Лекція 1. Основні поняття теорії множин

1.1. Поняття про множину

Одним з фундаментальних неозначуваних понять математики є поняття множини. Воно було введено в математику німецьким вченим Георгом Кантором(1845-1918). Під множиною будемо розуміти сукупність деяких об’єктів за певною їх спільною ознакою. Ці об’єкти називають *елементами* множини. Множини позначають великими латинськими літерами, а елементи множини – малими. Якщо елемент a належить множині M, то пишуть: $a \in M$, якщо a не належить M, то пишуть: $a \notin M$. Загальноприйняті позначення для основних числових множин: N – множина натуральних чисел; Z- множина цілих чисел; Q – множина раціональних чисел; R – множина дійсних чисел, C – множина комплексних чисел. Загальні позначення множин – фігурні дужки {…}, всередині яких задаються елементи множини.

Приклади:

M={1,2,3} – множина, яка містить 3 елементи,

N={1,2,3,…} – множина, яка містить нескінченну кількість елементів,

E={{1,2,}, 3,} – множина, яка містить два елементи: множину {1,2} і елемент 3.

Множина, яка містить скінченну кількість елементів називається *скінченною*, в противному випадку – *нескінченною*.

Упорядковані множини (важливий порядок елементів) позначають (…) або <…>.

1.2. Способи задання множин

Множину задають:

1. ***переліком усіх її елементів***, наприклад *A={a,b,c}, O={Іванов, Петров, Сидоров, Кукушкіна};*
2. ***властивістю, яку задовольняють її елементи***. Якщо P – деяка властивість і P(a) означає, що деякий елемент a має властивість P, то через A={a:P(a)} позначається множина всіх тих елементів, які задовольняють властивість P;

Приклад: $N=\{n|n\in Z \text{ і } n>0\}$, $M=\{m\in M|m=n^2 \text{ і } n\in N\}$

3. способом побудови її елементів.

Приклад: $M=\{n^2|n\in N\}$, $C=\{8x_1+14x_2+32x_3|x_1, x_2, x_3\in Z\}$.

Особливе місце займає *порожня* множина, яка не містить жодного елемента і позначається символом $\varnothing$.

1.3. Підмножини, відношення між множинами

Означення 1.1. Множина B називається підмножиною множини A, якщо кожний елемент множини B є елементом множини A, тобто $\forall a\in B \Rightarrow a\in A$.

Якщо B підмножина множини A, то це записують так: $B\subset A$. З означення випливає, що $A\subset A$. Порожня множина $\varnothing$ є підмножиною для довільної множини A.

<u>Зауваження</u> *Нестроге включення $A\subseteq B$ (A є підмножиною B, що можливо співпадає з B)*

Запишемо всі підмножини множини A={a,b,c}: $\varnothing$, {a}, {b}, {c}, {a,b}, {a,c}, {b,c}, {α,b,c}.

Кількість елементів скінченної множини A називають *потужністю* множини A і позначають |A|.

За індукцією можна довести, що число всіх підмножин множини, яка містить n елементів, дорівнює 2^n . Множину всіх підмножин множини A позначають через P(A) або 2^A і називають *булеаном* множини A.

Для попереднього прикладу |A|=3, а $|2^A|=8$.

Означення 1.2. Дві множини A і B називаються рівними тоді і тільки тоді, коли кожний елемент множини A є елементом множини B і навпвки, тобто, якщо $A\subset B$ і $B\subset A$.

Рівність множин A і B записують так: A=B.

У процесі вивчення множини певний інтерес становлять множини, споріднені між собою, тому природна домовленість про те, що у кожному конкретному випадку розглядувані множини є підмножинами деякої більш об'ємної множини. Цю множину називають універсальною і позначають літерою U.

1.4. Операції над множинами

Означення 1.3. Об'єднанням $A\cup B$ двох множин A і B називається така третя множина, яка містить всі ті і тільки ті елементи, які належать хоча б одній з множин A або B.

