ДИНАМІКА СПОРУД.
Частина 1

1. Вступ до динаміки споруд

Коливання − одна із найбільш поширених форм руху. Коливаються гілки дерев, вагони на ресорах під час руху, вода и предмети на ній. Коливаються будівлі і споруди від вітру, землетрусу, від роботи різноманітних машин і механізмів. Під час коливань споруди величини і знаки внутрішніх зусиль (напружень) безперервно змінюються, що може спричинити раптове руйнування окремих елементів, частин або споруди в цілому.

Динаміка споруд вивчає механічні коливання споруд. Як теоретична наука, вона розробляє різноманітні методи і алгоритми розрахунку споруд на динамічні впливи. Водночас ***динаміка споруд*** є прикладною наукою та вирішує конкретні задачі. Серед таких задач найбільш важливими є ***чотири задачі динаміки***:

1) визначення частот і форм власних коливань;
2) перевірка на резонанс;
3) перевірка динамічної міцності;
4) перевірка динамічної жорсткості.

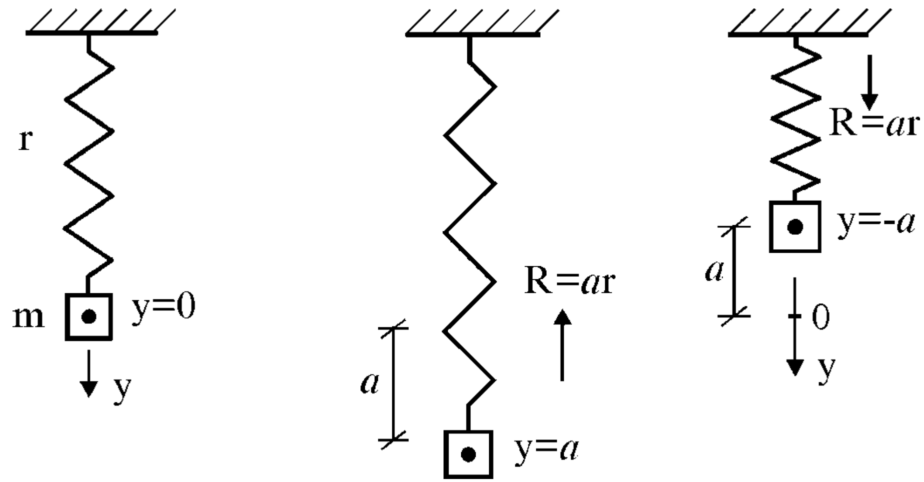
Рішення задач динаміки є значно складнішими за рішення задач статики, оскільки ***треба враховувати додатковий фактор – час***.

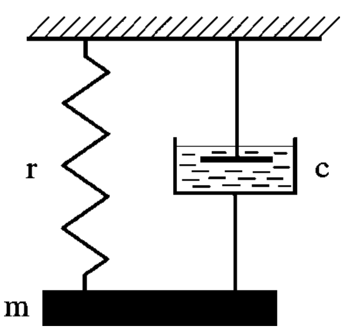
При розрахунку на коливання споруду розглядають як коливальну систему. Коливальні системи поділяються на два типи:

− ***дисипативна система*** – система, у якій відбувається дисипація (розсіювання) енергії;

− ***консервативна система***, для якої нехтують розсіюванням енергії.

Найпростішою моделлю консервативної системи є система із пружини та маси. Жорсткість пружини ***r*** характеризує пружність системи, а маса ***m*** – її інерційні властивості.





Найпростішою моделлю дисипативної системи є система із пружини, в'язкого елемента і маси. Сила опору ***c***, що виникає у в'язкому елементі, намагається зупинити коливання системи. Такий елемент називають ***демпфером*** (або амортизатором). Тому дисипативну систему часто називають ***демпфованою системою***.

2. Ступінь вільності і розрахункова модель

Ступінь вільності в динаміці − це напрям можливого незалежного переміщення маси. На відміну від ступеня вільності у кінематичному аналізі, де враховуються і деформації елементів.

Кількість динамічних ступенів вільності $W_{дин}$ – це мінімальна кількість параметрів, що необхідні для визначення положення усіх мас системи.

Якщо розглядати споруду як систему із нескінченною кількістю елементарних мас, отримаємо систему із нескінченною кількістю динамічних ступенів вільності. Розрахунок коливань навіть найпростіших систем (балок, плит та ін.) за такою континуальною моделлю є складною задачею. Тому в динаміці споруд розрахункову модель часто вибирають у вигляді дискретної системи із зосередженими масами.

Маси споруди можна дискретизувати по-різному.

