Алгоритми і технології обчислення інтегралів

Мета роботи: навчитись обчислювати інтеграли з допомогою засобів MATLAB

Короткі теоретичні відомості:

Система MATLAB дозволяє обчислювати невизначені і певні інтеграли, первісні яких задані у вигляді аналітичних виразів.

Вона також має велике число способів чисельного інтегрування. Чисельне інтегрування необхідно в наступних випадках:

- перше образна не виражається за через елементарні функції;
- аналітичний вираз інтеграла надто складне;
- функція під інтегральна задана в табличній формі або у вигляді матриці.

При обчисленнях інтегралів чисельними методами під. інтегральну функцію доцільно представляти в найбільш простому вигляді. Це може прискорити обчислення. Спрощення підінтегральної функції можна виконати, скориставшись функцією **simplify(y).**

Мають місце випадки, коли система до спрощення не може обчислити невизначений інтеграл і легко його визначає після спрощення.

Метод обчислення інтеграла вибирає користувач. В цьому особливість системи MATLAB. За допомогою MATLAB студент має можливість порівнювати різні методи чисельного інтегрування.

Існує ряд способів чисельного інтегрування. У всіх таких способах обчислення здійснюється по наближеним формулам, званим квадратурними. Наведемо деякі з них.

Формули прямокутників

Формули прямокутників представляються в наступному вигляді:

$$\int_a^b f(x)dx = \begin{Bmatrix} h\sum_{k=0}^{n-1} y_k \\ h\sum_{k=1}^{n} y_k \end{Bmatrix},$$

де:

- h - крок інтегрування;
- yk - значення підінтегральної функції при аргументі xk, k = 0,1,2, ..., n;
- n = (ba) / h - число частин, на які розбивається область інтегрування a, b.

Одна з формул дає значення інтеграла з надлишком, інша з недоліком. Яка з них видає рішення з надлишком або з нестачею, залежить від виду підінтегральної функції.

Формула трапецій

Ця формула має вигляд:

$$\int_a^b f(x)dx = h\left(\frac{y_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} y_k + \frac{y_n}{2}\right),$$

де:

- y0 - значення підінтегральної функції при x = a;
- y - значення підінтегральної функції при x = b;
- h - крок інтегрування.

Формула парабол (Сімпсона)
Ця формула має вигляд:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + \ldots + 4y_{n-1} + y_n\right).$$

У цій формулі ординати з непарними індексами помножити на 4, а з парними - на 2. Передбачається, що n - число парне.

При непарному n формула має вигляд:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + \ldots + 2y_{n-1} + y_n\right).$$

Крайні координати мають коефіцієнт, що дорівнює 1.

Існує багато інших квадратурних формул обчислення інтегралів: Котеса, Чебишева, Гауса та ін.

В системі MATLAB обчислення інтегралів реалізовано **чисельними методами трапецій, парабол (Сімпсона) і Ньютона - Котеса.**

Метод трапецій

Метод трапеції реалізований в MATLAB декількома функціями, наведеними нижче.

1. **Функція cumtrapz (y)**

Здійснює обчислення інтеграла у випадку, коли значення функції у задані у вигляді вектора або матриці необмежених розмірів. Відгуком цієї функції є п інтегралів, де п - число елементів вектора або число елементів в кожному стовпці матриці.

Таке обчислення інтеграла називається **інтегруванням з накопиченням**.

Приклад 1: Нехай функція у (х) має значення, представлені у вигляді наступного вектора: у = [1,2,3,4,5, б, 7,8,9,10]. необхідно обчислити $\int_a^b y(x)dx$

При цьому а=1; b=1,2, 3,..., 10.

Функція обчислення інтеграла методом трапецій буде мати вигляд:

```
>> y=[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10];
>> cumtrapz (y)

ans =
        0    1.5000    4.0000    7.5000   12.0000   17.5000   24.0000   31.5000   40.0000   49.5000
```

Приклад 2: Нехай необхідно обчислити інтеграл виду $\int_0^{10} (3e^x + \ln x + 1)dx$

Щоб обчислити цей інтеграл за допомогою функції cumtrapz (), слід спочатку обчислити 10 ординат підінтегральної функції, представивши їх у вигляді вектора.

Програма обчислення інтеграла з накопиченням буде мати вигляд:

```
» x=1:1:10;
» y=3*exp(x)+log(x)+l;
» cumtrapz(y)

ans =
  1.0e+004 *
        0    0.0017    0.0060    0.0174    0.0481    0.1311    0.3564    0.9684    2.6313    7.1510
```

Існує модифікація даної функції **cumtrapz(x, y).**

Основним недоліком методу трапецій є велика похибка результату обчислення інтеграла.

2. Функція trapz (y)

Відмінність даної функції від функції cumtrapz (y) полягає в тому, що здійснюється просте інтегрування без накопичення, тобто **trapz(y)** повертає не так інтегралів, наскільки кроків розбивається область інтегрування, а загальне значення інтеграла.

