

Теоретичні положення:

Для обчислення площі ділянок застосовують формули геометрії, тригонометрії. При цьому ділянки складних геометричних фігур ділять на місцевості на трикутники бажано рівносторонні, трапеції, прямокутники і загальну площу ділянки визначають як суму площ окремих фігур. Далі наведені основні формули, що часто використовуються для обчислення площ простих геометричних фігур.

Аналітичний спосіб визначення площ. Якщо по межах землекористування або по частинах землекористувань прокладені теодолітні ходи, то площі обчислюють за координатами вершин полігонів. Площі контурів і ділянок можна також обчислити за координатами графічним (визначають за даним планом) або фотограмметричним (визначаються за аерознімками) методами. У навчальному посібнику «Геодезія» наведено формули для визначення площі Р за координатами:

$$2P = \sum_{i=1}^n x_i (y_{i+1} - y_{i-1}) \quad (1)$$

$$2P = \sum_{i=1}^n y_i (x_{i-1} - x_{i+1}) \quad (2)$$

коли координати вершин полігона (контура, ділянки) виписані за ходом годинникової стрілки. Приклад для обчислення площі за формулами (1) і (2), коли спочатку визначають різниці координат:

$$X_{i-1} - X_{i+1} \text{ і } Y_{i+1} - Y_{i-1}$$

$$X_i (Y_{i+1} - Y_{i-1}) \text{ і } Y_i (X_{i-1} - X_{i+1}).$$

Щоб уникнути грубих помилок часто використовують і формули для обчислення площ, в які поряд з координатами входять збільшення координат. Ці формули можна отримати, виходячи з виразу (1), який можна записати так:

$$2P = \sum_{i=1}^n x_i (y_{i-1} - y_i + y_i - y_{i+1}) \text{ або}$$

$$2P = \sum_{i=1}^n x_i y_i + \sum_{i=1}^n x_i y_{i-1}$$

$$\text{Оскільки } \sum_{i=1}^n x_i y_{i-1} = \sum_{i=1}^n x_{i+1} y_i \text{ тоді}$$

$$2P = \sum_{i=1}^n x_i y_i + \sum_{i=1}^n x_{i+1} y_i. \quad (3)$$

Цю формулу можна записати так:

$$2P = \sum_{i=1}^n y_i (x_i + x_{i+1}) = \sum_{i=1}^n y_i (x_i + x_i + x_i) \text{ або}$$

$$2P = 2 \sum_{i=1}^n x_i y_i + \sum_{i=1}^n x_i y_i, \text{ тому}$$

$$2P = \sum_{i=1}^n x_i y_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad (4)$$

Формули (3) і (4) найзручніші для визначення площ на обчислювальних машинах, причому результати, одержані за цими формулами, взаємно контролюються. Зручність обчислення площ за цими формулами полягає в тому, що всі співмножники поміщаються у сусідніх графах відомості координат. Для визначення площі треба мати всього три суми похідних, з яких одна входить в обидві формули.

Результат обчислення площ полігона наведені в правій частині таблиці

Обчислення площі ділянки

№ вершин	X	Y	Y _{n+1} - Y _{n-1}	X _{n-1} - X _{n+1}	X _n (Y _{n+1} - Y _{n-1})	Y _n (X _{n-1} - X _{n+1})
1	21,11	453,48	833,08	1850,48	17586,32	839155,67
2	-689,97	-920,06	-1320,14	-291,85	910857,00	268519,51
3	312,96	-866,66	-833,08	-1850,48	-260720,72	1603737,00
4	1160,51	-1753,14	1320,14	291,85	1532035,67	-511653,91
		2Σ	0,00	0,00	2199758,27	2199758,27
				Σ	1099879,135	1099879,135

Проміжним контролем обчислень слугує рівність сум різниць координат у графах Y_{n+1} - Y_{n-1} і X_{n-1} - X_{n+1} відомості нулю. Сума добутків у графах X_n(Y_{n+1} - Y_{n-1}) і Y_n(X_{n-1} - X_{n+1}) має бути однаковою. Вона дорівнює подвійній площі полігона.

Графічний спосіб визначення площ полягає в тому, що ділянки, зображені на плані, розбивають на найпростіші геометричні фігури, переважно на трикутники, рідше – на прямокутники і трапеції. У кожній фігурі на плані вимірюють висоту і основу, за якими обчислюють площу. Сума площ фігур дає площу ділянки.

Чим більше кутів має межа ділянки, тим менше ефекту від застосування вказаного способу. Отже, для обчислення площ ділянок, що мають велику кількість кутів, застосовувати цей спосіб недоцільно.

Найкращим варіантом розбивки ділянки на трикутники буде той, за якого трикутники близькі до рівносторонніх (точніше, висоти за величиною близькі до основ), що буде доведено в наступному пункті.

Якщо висоти або основи, за якими обчислюють площі фігур, являють собою лінії, виміряні на місцевості, наприклад сторону теодолітного полігона, то для підвищення точності визначення площ довжини цих ліній за планом не вимірюють, а беруть величини, одержані вимірюванням на місцевості. Точність обчислення площі нерівностороннього трикутника буде вищою у тому разі, якщо коротку основу (або висоту) виміряти на місцевості, а довгу висоту (чи основу) визначити за планом, що буде доведено в наступному пункті.