Іноді, зосередивши розподілену масу споруди лише у декількох точках, можна досить точно розрахувати найпростіші коливання.

Масу споруди зазвичай зосереджують у характерних точках, де діють найбільші навантаження.

Якщо положення таких точок встановити складно, місця і значення зосереджених мас можуть бути знайдені з умови рівності енергії усієї системи і енергії її дискретної моделі. Зосереджені маси, що визначені таким чином, називаються ***приведеними масами***.

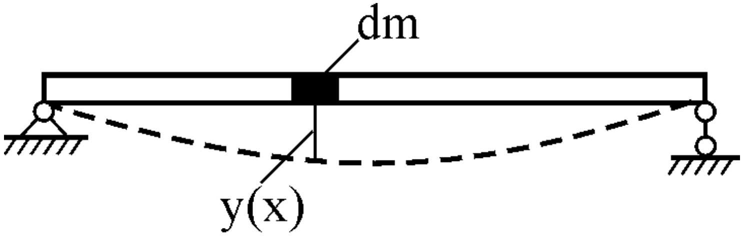
Більші маси, що зосереджені на спорудах (вантажі, різноманітні машини, станки, обладнання та ін.), розглядаються як ***кускові маси***.

Приведені та кускові маси плоскої системи мають три ступені вільності: вони можуть здійснюють коливання у двох незалежних взаємно-перпендикулярних напрямках і обертатися відносно центру маси.

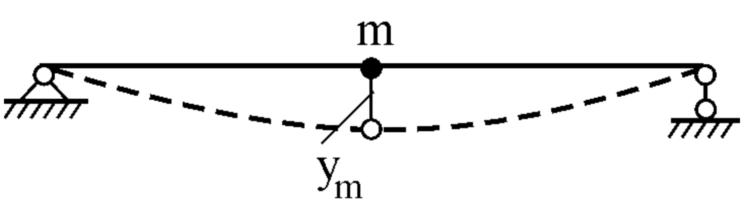
Якщо обертання (крутильне коливання) маси не враховувати, отримують ***точкову масу***. Кількість ступенів вільності точкової маси дорівнює двом.

Розглянемо приклади.

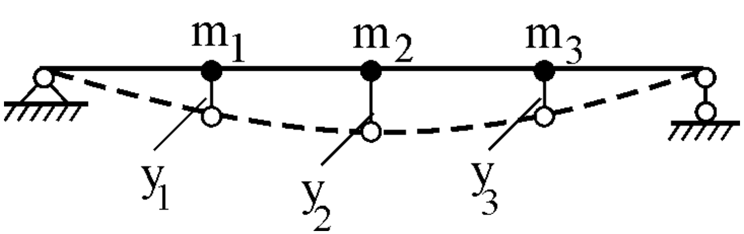
1) Шарнірно-оперта балка



Вона складається із нескінченної кількості елементарних мас *dm*, положення яких визначається нескінченною кількістю переміщень *y(x)*. Тому $W_{дин}=\infty$.



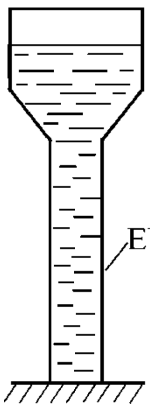
Якщо масу балки зосередити в одній точці, положення точкової маси *m* буде визначати один параметр – переміщення y_m. Тоді $W_{дин}=1$.

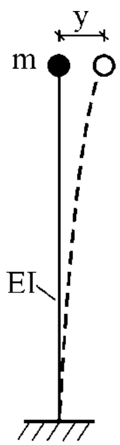


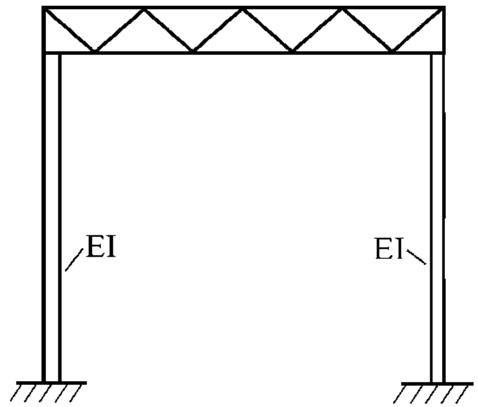
Якщо масу балки зосередити у трьох точках, положення мас m_1, m_2, m_3 будуть визначати три параметри y_1, y_2, y_3 . Тому у цієї системи $W_{дин} =3$.

