) \cdot \Delta_k.$$

Наявність двох стовпців знаходження елементів ($m+1$)-ого рядка дозволяє провести контроль правильності проведення розрахунків.

Таблиця 2.

i	Базис	$C_б$	P_0	C_1	C_2	…	C_r	…	C_m	C_{m+1}	…	C_k	…	C_n
				P_1	P_2	…	P_r	…	P_m	P_{m+1}	…	P_k	…	P_n
1	P_1	c_1	в_1	1	0		a'_{1r}		0	a'_{1m+1}		0		a'_{1n}
2	P_2	c_2	в_2	0	1		a'_{2r}		0	a'_{2m+1}		0		a'_{2n}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮		⋮	⋮		⋮		⋮
r	P_r	c_r	в_r	0	0		a'_{rr}		0	a'_{rm+1}		1		a'_{rn}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮		⋮	⋮		⋮		⋮
m	P_m	c_m	в_m	0	0		a'_{mr}		1	a'_{mm+1}		0		a'_{mn}
$m+1$			F_0	0	0					$z'_{m+1} - c_{m+1}$		0		$z'_n - c_n$

З останньої формули маємо, що при переході від одного опорного плану до іншого найбільш раціонально ввести в базис вектор P_j, при якому максимальним за абсолютною величиною є число (в_r / a_{rj}) Δ_j (Δ_j <0, a_{rj} >0). В подальшому вектор, який вводиться в базис, визначати, виходячи з максимальної абсолютної величини від’ємних чисел Δ_j. Якщо таких чисел декілька, то в базис будемо вводити вектор, який має такий же індекс, як і максимальне з чисел C_j, що визначаються даними числами Δ_j (Δ_j <0)

Перехід від одного опорного плану до другого зводиться до переходу від однієї симплекс-таблиці до іншої. Елементи її вираховуються за допомогою рекурентних вище формул за такими правилами:

Правило 1. В стовпцях векторів, які входять в базис, на перетині рядків і стовпців однойменних векторів проставляються одиниці, а всі інші елементи даних стовпців вважають рівними нулеві.

Правило 2. Елементи векторів P_0 і P_j в рядку нової таблиці, в якому записаний век- тор, введений в базис, отримують з елементів цього ж рядка попередньої таблиці діленням їх на величину вирішуваного елемента. В стовпці $C_б$ в рядку вектора, що вводиться, проставляють величину C_k, де k – індекс вирішу- ваного вектора.

Правило 3. Інші елементи стовпців вектора P_0 і P_j нової таблиці обчислюють за пра- вилом трикутника. Для знаходження будь-якого з цих елементів знаходять три числа:

1) число, яке стоїть в даній таблиці на місці шуканого елемента нової таблиці;

2) число, яке стоїть в даній симплекс-таблиці на перетині рядка, в якому знаходиться шуканий елемент нової таблиці, і стовпця відповідного векто- ра, що вводиться в базис;

3) число, яке стоїть в новій таблиці на перетині стовпця, в якому знахо- диться шуканий елемент, і рядка знову введеного в базис вектора (цей ря- док отримується із рядка даної таблиці діленням її елементів на вирішува- ний елемент).

Ці три числа створюють трикутник, дві вершини якого відповідають чи- слам, що знаходяться в даній таблиці, а третя – числу, що знаходиться в но- вій симплекс-таблиці. Для визначення шуканого елемента нової таблиці від першого числа віднімають добуток другого і третього. Після заповнення нової симплекс-таблиці переглядають елементи ($m+1$)- го рядка. Якщо всі $z_j - c_j \geq 0$, то новий опорний план є оптимальним. Якщо серед вказаних чисел є від’ємні, то, використовуючи описану вище послідовність дій, знаходять новий опорний план. Цей процес продо- вжують до тих пір, поки не отримають оптимальний план задачі або встано- влять неможливість її розв’язання.

ПРИКЛАД РОЗРАХУНКУ

Для виготовлення різноманітних виробів А, В і С підприємство використовує три види сировини. Норма витрат сировини на виготовлення одного виробу кожного виду, ціна одного виробу А, В і С, а також загальна кількість сировини кожного виду, що може бути використана підприємством, наведені в таблиці 3. Скласти план виготовлення виробів, при якому загальна вартість всієї виробленої підприємством продукції є максимальною.

Таблиця 3.