Це можна записати так: $A\cup B=\{x: x\in A \text{ або } x\in B\}$. Порядок розміщення елементів тут не має значення, тобто $A\cup B=B\cup A$.

Приклад: $A=\{1,2, 3, 4\}$; $B=\{3, 4\ 5\}$; $A\cup B=\{1, 2, 3\ , 4, 5\}$;

Під об'єднанням n множин розуміємо результат послідовного об'єднання: другої множини з першою, третьої з об'єднанням перших двох і т. д. Використовують таке позначення $A_1\cup A_2\cup\ldots A_n=\bigcup_{\varepsilon=1}^{n} A_\varepsilon$.

Означення 1.4. Перерізом $A\cap B$ двох множин A і B називається така третя множина, яка містить всі ті і тільки ті елементи, які належать одночасно кожній з множин A і B, тобто:

$A\cap B=\{x: x\in A \text{ і } x\in B\}$.

З цього означення випливає, що: $A\cap B=B\cap A$.

Приклад: $A=\{1,2, 3, 4\}$; $B=\{3, 4\ 5\}$; $A\cap B=\{3, 4\}$;

Означення 1.5. Різницею $A\setminus B$ двох множин A і B називають таку третю множину, яка містить ті і тільки ті елементи множини A, які не належать множині B, тобто:

$A\setminus B=\{x: x\in A \text{ і } x\notin B\}$

Приклад: $A=\{1,2, 3, 4\}$; $B=\{3, 4,5\}$; $C=\{1, 3\}$; $A\setminus C =\{2, 4\}$; $A\setminus B=\{1, 2\}$; $B\setminus A=\{5\}$;

У випадку, коли $B\subset A$, говорять, що множина $A\setminus B$ є доповненням множини B до множини A.

Оскільки ми розглядаємо певні сукупності множин у рамках універсальної множини U, то операція доповнення множин набуває самостійного значення, хоча вона є окремим випадком операції віднімання множин.

Означення 1.6. Доповненням $\bar{A}$ даної множини $A\subset U$ до універсальної множини U називають різницю $U\setminus A$, тобто таку множину, яка містить всі ті і тільки ті елементи множини U, які не належать A.

Отже: $\bar{A}=\{x: x\in U \text{ і } x\notin A\}$.

Приклад: : $U =\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$; $A=\{1, 3, 5,7,9\}$ $\bar{A} =\{2,4,6,8,10\}$;

Множина $\bar{A}$ характеризується такими властивостями:

$A\cup\bar{A}=U$, $A\cap\bar{A}=\varnothing$.

Означення 1.7. Симетричною різницею $A\oplus B$ (або $A\Delta B$) називається множина, яка складається з елементів множини A і елементів множини B, за винятком їх спільних елементів.

$A\oplus B=A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)= (A\cup B) \setminus (B\cup A)$;

Приклад: $A=\{1,2, 3, 4\}$; $B=\{3, 4 ,5\}$; $A\oplus B=\{1,2, 5\}$

1.5. Діаграми Ейлера-Венна

Для графічної ілюстрації операцій над множинами користуються геометричними схемами, які називаються діаграмами Ейлера-Венна.

Універсальну множину на діаграмі позначають прямокутником, а підмножини кругами (рис. 1.1).

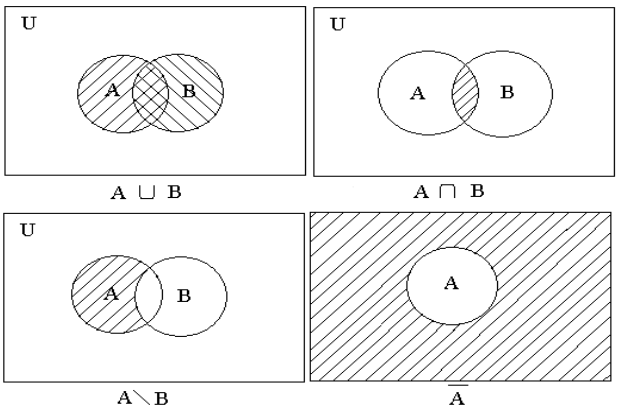

Рис. 1.1.