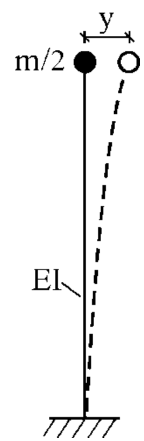
2) Водонапірна вежа і одноповерхова рама

У них основні маси розташовані вгорі. Тому їх можна розглядати як коливання системи із однією масою і одним ступенем вільності, тобто прийняти $W_{дин} = 1$.



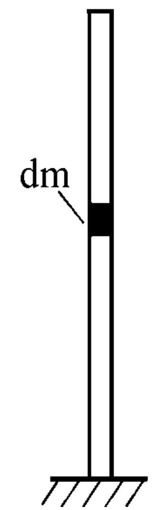


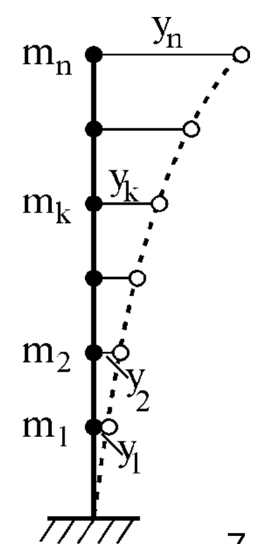




3) Димова труба

Її неможна розглядати як динамічну систему із одним ступенем вільності, оскільки це призводить до неточних результатів. Тому її слід розглядати як систему із досить значною кількістю ступенів свободи і прийняти $W_{дин}=n$.



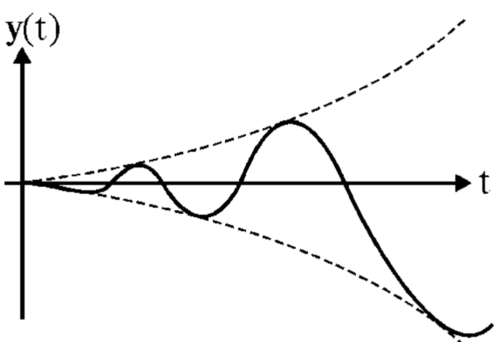


3. Основні види і характеристики коливань

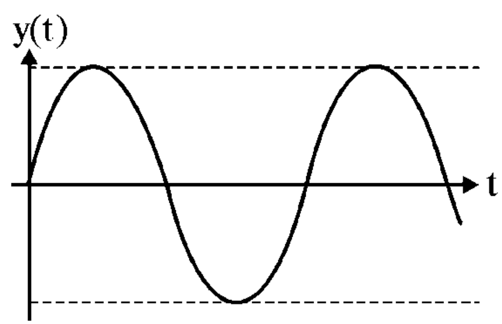
У коливальній системі відбувається періодичний перехід одного виду енергії у другій (потенційна енергія переходить у кінетичну енергію і навпаки).

Наочне представлення коливального процесу можна отримати, якщо побудувати графік коливань окремої маси в координатах ***t*** (час) і ***y*** (переміщення).

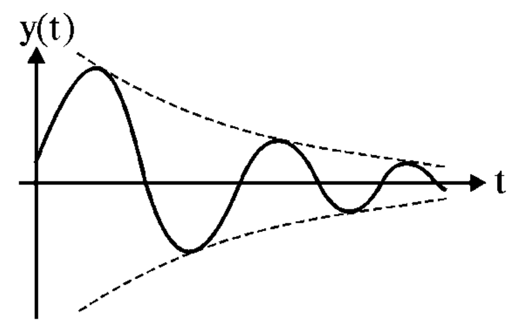
Коли у коливальну систему надходить зовнішня енергія, коливання будуть наростати. Якщо до консервативної системи зовнішня енергія не надходить, її коливання будуть незатухаючими. Якщо енергія системи зменшується (наприклад, за рахунок тертя), коливання будуть затухаючими.



наростаючі коливання



незатухаючі коливання



затухаючі коливання

Важливою характеристикою коливального процесу є форма коливань.

Форма коливань – крива, яка показує положення точок коливальної системи відносно положення рівноваги у фіксований момент часу.

Найпростіші форми коливань можна спостерігати у житті. Наприклад, добре видимі є форми коливань дроту, що висить між двома стовпами, або гітарної струни.

Вільні коливання − це коливання, що відбуваються за відсутності зовнішнього навантаження.

Вільні коливання дисипативної системи є затухаючими.

Вільні коливання консервативної системи є незатухаючими. Оскільки у природі консервативних систем не існує, то їх коливання вивчають лише теоретично.

Вільні коливання консервативних систем називають ***власними коливаннями***.

Періодичні коливання – це коливання, що задовольняють умову

y(t)=y(t+T).