Вид сировини	Норма витрат сировини (кг) на один виріб			Загальна кіль-кість сировини (кг)
	А	В	С	
I	18	15	12	360
II	6	4	8	192
III	5	3	3	180
Ціна одного виробу (грн.)	9	10	16	

Розв’язання.

Складемо математичну модель задачі. Позначимо кількість виробів А через x_1, виробів В – через x_2, виробів С – через x_3. Згідно з умовою задачі маємо таку систему нерівностей:

$$18x_1 + 15x_2 + 12x_3 \leq 360,$$
$$6x_1 + 4x_2 + 8x_3 \leq 192,$$
$$5x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 180.$$

Загальна вартість виготовленої підприємством продукції запишеться у вигляді:

$$F = 9x_1 + 10x_2 + 16x_3 .$$

За своїм економічним змістом змінні x_1, x_2 і x_3 можуть приймати тільки невід’ємні значення:

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Отже, необхідно визначити серед розв’язків такі, при яких функ-ція приймає максимальне значення.

Введемо три додаткові змінні: x_4, x_5, x_6 – невикористана кількість сировини, відповідно. Тоді систему нерівностей запишемо у вигляді системи рівнянь:

$$18x_1 + 15x_2 + 12x_3 + x_4 = 360,$$
$$6x_1 + 4x_2 + 8x_3 + x_5 = 192,$$
$$5x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_6 = 180.$$

Цю систему запишемо у векторній формі:

$$x_1P_1 + x_2P_2 + x_3P_3 + x_4P_4 + x_5P_5 + x_6P_6 = P_0,$$

де

$$P_1 = \begin{pmatrix} 18 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix};\ P_2 = \begin{pmatrix} 15 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix};\ P_3 = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix};\ P_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};\ P_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};\ P_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};\ P_0 = \begin{pmatrix} 360 \\ 192 \\ 180 \end{pmatrix}.$$

Оскільки серед векторів P_1–P_6 є три одиничних вектори, то для даної за- дачі можна записати опорний план, який вважається системою тривимірних одиничних векторів P_4, P_5, P_6, що створюють базис тривимірного векторно- го простору, тобто

$$x=(0;0;0;360;192;180).$$

Складемо симплексну таблицю для першої ітерації, підрахуємо значення F_0, $z_j - c_j$ і перевіримо початковий опорний план на оптимальність:

$$F_0 = (c, P_0) = 0 \cdot 360 + 0 \cdot 192 + 0 \cdot 180 = 0;$$
$$z_1 = (c, P_1) = 0 \cdot 18 + 0 \cdot 6 + 0 \cdot 5 = 0;$$
$$z_2 = (c, P_2) = 0 \cdot 15 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 3 = 0;$$
$$z_3 = (c, P_3) = 0 \cdot 12 + 0 \cdot 8 + 0 \cdot 3 = 0;$$
$$z_1 - c_1 = 0 - 9 = -9;$$
$$z_2 - c_2 = 0 - 10 = -10;$$
$$z_3 - c_3 = 0 - 16 = -16.$$

Для векторів базису $z_j - c_j = 0,\ j = 4 - 6.$

Таблиця 4.

i	Базис	$C_б$	P_0	$C_1=9$	$C_2=10$	$C_3=16$	$C_4=0$	$C_5=0$	$C_6=0$
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	0	360	18	15	12	1	0	0
2	P_5	0	192	6	4	8	0	1	0
3	P_6	0	180	5	3	3	0	0	1
4			$F_0=0$	-9	-10	-16	0	0	0

З таблиці видно, що значення цільової функції дорівнює нулеві, тобто ніщо не виробляється, сировина не використовується. Отже, план не є оп- тимальним.

В 4-ому рядку таблиці 4 від’ємні числа свідчать про можливість збі- льшення загальної вартості виробленої продукції і показують, на скільки збільшиться ця сума при введенні в план одиниці того чи іншого виду про- дукції. Так, число 9 означає, що при включенні в план виробництва одного виробу А забезпечується збільшення вартості випуску продукції на 9 грн. Якщо включити в план виробництва по одному виробу В і С, то загальна вартість виготовленої продукції виросте, відповідно, на 10 і 16 грн. Тому з економічної точки зору найбільш раціональним є включення в план виробництва вибір С. Оскільки число 16 стоїть в 4-ому рядку стовпця P_3, то в ба- зис вводимо вектор P_3. Визначимо вектор, який належить виключенню з базису. Для цього знаходимо:

$$\theta_0 = \min(360 / 12;\ 192 / 8;\ 180 / 3) = 192 / 8 = 24.$$

Отже, вектор P_5 належить вилученню з базису. Стовпець вектора P_3 і другий рядок є напрямними. Складемо таблицю для 2-ї ітерації (табл.5).