1.6. Основні властивості операцій об'єднаная, перерізу, доповнення

Нехай *U* - деяка універсальна множина, *P(U)* - множина всіх її підмножин. Операції об'єднання, перерізу й доповнення над елементами з *P(U)* мають такі властивості:

1,а) $A \cup B = B \cup A$; 1,б) $A \cap B = B \cap A$;

2,а) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$; 2,б) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;

3,а) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$; 3,б) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

4,а) $A \cup \varnothing = A$; $A \cup U = U$ 4,б) $A \cap \varnothing = \varnothing$; $A \cap U = U$

5,а) $A \cup A = A$; 5,б) $A \cap A = A$;

6,а) $A \cup \overline{A} = U$; 6,б) $A \cap \overline{A} = \varnothing$;

7,а) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; 7,б) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

8,а) $\overline{\overline{A}} = A$;

Тотожності 1-3 виражають відповідно комутативний, асоціативний і дистрибутивний закони для об'єднання і перерізу, 4 - властивості $\varnothing$ і U, 5 - закони ідемпотентності, 7 - закони де Моргана, 8 - закон інволюції (подвійного доповнення).

1.7. Доведення тотожностей

Для доведення тотожностей використовується *універсальний метод доведення,* в основу якого покладене визначення рівності (еквівалентності) двох множин. Кожне з доведень складається з послідовності тверджень виду "якщо P, то Q", записується як "$P \Rightarrow Q$" і читаються як "з P випливає Q". Тобто, якщо існує послідовність тверджень $P, P_1, P_2, P_3, ..., Pn, Q$ така, що з P випливає P_1, з P_1 випливає P_2,…з Pn випливає Q, то існує доведення, що "з P випливає Q", тобто $P \Rightarrow Q$.

Доведемо, наприклад, властивість 3, а). Позначимо ліву частину рівності 3 а) через S, а праву - через T.

1. Покажемо, що $S \subset T$, тобто, що твердження $\forall\ a \in S \Rightarrow a \in T$ є істинним. Нехай $a \in S$, це означає, що $a \in A$ або $a \in (B \cap C)$. Якщо $a \in A$, то $a \in A \cup B$ і $a \in A \cup C$, а, отже, а $a \in T$, тобто твердження $a \in S \Rightarrow a \in T$ є істинним.

Якщо $a \in (B \cap C)$, то $a \in B$ і $a \in C$, а отже, знову $a \in A \cup B$ і $a \in A \cup C$. Таким чином, $a \in T$, тобто твердження $a \in S \Rightarrow a \in T$ і у цьому випадку є істинним. Отже, $S \subset T$.

2. Доведемо зворотне включення: $T \subset S$.

$a \in T \Rightarrow a \in A \cup B$ і $a \in A \cup C \Rightarrow a \in A$ або ($a \in B$ і $a \in C$) або $a \in (B \cap C) \Rightarrow a \in S \Rightarrow T \subset S$, отже, $S = T$, тобто 3,а) доведено.

Питання для самоконтролю:

1. Що розуміють під множиною?
2. Яке практичне застосування має теорія множин?
3. Яку множину називають скінченою (впорядкованою)?

4. Що представляє собою універсальна (порожня) множина?
5. Коли можна вважати, що множини рівні?
6. Які є способи задання множин (відношень)?
7. Яку множину називають булеаном або множиною-степенем?
8. Які засоби використовують для геометричної інтерпретації множин?
9. Які основні операції можна виконувати над множинами?
10. Що представляє собою об’єднання (перетин) множин?
11. Що представляє собою різниця (симетрична різниця) множин?
12. Що представляє собою доповнення множини?
13. Які є основні закони та властивості алгебри множин?
14. Які існують методи доведення тотожностей?