Де *T* – ***період коливань*** (час одного коливання).
Періодичні коливання мають також інші важливі характеристики, такі як:
амплітуда а – половина розмаху коливання.
колова частота ω – кількість коливань за 2π секунди,
технічна частота f – кількість коливань за одну секунду.
Обидві ці частоти і період пов’язані між собою:

$$f=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}\ \text{(Гц)},\qquad \omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi f\ \text{(рад/с)}.$$

Гармонічні коливання – це коливання, що змінюються за законом

$y(t)=a\sin(\omega t+\varphi)$ або $y(t)=a\cos(\omega t+\varphi)$.

Де $\omega t+\varphi$ – ***фаза коливань***, φ – ***початкова фаза***.

Вимушені коливання виникають від дії зовнішніх сил.

Вібрація – це вимушені коливання, які відбуваються із відносно малою амплітудою і не надто низькою частотою.

4. Види динамічних навантажень

Коливання виникають від динамічних навантажень. На відміну від статичних, динамічні навантаження змінюються у часі за значенням, напрямком або положенням. Вони надають масам системи прискорення, спричиняють інерційні сили, що може призвести до різкого зростання коливань, і в підсумку – до її руйнування.

Періодичні навантаження – це навантаження, що прикладаються через період. Джерелами періодичних навантажень є машини і механізми: електродвигуни, металообробні станки, вентилятори, центрифуги та ін. При рівномірному обертанні їх неврівноважених частин виникають ***гармонічні навантаження***, так звані ***вібраційні навантаження***.

Поршневі компресори і насоси, штампувальні машини, дробилки, копри та ін. створюють ***негармонійне навантаження***.

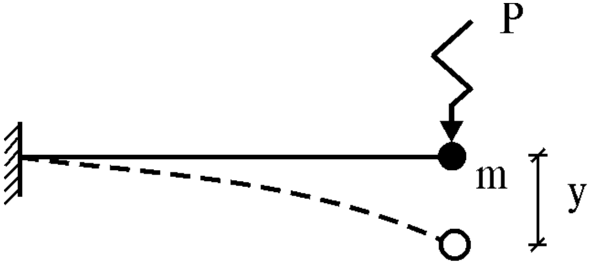
Імпульсні навантаження виникають внаслідок вибуху, падіння вантажів або від частин силових установок (молотів, копрів та ін.).

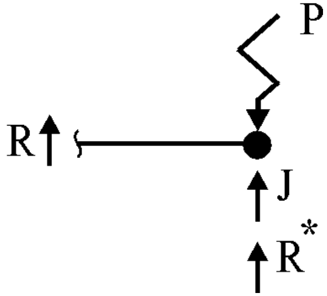
Рухомі навантаження спричиняються залізничними потягами, автомобільним транспортом та ін.

Дуже небезпечними є ***недетерміновані*** *(випадкові)* ***навантаження***, такі як вітрові, сейсмічні, вибухові навантаження.

5. Коливання систем із одним ступенем свободи

Розглянемо коливання невагомої балки із точковою масою $\boldsymbol{m}$ під дією динамічного навантаження $P = P(t)$:





Рівняння коливань маси визначають із умови динамічної рівноваги сил, що діють на неї:

$$J + R + R^* - P = 0 ,$$

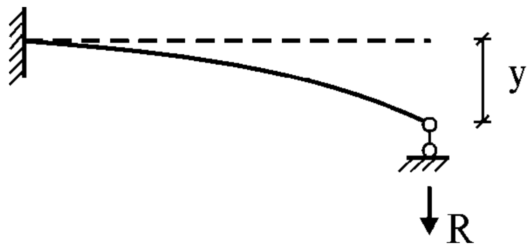
де $J = m\ddot{y}$ – інерційна сила; R – сила пружності балки; R^* – сила опору середовища руховій маси.

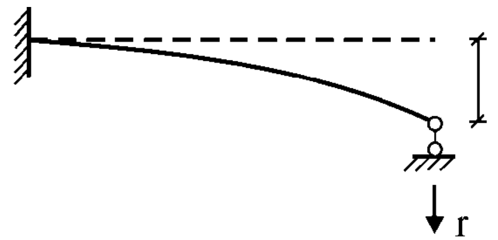
Під час коливань ця динамічна система рухається. Тому дане рівняння називають ***рівнянням руху***.

Силу пружності $\boldsymbol{R}$ у цьому рівнянні можна визначити двома способами.