Таблиця 5.

i	Базис	$C_б$	P_0	9	10	16	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	0	72	9	9	0	1	$-3/2$	0
2	P_3	16	24	$3/4$	$1/2$	1	0	$1/8$	0
3	P_6	0	108	11/4	3 2	0	0	$-3/8$	1
4			384	3	-2	0	0	2	0

Спочатку заповнюємо рядок вектора P_3. Елементи цього рядка отриму- ються з відповідних елементів рядка 2 таблиці 2 діленням на вирішуваний елемент 8. При цьому в стовпці $C_б$ записуємо коефіцієнт $C_3=16$. Потім за- повнюємо елементи стовпців для векторів, які входять в повний базис. В цих стовпцях на перетині рядків і стовпців однойменних векторів проставляємо одиниці, а всі інші елементи вважають рівними нулеві.

Для визначення інших елементів таблиці 5 використовуємо правило трикутника.

Визначаємо елементи таблиці 5, які стоять в стовпці вектора P_0.

Для першого елемента маємо:

$$360 - 12 \cdot 24 = 72.$$

Для третього елемента - $180 - 24 \cdot 3 = 180$.

Значення F_0 в 4-ому рядку стовпця цього ж вектора визначимо за формулою:

$$F_0 = (C, P_0) = 0.72 + 16 \cdot 24 + 0 \cdot 108 = 384 .$$

За правилом трикутника визначимо елементи стовпця вектора P_1. Перші два числа з таблиці 5.5, а третє число – з таблиці 5. Це число стоїть на перетині 2-ого рядка і стовпця вектора P_1 останньої таблиці. В результаті має- мо значення невідомих елементів:

$$18 - 12 \cdot (3/4) = 9; \qquad 5 - 3 \cdot (3/4) = 11/4.$$

Число $z_1 - c_1$ в 4-ому рядку стовпця вектора P_1 таблиці 5 визначимо за формулою:

$$z_1 - c_1 = (C_1 P_1) - C_1 = 0 \cdot 9 + 16 \cdot 3/4 + 0 \cdot 11/4 - 9 = 3.$$

Аналогічно знаходимо елементи стовпця вектора P_2. Елементи стовпця вектора P_5 визначаємо за правилом трикутника.

Для першого елемента маємо:

$$0 - 12 \cdot (1/8) = - 3/2.$$

Для третього елемента маємо:

$$0 - 3 \cdot (1/8) = - 3/8.$$

В результаті з таблиці 5 отримуємо новий опорний план задачі $X = (0; 0; 24; 72; 0; 108)$. При даному плані виробництва виготовляються 24 ви- роби C і залишаються невикористаними 72 кг сировини 1-го виду і 108 кг сировини 3-го виду. Вартість всієї виробленої продукції при цьому плані дорівнює 384 грн. Але план не є оптимальним. Це видно з 4-ого рядка таблиці 5, оскільки у стовпці вектора P_2 цього рядка стоїть від'ємне число.

2. Отже, в базис необхідно ввести вектор P_2, тобто в новому плані необхідно передбачити випуск виробів В. Можливий випуск виробів В визначається $\min(в_i' / a_{i2}')$ для $a_{i2}' > 0$, тобто знаходимо:

$$\theta_0 = \min\left(\frac{72}{9}; \frac{24 \cdot 2}{1}; \frac{108 \cdot 2}{3}\right) = \frac{72}{9} = 8.$$

Отже, виключенню з базису підпадає вектор P_4. Число 9 є вирішуваним елементом, а стовпець вектора P_2 і перший рядок таблиці 5 є напрямними. Складаємо таблицю для третьої ітерації (таблиця 6).