Для контролю та підвищення точності обчислення площу кожного трикутника визначають двічі: за двома різними основами й двома висотами і якщо розбіжність допустима, то з двох значень площі виводять середнє. Допустимість розходження між двома значеннями площі обчислюють за формулою:

$$\Delta P_{\text{за}} = 0,04 \frac{m}{10000} \sqrt{P_{\text{за}}} \quad (5)$$

де М – знаменник чисельного масштабу плану.

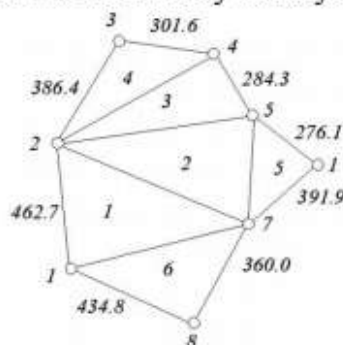


Рис. Обчислення площ графічним способом

Для забезпечення контролю обчислень і підвищення точності при виборі висоти і основи не слід прагнути до того, щоб в суміжних трикутниках вони повторювалися, оскільки це призведе до залежності результатів обчислень і може спричинити грубі похибки.

Обчислення графічним способом площі полігона, зображеного на рисунку, наведено в таблиці.

Обчислення площ графічним способом

Номер трикутників з вершинами	Номер виміру	Основа, м	Висота, м	Подвійні площі, га	Середнє значення подвійних площ, га
1	I	462,7	580	26,84	26,85
1—2—7	II	728	369	26,86	
2	I	458	657	30,09	30,14
2—5—7	II	674	448	30,20	

3	I	284,3	566	16,09	16,07
2—4—5	II	571	281	16,05	
4	I	386 4	280	10,82	10,86
2—3—4	II	301,6	361	10,89	
5	I	276,1	390	10,77	10,78
5—6—7	II	391,9	275	10,78	
6	I	360,0	435	15,66	15,66
7—8—1	II	434,8	360	15,65	
			Усього:	220,71	110,36

Якщо відомі координати точок по межі ділянки та є обчислювальна машина, то доцільніше застосовувати аналітичний спосіб.

Спосіб А.М. Савича (механічний) застосовують для визначення великих площ, наприклад площ землекористування, коли потрібна підвищена точність. Сутність його полягає в тому, що площу ділянки (рис.), укладену в ціле число квадратів координатної сітки P_0 , визначають за їхньою кількістю; планіметром обводять лише площі секцій, які виходять за межі цих квадратів a_1, a_2, a_3 і a_4 і доповнюють їх до цілих квадратів сітки b_1, b_2, b_3 і b_4 . Площі a і b обводять планіметром при двох положеннях полюса, по два обводи в кожному положенні, й виражають у поділках планіметра.

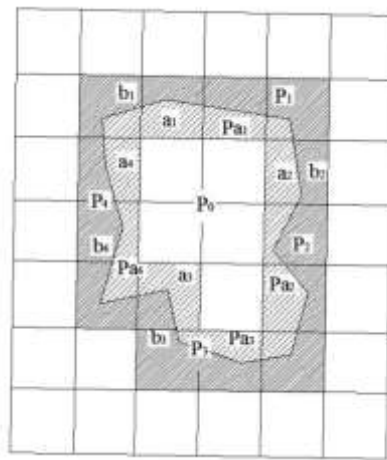


Рис. Схема розбивки на ділянки секції за способом Савича

Нехай шукані площі секції в гектарах, що відповідають позначенням a_1, a_2, a_3, a_4 , будуть Pa_1, Pa_2, Pa_3, Pa_4 . Площі цілих квадратів, які відповідають кількості поділок $a + b$, позначимо через P_1, P_2, P_3 і P_4 .

Оскільки між площами, вираженими в гектарах, і поділками планіметра, існує пряма пропорційність, то можна скласти залежність:

$$\frac{P_{a1}}{a_1} = \frac{P_1}{a_1 + b_1}$$

$$\frac{P_{a2}}{a_2} = \frac{P_2}{a_2 + b_2}, \text{ звідки:}$$

$$P_{a1} = \frac{P_1}{a_1 + b_1} a_1, \quad P_{a2} = \frac{P_2}{a_2 + b_2} a_2$$

За наведеними формулами обчислюють площі секцій, які виходять за межі цілих квадратів координатної сітки. Крім того, слід мати на увазі, що величини визначають ціни поділки планіметра, і невелике розходження у них, яке не перевищує 1/400 від величини ціни поділки планіметра, свідчить про правильність визначення величини a . Контроль здійснюють також порівнянням величин a та b , виражають площу цілих квадратів координатної сітки в поділках планіметра. Відносна розбіжність між значеннями цих величин, відповідної площі однієї і тієї ж самої кількості цілих квадратів координатної сітки також не повинна перевищувати 1/400. Шукана площа ділянки буде:

$$P = P_a + P_{a1} + P_{a2} + P_{a3} + P_{a4}$$

Перевага способу Савича полягає у тому, що при цьому механічно враховується деформація паперу, на якому складені план або карта, зменшується площа фігур, що обводяться, підвищується точність її визначення.