1) Використання методу переміщень (МП)

Для цього у правому кінці балки встановимо опору і надаємо їй переміщення $\boldsymbol{y}$, що виникають при коливанні маси:



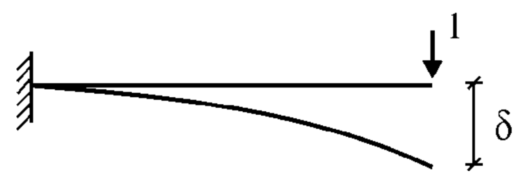


Переміщення $\boldsymbol{y}$ визначають, розглядаючи одиночний стан за методом переміщень. Тоді $\boldsymbol{R=ry}$, де $\boldsymbol{r}$ − ***жорсткість.*** Отримуємо:

$$m\ddot{y} + ry + R^{*} = P$$ **− рівняння коливань у формі МП.**

2) Використання методу сил

Для цього до вільного кінця балки прикладаємо одиночну силу і визначаємо ***податливість*** $\boldsymbol{\delta}$:



За теоремою Бетті $r \cdot \delta = 1 \cdot 1$. Отже, $r=1/\delta$. Якщо підставити його у перше рівняння, поділити рівняння на $\boldsymbol{m}$ і ввести позначення

$$\frac{1}{m\delta} = \omega^{2},$$ отримуємо:

$$\ddot{y} + \omega^{2} y + \frac{R^{*}}{m} = \frac{P}{m}$$ **− рівняння коливання у формі МС.**

6. Власні коливання

Власні коливання виникнуть при *P=0, R*=0*.

Рівняння коливань матиме такий вигляд:

$$\ddot{y}+\omega^2 y = 0.$$

Це загальне рішення:

$$y=A\sin\omega t + B\cos\omega t .$$

Зробимо заміну $A=a\cos\varphi$, $B=a\sin\varphi$. Тоді отримаємо

$$y=a\sin(\omega t+\varphi).$$

Таким чином, власні коливання є гармонійними.

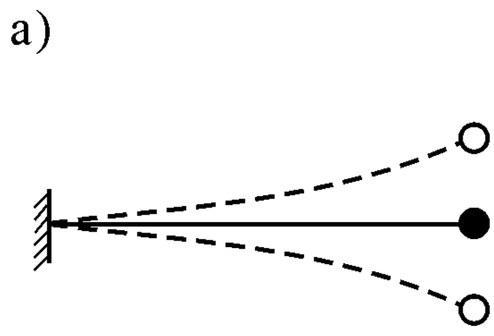
Визначимо початкову фазу φ і амплітуду a цих коливань.

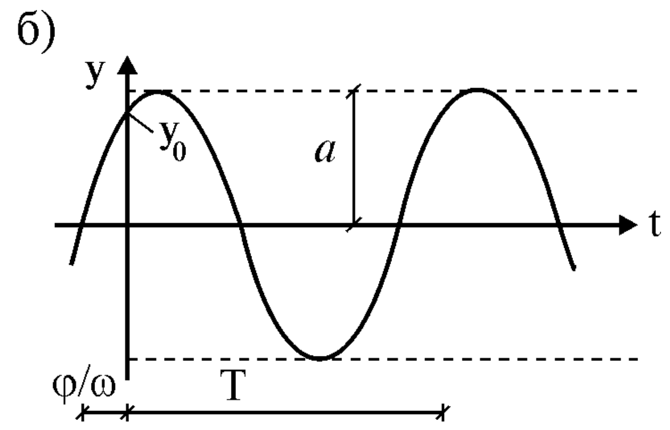
Нехай при $t=0$ відомим є початкове відхилення y_0 і початкова швидкість v_0. Тоді

$$y_0 = a\sin\varphi, \qquad v_0 = \dot{y}(0) = a\omega\cos\varphi.$$

Із них визначаються

$$\varphi = arc\,tg\frac{\omega y_0}{v_0}, \qquad a = \sqrt{y_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}.$$





Якщо вага маси дорівнює $\boldsymbol{G}$, а прискорення вільного падіння $\boldsymbol{g}$, то $G=mg$. До того ж, вага G спричиняє статичний прогин, який визначають за формулою $y_{ст}=G\cdot\delta$. Тоді маємо

$$\omega^2=\frac{1}{m\delta}=\frac{g\cdot 1}{g\cdot m\delta}=\frac{g}{G\delta}=\frac{g}{y_{ст}}.$$

Це дозволяє визначити частоту із рішення статичної задачі.

Із отриманих формул маємо такі ***висновки***:

1) початкова фаза і амплітуда залежать від початкових умов;

2) частота і період власних коливань системи не залежать від початкових умов;

3) при збільшенні жорсткості системи частота власних коливань зростає, а при збільшенні маси – зменшується.