Таблиця 6.

i	Базис	$C_б$	P_0	9	10	16	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_2	10	8	1	1	0	1 / 9	– 1 / 6	0
2	P_3	16	20	1 / 4	0	1	–1 /18	5 / 24	0
3	P_6	0	96	5 / 4	0	0	–1 /6	–1 /8	1
4			400	5	0	0	2 9	5 3	0

В таблиці 6 спочатку заповнюємо елементи першого рядка, який являє собою рядок з вектором P_2 в базисі. Елементи цього рядка отримуємо з елементів першого рядка таблиці 5 діленням останніх на вирішуваний елемент (тобто на 9). При цьому в стовпці $C_б$ даного рядка записуємо C_2=10.

Потім заповнюємо елементи стовпців векторів базису і за правилом три- кутника вираховуємо елементи останніх стовпців.

Так, для стовпця вектора P_0 маємо:

другий елемент: $24 - 8 \cdot 0.5 = 20$;

третій елемент: $108 |- 3\ 2 \cdot 8 = 96$.

Значення F_0 в 4-ому рядку стовпця цього ж вектора визначимо за формулою:

$$F_0 = (C, P_0) = 8 \cdot 10 + 16 \cdot 20 - 0 \cdot 96 = 400.$$

Для стовпця вектора P_1 визначаємо елементи 2-4 рядків.

Другий елемент: $\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{4}$.

Третій елемент: $\frac{11}{4} - \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{5}{4}$.

Аналогічно вираховуємо елементи для векторів P_4 і P_5 (елементи друго- го і третього рядків).

Наприклад, для вектора P_5:

елемент другого рядка:

$$\frac{1}{8} - \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{8} + \frac{1}{12} = \frac{5}{24};$$

елемент третього рядка:

$$-\frac{3}{8} - \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{8}.$$

Розглянемо четвертий рядок таблиці 5.7. В цьому рядку серед чисел Δ_j немає від'ємних. Це означає, що знайдений опорний план є оптимальним і $F_{max} = 400$.

Отже, план випуску продукції, включаючи виготовлення 8 виробів B і 20 виробів *C*, є оптимальним. Сировина першого і другого видів використо- вується повністю. При цьому залишається 96 кг сировини третього виду, а вартість виробленої продукції рівна 400грн.

Зміст звіту

1. Назва роботи.
2. Мета роботи.
3. Розрахунки значень заданих прикладів.
4. Висновки.
5. Література.

ПЕРЕЛІК ЛІТЕРАТУРНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Гліненко Л.К., Смердов А.А., Вибойшик О.М. Моделювання евристичних задач проектування. - Львів: ПП "Телемаркет", 1997. — 222 с.
2. Зелінський А.М. Основи математичного моделювання. - К.: НМК ВО. 1992. - 220 с.
3. Математическиє методи в технологическкн исследовакиях / З.В. Рыжов, О.А. Гор- ленко. -К.: Наук. Думка, 1990. - 184 с.
4. Моделювання технічних систем: Навч. посібник / З.А.Стоцько. - К.: НМК ВО, 1992. - 132 с.
5. Пальчевський Б.О. Дослідження технологічних систем (моделювання, проектування, оптимвшія): Навч. посібник. - Львів. Світ, 2001. - 282 с.
6. Половинкин А.И. Основи ннженерного творчества. -М.: Машиностроение, 1988.-368 С.
7. Пляскин И.И. Оптимшация технических решений в ма шиностроении. - М.: Машиностроение, 1982. - I76 с.
8. Струтннський В.Б. Математичне моделювання процесів та систем механіки: Підручник. - Житомир: ЖІТІ, 2001. - 612 с.
9. Гехника ФСА / Е.И. Голибардов. А.В. Кудрявцев. М.И. Синенко. - К.: Техника, 1989. - 239 с.

Варіанти завдань

При виготовленні колон А, В і С для будівництва театру підприємство використовує три тиди розмірів поперечного перерізу. Норма витрат сировини на виготовлення одної колони кожного виду, ціна одної колони А, В і С, а також загальна кількість сировини на кожний вид, що може бути використана підприємством, наведені в таблиці. Скласти план виготовлення колон, при якому загальна вартість всієї виробленої підприємством продукції є максимальною.