Приклад 1: обчислити інтеграл виду $\int_0^{10}(xe^x + \ln x + 1)dx$ з кроком 0,5.

```
x=1: 0.5: 10;
y=x.*exp(x) + log(x) + 1;
trapz(y)

    ans =  4.0657e+005.
```

Існує модифікація даної функції **trapz (x, y)**. Слід мати на увазі, що при обчисленні інтеграла за допомогою функції trapz (x, y) його значення залежить від кроку інтегрування.

Метод парабол (Сімпсона)

Для його реалізації в системі MATLAB використовуються наступні функції:

```
quad('fun', a, b)
quad('fun', a, b, tol)
quad('fun', a, b, tol, trace)
dblquad('fun', a, b, c, d)
dblquad('fun', a, b, c, d, tol)
```

У цих функціях прийняті позначення:

1) 'fun' – під інтегральна функція, взята в одинарні лапки;
2) a, b - межі інтегрування;
3) tol - відносна похибка, що задається користувачем (за замовчуванням tol = 10e -3);
4) c, d - межі інтегрування за іншою змінною (зовнішньої) при обчисленні подвійного інтеграла;
5) trace - число, відмінне від нуля, за яким система показує хід обчислювального процесу.

Розглянемо перераховані функції і наведемо приклади.

1. Функция quad('fun', a, b)

Функція обчислює визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ з похибкою, що не перевищує 10^{-3}.

Приклад 1:

Підінтегральна функція має вигляд: $f(x) = e^{x} + x^{2} + 2 \sin x - 5$.

Необхідно обчислити інтеграл $\int_1^5 f(x)dx$.

Рішення:
>> y = ‘exp(x) + x.^2 + 2*sin(x) – 5’;
>> quad (y, 1, 5)
ans = 167.5415

Функція може бути представлена <u>одним рядком</u>:
quad (‘exp(x) + x.^2 + 2*sin(x) – 5’, 1, 5).

2. Функція dblquad('fun',a,b,c,d).

У функції dblquad('fun',a,b,c,d) прийняті наступні позначення:
'fun' - це функція з двома змінними;
a, b - межі по внутрішньої змінної;
c, d - межі по зовнішньої змінної.

<u>Приклад 1</u>: Нехай функція двох змінних має вигляд: $z = x^2 + y^2 - 2$

Необхідно обчислити інтеграл $\int_1^2 \int_0^3 z(x, y)dxdy$

Рішення:
>> z='x.^2 + y.^2 - 2';
>> dblquad (z,1,2,0,3)
ans = 10.

Аналітичні методи обчислення інтеграла

Функція int() обчислення невизначеного і визначеного інтегралів.

Обчислення інтеграла аналітичними методами здійснюється в системі MATLAB за допомогою функцій *int()*, які мають вигляд:

1) int(y(x))
2) int(y(x), a, b),

де:
• y(x) — під інтегральна функція;

• a, b — межі інтегрування.

Ці функції обчислюють:

- визначений інтеграл;
- невизначений інтеграл з символьними змінними;
- визначений інтеграл з символьними значеннями меж інтегрування;
- визначений інтеграл від алгебраїчних функцій;
- кратні інтеграли;
- невласні інтеграли.

Технологія обчислення інтегралів досить проста і полягає в наступному:

1. Визначення символьних змінних за допомогою функції syms.

2. Введення під інтегрального виразу з присвоєнням йому імені y = f (x);

3. Введення функції int (y), якщо обчислюється невизначений інтеграл, або функції int (y, a, b), якщо обчислюється визначений інтеграл в межах [a; b].

4. Отримання рішення шляхом натискання клавіші <Enter>.

Приклад 1: Необхідно обчислити інтеграл $\int \frac{x}{1+x^2}dx$

```
>> syms x;
>> y = x/(1+x^2);
>> int(y)
     ans =1/2*log(1+x^2)
```

Приклад 2: Обчислити значення визначеного інтегралу $\int_a^b \frac{x}{1+x^2}dx$.

```
>> syms x a b;
>> y=x/(1+x^2);
>> int(y, a, b)
     ans = 1/2*log(1+b^2)-1/2*log(1+a^2)
```

Приклад 3: Обчислити визначений інтеграл $\int_1^5 \frac{x}{1+x^2}dx$

```
>> syms x;
>> y=x/(1+x^2);
>> int(y, 1, 5)
     ans = 1/2*log(13)
```

Обчислення кратних інтегралів.

Найбільш просто кратний інтеграл обчислити шляхом інтегрування відповіді, отриманого від попереднього значення інтеграла.

Приклад 1: Нехай необхідно обчислити подвійний невизначений інтеграл

$$\int\int\frac{x}{1-x^2}dx$$

Рішення:

```
>> syms x;
>> y=x/(1-x^2);
>> int(int(y))
        ans =  -1/2*log(x-1)*(x-1)+x-1/2*log(x+1)*(x+1)
```