<table>
<tr><td rowspan="2">1.</td><td rowspan="2">Розмір</td><td colspan="3">Норма витрат сировини (кг) на одну колону</td><td rowspan="2">Загальна кіль-кість сировини (кг)</td></tr>
<tr><td>А</td><td>В</td><td>С</td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td>Ø 50
Ø 45
Ø 40</td><td>20
16
10</td><td>18
11
7</td><td>15
8
5</td><td>300
190
160</td></tr>
<tr><td>Ціна одної колони у грн.</td><td>800</td><td>750</td><td>700</td><td></td></tr>
</table>

2.	Розмір	Норма витрат сировини (кг) на одну колону			Загальна кількість сировини (кг)
		A	B	C	
	Ø 45	15	18	15	320
	Ø 40	12	14	10	250
	Ø 30	10	10	5	200
	Ціна одної колони у грн.	750	700	650	

3.	Розмір	Норма витрат сировини (кг) на одну колону			Загальна кількість сировини (кг)
		A	B	C	
	Ø 40	16	15	12	300
	Ø 35	14	14	10	260
	Ø 30	10	12	8	220
	Ціна одної колони у грн.	700	680	650	

4.	Розмір	Норма витрат сировини (кг) на одну колону			Загальна кількість сировини (кг)
		A	B	C	
	Ø 35	12	18	15	350
	Ø 30	8	14	9	250
	Ø 20	5	8	4	150
	Ціна одної колони у грн.	750	600	550	

5.	Розмір	Норма витрат сировини (кг) на одну колону			Загальна кількість сировини (кг)
		A	B	C	
	Ø 30	25	20	18	360
	Ø 25	18	15	8	250
	Ø 20	18	10	5	180
	Ціна одної колони у грн.	850	700	550	

6.	Розмір	Норма витрат сировини (кг) на одну колону			Загальна кількість сировини (кг)
		A	B	C	
	Ø 50 Ø 40 Ø 30	30 22 18	28 24 12	25 20 10	320 250 200
	Ціна одної колони у грн.	950	700	500	

7.	Розмір	Норма витрат сировини (кг) на одну колону			Загальна кількість сировини (кг)
		A	B	C	
	Ø 60 Ø 40 Ø 20	30 22 14	28 24 20	25 20 15	300 240 175
	Ціна одної колони у грн.	850	700	450	

8.	Розмір	Норма витрат сировини (кг) на одну колону			Загальна кількість сировини (кг)
		A	B	C	
	Ø 45 Ø 25 Ø 15	15 14 11	18 14 10	15 12 8	320 250 200
	Ціна одної колони у грн.	720	700	660	

9.	Розмір	Норма витрат сировини (кг) на одну колону			Загальна кількість сировини (кг)
		A	B	C	
	Ø 45 Ø 40 Ø 30	35 30 25	28 22 14	16 12 8	400 320 240
	Ціна одної колони у грн.	1050	800	550	

10.	Розмір	Норма витрат сировини (кг) на одну колону			Загальна кількість сировини (кг)
		A	B	C	
	Ø 55	44	40	15	520
	Ø 40	36	34	10	450
	Ø 25	28	28	5	300
	Ціна одної колони у грн.	950	750	550	

11.	Розмір	Норма витрат сировини (кг) на одну колону			Загальна кількість сировини (кг)
		A	B	C	
	Ø 75	60	40	35	620
	Ø 70	56	34	30	550
	Ø 65	50	30	25	480
	Ціна одної колони у грн.	950	900	850	

12.	Розмір	Норма витрат сировини (кг) на одну колону			Загальна кількість сировини (кг)
		A	B	C	
	Ø 65	44	40	15	720
	Ø 40	26	24	12	450
	Ø 15	8	6	5	300
	Ціна одної колони у грн.	1050	750	450	

13.	Розмір	Норма витрат сировини (кг) на одну колону			Загальна кількість сировини (кг)
		A	B	C	
	Ø 55	48	40	25	620
	Ø 52	36	30	20	550
	Ø 48	28	20	15	400
	Ціна одної колони у грн.	950	750	550	

14.	Розмір	Норма витрат сировини (кг) на одну колону			Загальна кількість сировини (кг)
		A	B	C	
	Ø 52	54	30	17	525
	Ø 44	46	24	14	480
	Ø 36	38	18	8	390
	Ціна одної колони у грн.	980	850	590	

15.	Розмір	Норма витрат сировини (кг) на одну колону			Загальна кількість сировини (кг)
		A	B	C	
	Ø 48	48	38	25	520
	Ø 40	36	34	18	460
	Ø 32	24	28	10	400
	Ціна одної колони у грн.	880	770	550	

16.	Розмір	Норма витрат сировини (кг) на одну колону			Загальна кількість сировини (кг)
		A	B	C	
	Ø 50	20	18	15	300
	Ø 45	16	11	8	190
	Ø 40	10	7	5	160
	Ціна одної колони у грн.	800	750	700	

17.	Розмір	Норма витрат сировини (кг) на одну колону			Загальна кількість сировини (кг)
		A	B	C	
	Ø 45	15	18	15	320
	Ø 40	12	14	10	250
	Ø 30	10	10	5	200
	Ціна одної колони у грн.	750	700	650	

18.	Розмір	Норма витрат сировини (кг) на одну колону			Загальна кількість сировини (кг)
		A	B	C	
	Ø 40 Ø 35 Ø 30	16 14 10	15 14 12	12 10 8	300 260 220
	Ціна одної колони у грн.	700	680	650	

19.	Розмір	Норма витрат сировини (кг) на одну колону			Загальна кількість сировини (кг)
		A	B	C	
	Ø 35 Ø 30 Ø 20	12 8 5	18 14 8	15 9 4	350 250 150
	Ціна одної колони у грн.	750	600	550	

20.	Розмір	Норма витрат сировини (кг) на одну колону			Загальна кількість сировини (кг)
		A	B	C	
	Ø 30 Ø 25 Ø 20	25 18 18	20 15 10	18 8 5	360 250 180
	Ціна одної колони у грн.	850	700	550	

21.	Розмір	Норма витрат сировини (кг) на одну колону			Загальна кількість сировини (кг)
		A	B	C	
	Ø 50 Ø 40 Ø 30	30 22 18	28 24 12	25 20 10	320 250 200
	Ціна одної колони у грн.	950	700	500	

22.	Розмір	Норма витрат сировини (кг) на одну колону			Загальна кількість сировини (кг)
		A	B	C	
	Ø 60 Ø 40 Ø 20	30 22 14	28 24 20	25 20 15	300 240 175
	Ціна однієї колони у грн.	850	700	450	

23.	Розмір	Норма витрат сировини (кг) на одну колону			Загальна кількість сировини (кг)
		A	B	C	
	Ø 45 Ø 25 Ø 15	15 14 11	18 14 10	15 12 8	320 250 200
	Ціна однієї колони у грн.	720	700	660	

24.	Розмір	Норма витрат сировини (кг) на одну колону			Загальна кількість сировини (кг)
		A	B	C	
	Ø 45 Ø 40 Ø 30	35 30 25	28 22 14	16 12 8	400 320 240
	Ціна однієї колони у грн.	1050	800	550	

25.	Розмір	Норма витрат сировини (кг) на одну колону			Загальна кількість сировини (кг)
		A	B	C	
	Ø 55 Ø 40 Ø 25	44 36 28	40 34 28	15 10 5	520 450 300
	Ціна однієї колони у грн.	950	750	550	

26.	Розмір	Норма витрат сировини (кг) на одну колону			Загальна кількість сировини (кг)
		A	B	C	
	Ø 75 Ø 70 Ø 65	60 56 50	40 34 30	35 30 25	620 550 480
	Ціна одної колони у грн.	950	900	850	

27.	Розмір	Норма витрат сировини (кг) на одну колону			Загальна кількість сировини (кг)
		A	B	C	
	Ø 65 Ø 40 Ø 15	44 26 8	40 24 6	15 12 5	720 450 300
	Ціна одної колони у грн.	1050	750	450	

28.	Розмір	Норма витрат сировини (кг) на одну колону			Загальна кількість сировини (кг)
		A	B	C	
	Ø 55 Ø 52 Ø 48	48 36 28	40 30 20	25 20 15	620 550 400
	Ціна одної колони у грн.	950	750	550	

29.	Розмір	Норма витрат сировини (кг) на одну колону			Загальна кількість сировини (кг)
		A	B	C	
	Ø 52 Ø 44 Ø 36	54 46 38	30 24 18	17 14 8	525 480 390
	Ціна одної колони у грн.	980	850	590	

30.	Розмір	Норма витрат сировини (кг) на одну колону			Загальна кількість сировини (кг)
		A	B	C	
	Ø 48	48	38	25	520
	Ø 40	36	34	18	460
	Ø 32	24	28	10	400
	Ціна одної колони у грн.	880	770	550	